


Biblioteca Complutense
Ildefonsina.
E. 4. C. 5. N. 8.



16-3

J-4-6

ELEMENTOS
DE MATEMATICA.

TOMO VII.

ELEMENTOS
DE MATEMATICA.

POR DON BENITO BAILS,

Director de Matemáticas de la Real Academia de San Fernando, Individuo de las Reales Academias Españo-la, de la Historia y de la de Ciencias naturales y Artes de Barcelona.

TOMO VII.





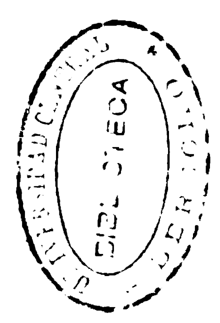
MADRID.

Por D. Joaquin Ibarra, Impresor de Cámara de S. M.

MDCCLXXV.

ADVERTENCIA.

El estrecho enlace que tienen con el instituto de la Academia las materias contenidas en el tomo noveno, y el continuo é indispensable uso que en todos los ramos de las Matemáticas se hace de las tablas, fueron los motivos principales que obligaron á Don Benito Bails á anteponer la publicacion de estos dos tomos á la del séptimo y octavo, ya que el mal estado de su salud no le permitia desempeñar sus encargos con aquella puntualidad que era propia de su genio eficaz y laborioso. Precisado por esta causa á pasar en la cama la mayor parte de su vida, y acometido con freqüencia de achaques de la mayor consideracion, era consiguiente que á cada paso interrumpiese el curso de unas tareas que tenian por objeto el dar á la Nacion la obra mas completa que en el dia conoce. Y así aunque los dos expresados tomos están impresos desde el año de 1775, como consta por una nota que Bails puso en la segunda edicion del tomo primero de esta obra, no han podido publicarse por esperar su Autor una ocasion oportuna, en que aliviado de sus males pudiese dedicarse con alguna tranquilidad á añadirles el prólogo, sacar sus erratas, ordenar las láminas, y hacer en sus figuras las muchas correcciones que ne-



necesitaban, que era lo único que les faltaba; y que sin embargo nunca pudo poner en execucion. Pero la Academia que tanto se interesa en la instruccion nacional, no ha omitido diligencia ninguna despues del fallecimiento del citado Bails, para que el público empieze á disfrutar unos libros que tantos años ha desea.

Acaso se echará de ménos en ellos un prólogo, que como en los otros manifestase las obras que han servido para su composicion, y el mérito de sus Autores; pero esto solo Bails que sabia los auxîlios con que habia texido la suya, y que hablaba de los trabajos agenos con la misma imparcialidad que de los propios, podia desempeñarlo con acierto. Qualquier otro, sobre exponerse á no atinar con los motivos que tuvo para seguir en estos tomos el rumbo que en ellos se nota, podia deslucir fácilmente á algunos Escritores beneméritos, por no acertar á señalar con la modestia que corresponde, y con la franqueza que él lo hacia los defectos de sus obras.

No obstante, el prólogo que sigue es el mismo que puso Bails al tercer tomo de sus principios de Matemáticas en la última edicion que de él hizo, pues ha parecido mas propio de esta obra que de aquella, atendiendo á la extension con que aquí trata la materia, y á los puntos que en dicho prólogo se propone exâminar.

PRÓ-

PRÓLOGO.

Aunque de igual utilidad todos los asuntos de esta obra, es sin duda alguna la Astronomía el de mayor elevacion. En las investigaciones propias de los demas, sigue el hombre quieto en su morada, y á la hora que mejor le acomoda el hilo de sus tareas; pero para dedicarse á las investigaciones peculiares á la Astronomía, tiene que abalanzarse, por *decirlo así*, *al firmamento*, inventar muchísimos instrumentos, y discurrir varios métodos, que todos requieren extraordinaria aplicacion, constancia y sagacidad; tiene que pasar la mayor parte de su vida separado de los demas hombres, gastando las noches en la contemplacion de las apariciones celestes, y los dias reparando con el sueño el menoscabo que causan en sus fuerzas sus afanes astronómicos.

Son, pues, dos en general los principales puntos que deben llamar la atencion en un tratado de esta ciencia, aunque muy sucinto; las circunstancias de la Astronomía, y los trabajos del Astrónomo. Me detendré á pintarlos aquí, traduciendo, si acierto, algunos párrafos de la historia de la Astronomía de Mr. Bailly, obra que no puede ménos de dexar plenamente satisfecho á un lector atento, y en la qual

todo sobresale, diligencia, doctrina, claridad, filosofia y eloqüencia.

"La Astronomía (dice Mr. Bailly) nacida en los campos y entre pastores, ha pasado de los hombres mas sencillos á los entendimientos mas sublimes. Grandiosa por la inmensidad de su objeto, curiosa por sus medios de investigacion, portentosa por el número y la especie de sus descubrimientos, es tal vez la medida de la inteligencia del hombre, y la prueba de lo que puede con el tiempo y el ingenio. No porque haya encontrado aquí la perfeccion que en todo le es negada, sino porque en ningun asunto el entendimiento humano ha discurrido mas recursos, ni dado muestras de mayor sagacidad. Es consideracion digna de todo hombre curioso trasladarse á los tiempos en que esta ciencia empezó, ver como los descubrimientos se han ido encadenando, como los errores se han mezclado con las verdades, atrasando su conocimiento y sus progresos; y despues de recapacitados todos los tiempos y recorridos todos los climas, contemplar al último el edificio fundado sobre los trabajos de todos los siglos y de todos los pueblos.

„La voz Astronomía, en su significado general, quiere decir *ciencia de los astros*. Compónese de dos voces griegas, que la una significa *astro*, y la otra *ley*, *regla* ó *medida*. Esta Etymología pudiera

ra

ra dar á entender que el objeto de la Astronomía no es otro que medir el movimiento de los astros, y averiguar las leyes, las reglas á las quales va ajustado; pero en realidad abraza esta ciencia todo quanto tiene relacion con la naturaleza de los cuerpos celestes.

„Es, pues, el objeto de la Astronomía hacer la enumeracion de los astros, distinguir los que son fixos de los que son errantes; señalar en el cielo el lugar del qual los unos nunca jamas se apartan, y trazar el rumbo de los otros, demarcando los límites y manifestando hasta las mas mínimas irregularidades de su carrera; conocer los fenómenos que resultan de la combinacion de estos diferentes movimientos; por lo que toca á los astros mismos, su objeto es observar sus apariencias, su figura, su magnitud respectiva ó real, y hasta su densidad; quiero decir la cantidad de materia que tienen en un volumen dado. Estos conocimientos son el fruto de una observacion constante y continuada. Es preciso que los hombres velen sin descansar por no perder circunstancia alguna de estos movimientos inalterables, y conocer la naturaleza que nunca jamas descansa. Por este medio se forman aquellos depósitos preciosos para el entendimiento humano, donde los siglos que ninguna huella dexan de sí, quedan fixados con las observaciones astronómicas. El tiempo cor-

corre, y su pérdida redunda en benficio de la ciencia, la qual vá creciendo con la edad del mundo.

,,Pero despues que la Astronomía ha observado de este modo los fenómenos, no ha desempeñado mas que su primer objeto; otro le queda por desempeñar mas filosófico, que consiste en indagar la explicacion de estos fenómenos, juntar las diferentes causas, efectos de otra causa de mayor influxo, y alcanzar por este camino la ley simple que es la causa universal: la ciencia no habrá llegado á su término sino despues que lo hubiere conocido todo y explicado todo. Ha hecho y está haciendo progresos rápidos: su destino es acercarse sin cesar á este término, y nunca jamas alcanzarle.

,,Esta investigacion de las causas es empeño reservado al astrónomo filósofo. Los observadores recogen, los hechos se amontonan como los materiales de un edificio, y esperan al hombre de ingenio, quien solo puede ser el arquitecto del universo. El es quien combina los hechos; percibe su relacion. Una explicacion generalizada en su cabeza llega á ser la llave de una multitud de fenómenos; va siguiendo la cadena donde la naturaleza eslabona sus misterios; camina descubriendo sus arcanos, y vé patente el mecanismo del universo. Así caminaron Hiparco, Ptolomeo, Copérnico, Ticho, Keplero, Domingo Casini y el gran Newton, cuyos nombres para

ra

ra siempre memorables, son acreedores al respeto y agradecimiento de todas las edades.

„Quedan todavía muchísimas cuestiones por decidir: esta *será* la obra del tiempo y la cosecha de la *posteridad*. Pero en esta obra que ha de ser el *depósito*, y al mismo tiempo la historia de los conocimientos, causará admiracion la carrera andada por el entendimiento humano. El primer pastor, que alzando los ojos á la bóveda celeste, deseó conocer el número y el movimiento de los astros, fué *el primer inventor de la* Astronomía. Pero ¡quanta distancia de esta mirada, que, por decirlo así, no pasó de la superficie del cielo, á la mirada con que Newton caló el universo! ¡Quanta distancia de aquellos hombres groseros, quienes viendo el sol desaparecerse debaxo del orizonte, creian que de noche *se apagaba* para encenderse otra vez por la mañana del dia siguiente, al hombre inmortal, quien de una sola ley, de un principio único infirió todos los fenómenos; quien enseñó que una fuerza inherente á cada partícula de materia, junta con el primer impulso dado por el Criador, arreglaba y mantenia el movimiento del universo! Que vió los globos bambolear, andando el camino que les tiene señalado la naturaleza, ¡quien los siguió en sus irregularidades, y *halló* constantemente la ley y el principio que habia anunciado! Esta distancia es inmensa; el entendi-

dimiento humano la ha andado con pasos desiguales, y volviendo muchas veces atrás. La barbarie que á temporadas vuelve á empuñar el cetro del mundo, ha dexado perder muchas veces los vestigios de la industria humana; cuyos vestigios no los han conocido sino á costa de mucho trabajo generaciones muy distantes. A veces una observacion penosa y constante ha llenado el intervalo de muchos siglos; era el cimiento sobre el qual nosotros edificamos hoy dia: á veces algunos hombres célebres, recogiendo los trabajos de sus predecesores, combinando los hechos para deducir sus consecuencias, han propuesto sistemas, que segun el destino de los sistemas habian de perecer un dia; á veces entendimientos sólidos y mas afortunados han columbrado algunas de aquellas verdades que arrojan luz á los siglos venideros, y cuyas consecuencias sirven de guia para nuevas indagaciones. El estado actual de la Astronomía es el espectáculo mas lisongero para el filósofo que desea conocer los efectos y las causas, y prueba quanto pueden los empeños unidos á los empeños, y la constante aplicacion de muchos hombres dedicados á cultivar un mismo objeto á pesar de las mudanzas de las generaciones que se renuevan, de los azotes que afligen á la especie humana; y por fin á pesar de la misma ignorancia que al cabo de ciertos períodos vuelve á levantar la cabeza, y viene á derribarlo todo.

„En

„En la Astronomía pueden distinguirse tres partes, las quales si bien tienen por objeto comun el conocimiento de los astros, cada una se dedica sin embargo á un objeto particular, sigue rumbo y progresos diferentes. La observacion, ó la enumeracion de los fenómenos; los resultados inferidos de las observaciones, ó el descubrimiento de la cadena que tiene eslabonados los fenómenos; la teórica ó la explicacion de los fenómenos por las leyes conocidas del movimiento.

„*La observacion* consiste en determinar el lugar que un astro ocupa en el cielo en el instante que se le observa. Quando el astro es fixo, la determinacion queda hecha para siempre, y solo necesita repetirse despues que llegan á perficionarse los medios de observar, ó así que se llega á conocer que no es fixo un astro que por tal se tuvo. Quando el astro tiene movimiento, la observacion solo enseña el lugar que el astro ocupaba en el cielo en un instante señalado, pero no enseña el lugar que ocupará al dia siguiente, de aquí nace la necesidad de repetirse las observaciones. Bastan constancia y trabajo para juntar observaciones, y formar aquellos depósitos, fundamento de los trabajos de la posteridad, quando le son transmitidos. La guerra ha asolado tantas veces la tierra, que los antiguos depósitos ya no subsisten. Estas riquezas lite-

te-

terarias no tentaron á conquistadores groseros, y las bibliotecas antiguas perecieron, á veces aniquiladas por la supersticion, muchas veces disipadas por la ignorancia, cuyo genio es dexarlo todo perecer, porque nada mira con interes, por lo mismo que nada mira con conocimiento. Esta es la causa por que estos repuestos de observaciones muchas veces disipados han sido muchas veces empezados. Los anales de los pueblos hacen memoria de observaciones continuadas muchos siglos seguidos, de las quales solo queda un corto número. Mas son las que echamos menos que no las que tenemos.

,, Los resultados son los conocimientos ó las verdades que pueden sacarse de una ó muchas observaciones. Tales son v. gr. respecto de los astros que se mueven, el conocimiento de la forma, la magnitud, la posicion de su órbita en el cielo, el conocimiento de su revolucion, de su velocidad, de las variaciones de esta velocidad que nunca es uniforme, y de las irregularidades de estas variaciones que suelen ser muy complicadas. Estas mudanzas, llamadas generalmente *fenómenos*, vuelven á ser las mismas al cabo de cierto período. Todas son consecuencia unas de otras, pues acaecen succesivamente, y por el influxo de una misma causa. La serie y el enlace de estos efectos son dificultosos de conocer. El logro del fin pende del tino de la invencion,

cion, y del conocimiento de todos los hechos. Conforme los hombres entregados á esta indagacion han sido mas ó menos dotados de este tino, mas ó menos impuestos en los hechos, ha sido mas ó menos cumplido el logro de su deseo, han inventado ficciones ó descubierto verdades. Así Ptolomeo ó sus predecesores complicaron la explicacion del movimiento de los planetas, con círculos multiplicados dando vueltas unos por dentro de otros; así Keplero substituyó una elipse á estos círculos, y aquel varon, dotado sin la menor duda del don de invencion, reduxo con una ocurrencia luminosa la Astronomía á la verdadera forma de las órbitas celestes.

„Camina, pues, muchas veces á obscuras este ramo de la Astronomía; porque unas veces ha habido luces sin hechos, otras hechos sin luces; á veces luces y hechos todos han faltado juntos. Si el entendimiento humano ha abrazado una mala hipótesi, lo ha hecho porque no tenia entonces bastante extension para percibir muchas, porque no tenia bastante perspicacia para percibir sus defectos, ó porque le faltaban hechos para formar de ella cabal juicio. Vinieron despues nuevos hechos, los quales por no quadrar con la primer hipótesi dieron ocasion de imaginar otra; y el hombre ha recorrido en toda linea el círculo de los supuestos, y el círculo todavía

vía mayor de los errores, antes de llegar á la verdad, cuyo caracter, en Astronomía igualmente que en Física, es confirmar, explicar los fenómenos pasados, y ser tambien confirmada por los fenómenos venideros.

,,No está todo aquí. Los hechos mismos ó las observaciones, fundamento de todo, no se compadecen con una exâctitud rigorosa, que solo se halla en la Geometría. Pero la Geometría, considerada como ciencia de la extension y del movimiento, está desnuda de todas las demas circunstancias físicas; es puramente intelectual, y obra del entendimiento quien ha fundado esta exâctitud en las abstracciones, cuya exâctitud se desaparece, hablando con verdad, luego que al aplicar la Geometría á la Física, se la saca de la fantasía del hombre para acercarla á la naturaleza.

,,En Física todo conocimiento rigorosamente exâcto le es negado al hombre; todo quanto puede es llegar al punto de precision proporcionado al grado de su industria, y á los medios mecánicos que tiene en su mano.

,,Hay por consiguiente errores, ó, mejor diré, dudas inevitables, así en las observaciones como en los resultados. En las observaciones, porque el hombre observó primero con sus ojos solos, primeros instrumentos suyos; despues se ha auxîliado de algu-

gunos instrumentos toscos ; los quales se han perficionado y se perficionan hasta cierto grado del qual la industria humana no puede pasar. Así las observaciones son y serán mas precisas ; pero al mismo tiempo cada resultado fundado en estas observaciones sale manchado con su falta de precision ; luego las determinaciones principales y fundamentales de la Astronomía necesitan renovarse, y son de tan singular naturaleza los progresos de este género de conocimientos, que la ciencia adelanta solo destruyendo. *Las medidas actuales* todas van fundadas en los trozos de las medidas mas antiguas, y aquellas así que lleguen con el tiempo á ser tambien antiguas, tendrán el mismo destino que estas. Pero de aquí no debe inferirse cosa alguna contra la ciencia, porque esta es un conocimiento real, acaso el único que poseemos, esto es el conocimiento de los límites dentro de los quales la exâctitud ó la verdad está ceñida. El estrechar estos límites es obra de las naciones venideras. Por otra parte, no toda la incertidumbre inherente á cada observacion influye en las determinaciones, puede repartirse entre todas. Quando se quiere determinar v. gr. la duracion de qualquier período, la determinacion está expuesta al error de la observacion hecha al principio, y al error de la observacion hecha al fin del período. Pero si desde la una observacion á la otra han pasado cien-

 to

to ó mil de estos períodos, el error repartido entre todos influirá poco en el conocimiento de la duracion del período. En esta obra se verá á los Astrónomos de diferentes siglos ocupados unos despues de otros en los mismos trabajos, para perficionarlos sin cesar. Con nuestra industria hemos hallado el medio de minorar los errores que no podemos evitar, y de acercarnos á aquella exâctitud rigorosa, á la qual no nos es posible llegar, aunque de ella realmente tengamos idea.

,,La teórica es la explicacion de los fenómenos celestes por las leyes del movimiento. Algunos filósofos antiguos tuvieron opiniones acerca de la formacion del mundo, acerca de los elementos de que se compone; á cuyos elementos añadian ó quitaban otros quasi á medida de su antojo: en esto no eran mas que físicos, pero malos físicos. Los elementos del mundo son mucho mas impenetrables que no las causas de los movimientos celestes; son los últimos atrincheramientos de la naturaleza, y allí acaso está la causa universal. Proponian con tanto mayor desahogo sus aserciones, quanto donde es menos asequible la verdad, es tanto mas dificultoso demostrar el error. Era, pues, limitada la explicacion del mundo á algunos pensamientos físicos acerca de su formacion. La antigüedad ha guardado un profundo silencio acerca de las causas que arrojan y su-

sujetan los cuerpos celestes en sus órbitas.

„En Astronomía las observaciones, y aun los resultados no manifiestan sino efectos, cuya causa es natural que los hombres deseen conocer. Pensamiento sublime fué el osar reducir las leyes del movimiento general del universo á las leyes del movimiento de los cuerpos terrestres. Esta empresa toda es privativa de nuestros siglos modernos; se la reconocemos á Descartes. Sus torbellinos son una mala explicacion de la pesantez y del sistema del mundo, *pero sus torbellinos son* mecánicos. Ha descubierto que era uno mismo el mecánismo que movia los cuerpos en los espacios celestes y en la superficie de la tierra; si no se ha adivinado este mecanismo no se nos ha olvidado que este pensamiento nuevo y grandioso es parto de su ingenio. Lo que *Descartes* se propuso, Newton lo executó. Nada defraudamos de la gloria de este gran varon con hacer justicia á Descartes.

„Este es el objeto, esta es la naturaleza de los progresos de la Astronomía. En esta obra se verá quanto tiempo y trabajo ha sido menester para averiguar que los movimientos de los astros al parecer tan complicados son sencillísimos en la realidad, y efecto de una causa mas sencilla todavía.

„Si los fundadores de la Astronomía, si los hombres de ingenio, los primeros que ensancharon

el recinto de sus conocimientos, quienes desesperaron de poder explicar, ni siquiera conocer los fenómenos, si, como digo, esos hombres, tan acreedores á nuestra gratitud, volviesen hoy dia al mundo, quan atónitos no se quedarian al ver como su posteridad ha desenredado este caos, y, por decirlo así, se ha enseñoreado del sistema del universo! ¡ Quantos hombres extraordinarios desconocidos hoy dia han cooperado á estos progresos! Pero no son los primeros inventores los mas celebrados; la ignorancia disfruta y no aprecia. Los inventos útiles, del mismo modo que las semillas de los vegetables, crecen y maduran sin ruido; los frutos se cogen sin trabajo, y el vulgo goza de unos y otros sin informarse como ni de donde vienen, y sin figurarse lo que han costado.

„Hemos puesto en la clase de los inventos útiles los inventos de la Astronomía, y los hombres ilustrados á buen seguro no preguntarán si con efecto esta ciencia es útil. Pero son tantos los que todavía están persuadidos á que las ciencias, y esta especialmente, no son mas que un asunto de mera curiosidad, que tenemos por oportuno especificar aquí menudamente los beneficios que se les siguen á los hombres de la práctica y del estudio de la Astronomía. Proporciona desde luego la misma utilidad que las ciencias en general; ilustra al siglo, y perficiona el

el entendimiento humano. La masa de las luces nacionales se compone de todos los conocimientos particulares. Cada descubrimiento, cada pensamiento nuevo y verdadero viene á colocarse por sí en este *repuesto*, todos juntos causan un movimiento *imperceptible*, el qual se comunica á todos los entendimientos; en poco tiempo las luces se distribuyen y reparten á la nacion. Al modo que los principios levantados por la evaporacion de cada terreno particular, llevados y mezclados por los vientos dan al *ayre de una provincia ó* de un reyno un caracter y propiedades generales originadas de la combinacion de dichos principios.

„La aficion á las ciencias y á las letras, al paso que suaviza las costumbres, hace mejores y mas felices á los hombres. Los liberta en general de la *intriga* y *la* ambicion; inclina á la virtud mediante el amor de la verdad. No hay sobre la tierra mas hombre de bien que el hombre veraz. No es posible que un hombre cale los abismos de la naturaleza, se dedique á descubrir sus arcanos, exâmine los hechos, los fenómenos, no admita como verdadero sino lo que lo es en realidad, sin buscar y profesar verdad en el discurso de su vida. El amor de la verdad que le mueve á estas investigaciones no puede menos de extenderse á la moral, y llegar á ser principio, así como el trabajo llega á ser costumbre.

Esto podria amplificarse si la práctica de la Filosofia y el estudio de las ciencias necesitasen de apología. Pero aquí solo se trata del estudio de la Astronomía.

,,Esta ciencia segun ó conforme se ha perficionado ha ido curando preocupaciones , y disipando temores , nacidos acaso de la infancia de la misma ciencia. Es este un beneficio real que ha hecho al género humano. El hombre nace tímido, teme sobre todo los peligros que no conoce, aquellos peligros con los quales no ha medido sus fuerzas y su prudencia. Antes que se familiarizase con la naturaleza empezó temiéndola , y era regular que le causase espanto. Muy pronto se acostumbró al orden invariable del cielo, á la succesion constante de sus fenómenos ; pero los fenómenos mas raros le parecieron un trastorno del orden natural. El primer eclipse total del sol hizo temer la aniquilacion del mundo. El primer eclipse de luna hizo temer la pérdida de este astro; creyóse que un dragon queria tragársela. Los cometas reparables , espantosos por su cola , por su cabellera , pronosticaban (así pensaba el vulgo) la muerte de los príncipes , la ruina de los imperios , peste , hambre , &c. La Astronomía con manifestar las causas de estos fenómenos ha tranquilizado los ánimos. El dia de hoy ni aun el pueblo se espanta de los eclipses. El terror de la aparicion de los cometas

tas

tas ha subsistido mas tiempo. Por el año de 1680, quando Newton calculaba las órbitas de los cometas, quando Haley iba á pronosticar su regreso, quasi toda Europa estaba en una profunda ignorancia acerca de la naturaleza de estos astros. Se miraban como los anuncios de las venganzas de Dios, el susto era grande y general. Pero la Astronomía con enseñar que los cometas tienen un regreso cierto, y una carrera invariable, ha desvanecido esta preocupacion.

„*La Astrología judiciaria* es una enfermedad no menos lastimosa del entendimiento humano. Originóse sin duda alguna del abuso de la Astronomía. Todos los hombres deseosos de llegar á los tiempos venideros, quisieran conocer por lo menos el que les espera; solo el sabio sabe que este conocimiento le seria funesto. Infeliz con lo pasado, descontento con lo presente, el hombre no vive sino de esperanzas. La incertidumbre de su destino le sostiene en una carrera que hace empeño de precipitar. Si lo futuro se le manifestara, atormentado de los males venideros como presentes, poco lisongeado de bienes perdidos antes de gozarlos, su exîstencia no seria mas que una carga pesada. La Divina Sabiduría ha querido apartar de nosotros estos males, que la Astrología judiciaria ha intentado derramar sobre la tierra. Todavía se experimentan en algunas regio-

nes donde là luz dé las ciencias no ha penetrado. No ha mucho tiempo que los pueblos todavía tenian sus adivinos, y los príncipes sus astrólogos. Catalina de Médicis, poseida de este error, mandó levantar la torre del palacio de Soisons, para ir á interrogar á los astros; que los malvados especialmente son ansiosos de saber lo por venir, y los remordimientos de su conciencia son una especie de Astrología que les quita el sosiego. La muerte de Henrique Quarto, ya antes ya despues de este desgraciado suceso, ¿quien podrá creer que el celebre Domingo Casini del estudio de la Astrología pasó al de la Astronomía? No tardó en desengañarse, y con la luz que sus trabajos arrojaron desengañó á su siglo. El conocimiento reflexîonado del movimiento de los cuerpos celestes ha abierto los ojos de todos. La distancia muy averiguada de los astros ha probado que están á mucha distancia para que sus influxos alcancen hasta nuestro globo. Hay todavía mas: estos cuerpos que, por el movimiento diurno de la tierra, parece que dan cada dia la vuelta al rededor de nosotros, no pueden menos de obrar cada dia de un mismo modo. Son, pues, inútiles para explicar ó pronosticar las variedades de los genios, de las pasiones y de los destinos. Se ha conocido que sus aspectos; sus encuentros determinados desde el principio del mundo, por movimientos in-

invariables, nada le pronostican al hombre; que sus esferas, separadas de la nuestra por inmensos intervalos, prohiben toda comunicacion, menos la de la luz, que sin duda alguna es la misma para todos los astros, y por otra parte cae igualmente para todos los hombres.

II. „El edificio del observatorio (el de París) mas es un monumento de magnificencia que de utilidad. Pero, bien que inútil para la Astronomía, que no necesita de tanto luxo, sirve para manifestar *el cuidado y fomento* de los reyes. A la Astronomía le basta una torre redonda bastante alta para que domine todo el contorno del orizonte bastante capaz para colocar y mover sin sujecion alguna en su recinto los instrumentos necesarios. Se ha discurrido cubrirle con una cubierta cónica, rasgada de arriba abaxo por una abertura longitudinal; la cubierta movible dando vuelta dirige esta abertura al arbitrio del observador, y ácia la parte del cielo donde necesita aplicar la vista. En medio de la torre hay un quadrante de círculo, cuyo destino es ser dirigido á todos los puntos de la bóveda celeste, y señalar la altura de los astros que allí se encuentran. En la direccion del meridiano la pared de la torre está rasgada; allí se coloca otro quadrante de círculo llamado *mural*, porque está sólida é invariablemente asegurado en el

mu-

muro. Este instrumento, y sobre todo el hilo sutil que atraviesa verticalmente la abertura del anteojo, representa el meridiano, anteojos de todos tamaños, de potencias diferentes están desparramados y colgados. Cerca del observador están las péndolas; con la vista sigue el movimiento de las manos, con el oido percibe el movimiento del escape á cada vibracion. Aquí está en pie el astrónomo, atento á todos los fenómenos; viene á ser como el centro del mundo, el cielo dá la vuelta alrededor de él, y la naturaleza se pone en movimiento para manifestarse á su vista. Vamos á observarle á él mismo, seguiremos, pintaremos sus operaciones; deseamos que los mozos que se dedican á la Astronomía hallen aquí la pintura de sus obligaciones y el uso que han de hacer de sus desvelos; los que no se dedican á esta ciencia, mejor informados, dexarán de espantarse, y empezarán á dar crédito á las respuestas de la naturaleza, despues de formar juicio del modo de interrogarla.

„El que entra en este santuario, debe estar todo entregado al servicio de Urania. Esta es la diosa cuyo sacerdote es, y cuyos oráculos manifiesta; pero estos oráculos los logra, se los arranca con su eficacia; no tiene descanso sino los dias sombríos y tristes, los instantes en que la natu-

tu-

turaleza añade á todos sus velos el velo de las nubes, su dia le interrumpen, se le cortan diferentes observaciones; el sol le ocupa por la mañana, á mediodia, por la tarde; y luego que este astro se desaparece, los demas planetas, las estrellas se dexan ver para ocuparle con nuevos trabajos. Los Astrónomos suelen repartírselos, pero el que los abraza todos es preciso tenga un cuerpo de bronce; es preciso que el zelo de la ciencia le despierte á instantes señalados de la noche; es preciso que este zelo le defienda del sueño, si ha de velar toda la noche; es preciso que estas vigilias se repitan si se dedica al trabajo continuo y renovado todas las noches de las observaciones de las estrellas; todo esto lo executa pegado el ojo al anteojo, el oido á la péndola, en pie, ó el cuerpo doblado, echado muy á menudo boca arriba mirando al zenit, á pesar del frio de las noches de invierno, á pesar de la fatiga del velar. Esta es la vida quasi nocturna de los Astrónomos; esta fué la vida de Ticho, Hevelio, Flamstead, esta apresuró la pérdida, y causó la temprana muerte del Abate La-Caille, de un maestro que todavía lloramos, y que la ciencia, la virtud y la amistad echan todavía menos con nosotros. Estas fatigas son mayores en las partes de Europa donde la Astronomía ha sido cultivada

con

con mas empeño. Copenhague, Dantzick, Londres, París, donde han vivido aquellos celebrados observadores, y el cielo es tan vario como los hombres. Las noches serenas suelen ser solas, aisladas, y no se siguen sino en intervalos muy cortos del año; las demas noches están cubiertas de una gasa, no hay sino instantes. Es, pues, preciso atisbar estos momentos, y la inconstancia del cielo que se muestra propicio al observador. Las mas de las observaciones se hacen así á hurtadillas; son obra de la constancia, del zelo, y mas que todo del tiempo que las va juntando para formar un cuerpo de doctrina. Pero acaso estos mismos obstáculos acrisolan la eficacia; parece que el hombre no pone empeño en sus investigaciones sino á proporcion de lo que se le resisten; en toda linea parece que los conatos son proporcionados á la necesidad. El Olandes tranquilo á la orilla del mar, por lo comun mas alto que él, ha conseguido sujetarle; el Italiano en sus climas afortunados lucha todavía con los rios que los fertilizan. Los hechos hacen patente que la Astronomía no ha hecho progresos en los climas hermosos donde ha sido adoptada. La razon es que allí los astros no son ni buscados ni deseados; son objetos de todos los dias, ó, por mejor decir, de todas las noches. El hábito es causa de la indiferencia y

del

del olvido ; la naturaleza lo ha todo compensado, la facilidad con la pereza, la dificultad con la obstinacion y la eficacia del ingenio. El Indio guarda como un tesoro las tablas astronómicas construidas en climas menos ásperos, pero no las rectifica por el cielo al qual piensa poco. El Persiano vá á dormir en aquellas azoteas, donde la atmósfera siempre quieta, causa un fresco apacible y saludable, donde el cielo convida á velar con la pureza de su azul, con la multitud de sus puntos resplandecientes. Una esfera brillante no le causa sin embargo ni distraccion ni desvelo, mientras el Europeo, especialmente el Europeo del norte, lucha con la inclemencia de las estaciones, multiplica los trabajos y los conatos por un gozo momentaneo, espia el instante en que se abren las nubes, coge la verdad á hurtadillas, y lee en el libro de la naturaleza á hurtadillas del mismo modo que se lee á la luz de los relámpagos.

„Entremos en el observatorio, ya es de noche, sigamos las operaciones del observador, imitemos su silencio. Aquí no debe oirse mas que el débil ruido de la péndola ; no se necesita mas movimiento que el de los astros ; se contemplan menudamente las cosas, se quiere coger el instante pronto á escaparse para no volver nunca jamas:

mas : el pensamiento ha de estar inmobil , y el alma pegada al órgano de la vista. La figura , el tamaño , el lugar , el movimiento , la distancia de los astros , esto es lo que el Astrónomo se propone averiguar.

ERRATAS.

Pag.	Linea.	Dice.	Léase.
6	10	59 41	58 41
7	13	87 53	6 87 53
9	1	el arco *BR*	el arco *AB*
9	11	y de *ADK*	y de *ABDK*
12	5	sen. *B*	sen *BD*
12	25	*CD=BD*	*CB=BD*
14	26	$=\frac{1}{2}$ tang. *A*	$=$tang $\frac{1}{2}$ *A*
14	26	(II. 373)	(II. 371 y 373)
16	15	(27)	(28)
16	17	(II. 397)	(II. 378, y 397)
29	6	dentro de un centro.	dentro de un ángulo
29	10	*PAB*	*PCB*
31	12	el plano	al plano
32	7	*FL*	*FI*
32	23	*DFG*	*DFH*
37	5	*EFB*	*FEB*
37	21	del seno	del coseno
39	22 y 23	el exe mayor y el menor	el exe menor y el mayor
40	11	:: *a* : *b*	:: *b* : *a*
40	20	en arco	un arco
41	23	FN^2	*FN*
42	16	sera $\frac{1}{3}$	sera $\frac{1}{5}$

Pag.

Pag.	Linea.	Dice.	Léase.
42	18	animalia	anomalia
44	17	paralela	perpendicular
49	23	distante	distinto
51	13	*HOR*	*ROR*
53	15	en *A*	en *H*
53	18	en *B*	en *D*
60	6	póngase á la margen	34
60	25	34 á la margen	33
70	18	arregladas	arreglados
72	2	15° 2′ 8″	15° 2′ 28″
72	11	15° 2′ 8″	15° 2′ 28″
105	4	39460356	39474074
106	11	andare	anduviere
120	13	*CH*	*GH*
123	22	que como la	que la
126	11	$dzu = \frac{fdzdt}{udt}$	$du = \frac{fdzdt}{udt}$
141	8	de la tierra	á la tierra
144	ult.	(III. 769)	(III. 752)
145	5	(III. 772)	(III. 757)
145	10	sen. $\frac{1}{2}$ sen ZQ^2	$\frac{1}{2}$ (sen $ZQ)^2$
145	11	(II. 397)	(II. 375
162	7	debaxo esta el	debaxo del
162	23	encima	debaxo
198	10	(54)	(52)
199	6	cot. *PS.*	cos. *PS.*

Pag.

Pag.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
202	11	(III. 84[illegible])	(III. 832)
218	25	(III. 724)	(III. 725)
237	6	*DBA*	*DBAC*
240	13	*P*	*E*
240	21	20″ de latitud	20″ menos de latitud
242	2	parece	parezca
243	13	entre 9 y 6	entre 9 y 6(616)
246	17	Si la estrella se acerca á la estrella	si la tierra se acerca á la estrella
273	5	*SZI*	*QZI*
296	23	*SB*	*AB*
291	á la margen	70	69
298	22	*PR*♈	*P*♈
302	24	suponiendo el movimiento real	movimiento real supuesto
303	11	mas adelantado	menos adelantado
319	6	el vertical en *S*	el vertical en *A*
326	8	(III. 876)	(III. 861)
326	25	*SA*	*SP*
331	24	hasta 7^h	hasta 9^h
339	16	$\frac{6dES}{10 \cos^2 decl\ \Theta}$	$\frac{9dES}{10 \cos^2 decl\ \Theta}$
339	9	(III. 894)	(III. 879)

Pag.	Linea.	Dice.	Léase.
352	12 y 13	del mismo planeta	de la misma órbita
365	9	*TLP*	*PTL*
366	9	*PST*	*LST*
366	21	Del mismo	El mismo
378	16	1616	1686
381	11	la	le
384	17	*ABT*	*ABTC*
385	14	hallaria	hallase
385	14	estacionaria	estacionario
387	14	ver Marte	ver á Marte
391	16	*RKLOR*	*RKOLR*
394	1	se via	se veia
395	22	Keplero	á Keplero
397	17	Apsidas	Apsides
400	15	y el lado que abrazan	y el lado adayacente
402	17	*G*, y *E*	*GA*, y *EA*
407	6	ecliptica	eliptica
410	9	630°	360°
422	19	ege mayor	semiege mayor
423	12	es á la mitad del semiege menor	es al semiege menor
437	5	invervalo	intervalo
445	17	siguientes son	siguientes sean
446	10	comun 1700	comun de 1700
456	2	con este	con esto

Pag.

Pag.	*Lineas.*	*Dice.*	*Léase.*
458	12	esto es, nos parece	esto es en que nos parece
466	16	supuesto de que está	supuesto de que este
473	13	inferior *A*	interior *A*
474	7	Saturno	á Saturno
480	25	modo	lado
483	22	CT	*CS*
491	18	una	en una
493	25	*observada*	observarla
496	20	y *CD*	y *CG*
506	17	que puedan	que pueden
507	4	no es	no sea
508	23	Regulo	á Regulo
511	16	octes	octantes
535	6	ege	semiege
535	6	*E*	*ET*
535	9	*ZMB*	*ZBM*
536	7	eferoide	esferoide
557	18	*ZON*	*ZNO*
560	5	de *O*	de *K*
560	8	*ZOK*	*ZKO*
564	21	á la margen póngase	138
565	3	á la margen	140
566	23	que se reste	que se sume

Pag.	Linea.	Dice.	Léase.
577	5	*ES*	*EA*
584	en la margen	140	144
608	7	a la	en la
615	25	*CM*	*LM*
617	24	el tiempo	la hora
619	6	cuyo ancho *VA*	cuya longitud *VA*
619	10	*OE*	*GE*
621	5	sobre el *TS*	sobre el travesaño *VA*
630	ult.	*C*	*G*
631	8	*CE*	*GE*
631	9	*CF*	*GE*
631	12	semiege menor	ege menor
633	13	*XH*	*XHK*
637	22	El Diámetro	El Radio
638	11	la parte inferior *EHG*	borrese *EHG*
647	10	163	bórrese
656	á la margen	138	158
666	8	$\frac{AM \text{ tang } ED}{\text{tang } ZM}$	$\frac{AM \text{ tang } MD}{\text{tang } ZM}$
666	11	p. sen *ZM* tan *ED*	p. cos *ZM* tan *MD*
681	1	(cuyo complemento	(cuyo suplemento

Pag.

Pag.	Linee.	Dice.	Léase.
692	18	*MCL*	*MCV*
697	2	revolucion	resolucion
699	18	*CX*	*CD*
703	ult.	*QPV*	*EPV*
714	1	vera Venus	vera á Venus
714	9	*VD*	*VB*
717	en la margen	179	176
717	7	$7^h\ 4'$	$7^h\ 14'$
717	enfrente de 9	cítese	figura 177
719	frente de la linea 25	cítese	176
720	23	sobre la linea	sobre el arco
721	26	*BAI*	*BAIB*
723	15	cítese	figura 178
725	2	haya	habia
749	ult.	*IOS*	*ISO*
752	24	57	57°
754	24	Log. de u	Log. de t
758	25	seccion eclíptica	seccion elíptica
761	1	elipses	eclipses
764	6	las	los
771	21	proporcion	proposicion

Pag.	Linea.	Dice.	Léase.
788	á la margen	193 / 194	195
788	20	cítese	193 / 194
794	10	cítese	193
798	21	*SAD*	*SAG*
809	7	14' 60°	14, 60

IN-

INDICE

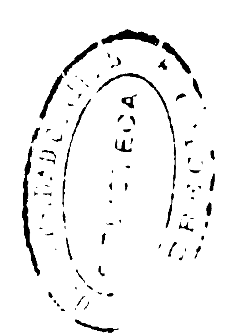
De lo que se contiene en este tomo.

Le-

Del

su-

ELE.



ELEMENTOS DE *ASTRONOMÍA.*

1 AVeriguar los movimientos actuales, pasados, ó venideros de los cuerpos celestes, las circunstancias que los acompañan, y los fenómenos ó apariencias que de ellos resultan, este es el obgeto de la Astronomía; para conseguirlo se vale de la observacion y del cálculo. Entre los cuerpos celestes se reparan unos cuya luz es sumamente viva, que llamamos *Estrellas fijas*, porque no se percibe variacion alguna en la distancia que hay entre ellos. Otros hay que corresponden succesivamente á diferentes puntos de la concavidad del firmamento, variando tambien la situacion en que están unos respecto de otros, su luz es menos viva que la de las estrellas, y se les dá el nombre de *Planetas primarios.* Llámanse así para distinguirlos de otros planetas, que siguen y acompañan á algunos de ellos, de los quales parece que tienen alguna dependencia, por cuya razon se llaman *Planetas secundarios* ó *Satélites* de los principales.

2 Señala, pues, la misma naturaleza de los cuerpos celestes el orden que hemos de seguir en estos Elementos; quiero decir, que nos tocaría tratar primero de las estrellas, despues de los planetas primarios, y últimamente de sus satélites. Pero como el sol, sobre ser el mas reparable de los astros que conocemos, parece que ocupa el

centro del movimiento de los planetas primarios, es acreedor á que se trate separadamente quanto pertenece á sus apariencias. Y como los planetas en el discurso de sus revoluciones, llegan á estar en tal situacion que se obscurecen unos á otros, interceptando la luz con que los baña el sol, de donde resultan los *Eclipses*, ocupará tambien este asunto un lugar separado. Finalmente, para completar en lo que cabe este tratado, añadiremos lo que se pudiere acerca de los *Cometas*.

Es, pues, mi ánimo tratar 1.° De las Estrellas fijas. 2.° Del Sol. 3.° De los Planetas principales. 4.° De los Planetas secundarios. 5.° De los Eclipses. 6.° De los Cometas.

3 Con la mira de desempeñar este plan con la claridad que deseamos, ventilaremos por via de preliminar algunos puntos indispensables para la cabal inteligencia de los ramos que componen el dilatado y curioso asunto que abraza.

Preliminares.

4 I. Llegó yá el caso de hacer mucho uso de ambas Trigonometrías, y de apelar con frecuencia á las propiedades de la Elipse, que tambien hace gran papel en las investigaciones astronómicas. Pero como en lo que dejamos declarado en los Tomos antecedentes acerca de los espresados puntos, omitímos algunas proposiciones que tienen su principal aplicacion en este tratado, las daremos el primer lugar en estos preliminares, despues que hubiéremos decla-

clarado el cálculo de las partes *Sexágesimales.*

5 II. Los movimientos de los astros se refieren á los círculos que han imaginado los Astrónomos en la concavidad de la bóveda celeste, cuyo conjunto forma lo que llaman la *Esfera*, de la qual es una representacion un instrumento muy vulgar conocido con el mismo nombre; y no es posible se haga cargo de las apariencias celestes el que no estuviere enterado de los círculos de la esfera, de sus usos y origen.

6 III. Un punto esencialísimo para el que se dedica al estudio de la Astronomía, es saber, si puede, el verdadero systema planetario, esto es, cómo están colocados los planetas respecto del sol, y respecto unos de otros; y quando no le pueda averiguar, debe indagar por lo menos quál es entre los systemas del mundo inventados hasta el dia de hoy el que tiene á su favor, ó mas Astrónomos acreditados, ó mas naciones ilustradas, ó mayores argumentos, ó dá mayor facilidad para esplicar los fenómenos que reparamos en el Cielo.

7 IV. La luz que nos hace perceptibles los astros, padece al entrar en la atmósfera refracciones que alteran sus apariencias. Es por lo mismo indispensable llevar en cuenta la cantidad de esta alteracion, y saberla determinar para no equivocar la realidad con la apariencia.

8 V. Todos los movimientos celestes se reducen para mayor uniformidad al centro de la tierra; quiero decir, que se supone el observador no en la superficie de la tierra

donde está á la verdad, sino en el centro mismo de nuestro globo. La diferencia que vá de la superficie al centro de la tierra causa en las observaciones una ilusion conocida con el nombre de *Paralaxe*, á la qual se debe atender para egecutar la espresada reduccion.

Del Cálculo de las partes sexagesimales.

9 Se ofrecen con frecuencia en la Astronomía operaciones donde se han de calcular horas y partes de la hora, grados, y partes del grado. Este cálculo se llama *Cálculo de las partes sexagesimales*, porque las partes de la hora, del mismo modo que las del grado, ván menguando en proporcion sexagécupla. Pero estas subdivisiones suelen no pasar de terceros, y aun en lugar de los terceros se substituyen décimas de segundo por calcularse estas décimas de segundo con mas facilidad que los terceros. Así $3^{h}\,5'\,15''\,4$, son tres horas, cinco minutos, quince segundos, y quatro décimas de segundo, que son lo mismo que $24'''$; con esto queda declarado como se ha de leer esta cantidad $2^{\circ}\,1'\,50''\,2$.

10 La adicion y sustraccion de estas partes es sencillísima, y se egecuta del mismo modo, sin variar en nada, que la de los números complexos que declaramos en la Arismética. Se echa de ver que

su-

sumando	3^h	$5'$	$15''$	4.
con	2	1	50	2
la suma será	5^h	$7'$	$5''$	6.

y que si de	5^h	$7'$	$5''$	6.
restamos	2	1	50	2
la resta será	3^h	$5'$	$15''$	4.

11 Por lo que mira á la multiplicacion y division de las cantidades sexagesimales, se seguirá el mismo método que para multiplicar y dividir unas por otras cantidades decimales. *Los egemplos bastarán* para manifestar la práctica de este método, cuyos fundamentos son de suyo muy evidentes.

I. Supongamos que se nos ofrezca multiplicar $3^\circ\ 15'\ 38''$ por $2^\circ\ 18'\ 47.''$ Multiplicaremos 1.° cada número del multiplicando por $47''$ del multiplicador; el producto de $38''$ por $47''$ dará 1786^{IV} (I. 123); como cada quarto consta de $60'''$, divido 1786 por 60, y saco el cociente $29'''$, y la resta $46.^{IV}$ Escribo al producto estos 46^{IV}, y guardo los $29'''$ para el uso que diremos luego. 2.° Multiplico la cantidad $15'$ del multiplicando por $47''$ del multiplicador, el producto será $705'''$, á los quales añado los $29'''$ de la operacion antecedente; divido la suma $734'''$ por 60, saco el cociente $12''$, y la resta $14'''$; escribo los $14'''$, y guardo los $12''$ para la operacion siguiente. 3.° Multiplico 3° por $47''$, saco el producto $141''$, añádoles los $12''$ de la operacion antecedente, y ha-

hallo 153''; divídolos por 60, y saco el cociente 2', y el residuo 33''; escribo, pues, al producto 33'' y 2'. Basta esto para dar á conocer como se ha de proseguir la operacion hasta concluirla. Despues de finalizada se hallarán todos los productos parciales cuya suma será el producto total que se busca.

Multiplico..................			3°	$15'$	$38''$
por..............................			2	18	47
		$2'$	$33''$	$14'''$	46^{IV}
productos parciales		59	41	24	
	6°	31	16		
producto total....	7°	$32'$	$30''$	$38'''$	46^{IV}

Si quisiésemos sacar el producto hasta los segundos no mas, escribiríamos $7^{\circ}\ 32'\ 31''$, añadiendo una unidad á los segundos por la misma razon que dimos (I. 131) respecto de las decimales.

II. La division de las sexagesimales se egecuta, conforme hemos dicho, del mismo modo que la de las decimales, sin mas diferencia que la de practicar en la multiplicacion del cociente por el divisor todo lo mandado poco ha para la multiplicacion de las sexagesimales; y quando la primera especie del dividendo fuere menor que la primera especie del divisor, se la deberá reducir á la especie inmediatamente menor, y añadirla á la que se siguiere, para que en virtud de esto se pueda egecutar la division.

Supongamos que se nos ofrezca dividir $7^{\circ}\ 32'\ 30''$ $38'''$

$38'''\ 46^{IV}$ por $2^\circ\ 18'\ 47''$. Buscaremos quantas veces 2 cabe en 7, y escribiremos 3° al cociente. Multiplicaremos 3° por $2^\circ\ 18'\ 47''$, y el producto $6^\circ\ 56'\ 21''$ le restaremos de $7^\circ\ 32'\ 30''$, y quedará el residuo $36'\ 9''$; añadiremos á este residuo la especie siguiente $38'''$, y proseguiremos la division hasta rematarla, conforme vá pintada. Fig.

7°	$32'$	$30''$	$38'''$	46^{IV}	$2^\circ\ 18'\ 47''$
6	56	21			$3^\circ\ 15'\ 38''$
	36	9	38		
	34	41	45		
	1.	27	53		
		87	53	46	
		87	53	46	
		0	0	0	

Proposiciones Trigonométricas.

12 Los senos hacen mucho papel en la Astronomía, y substituyen en muchísimos cálculos por los arcos á que pertenecen. Supongamos que un Planeta ande una orbita *APBD* al rededor del centro *C*, y que esté en *O* el observador que quiere enterarse de su movimiento. El Planeta, al apartarse de la linea de los centros *A*, trazará un arco *AP*, al observador le parecerá que no se habrá apartado de la linea de los centros sino la cantidad *PE*, que es el seno del arco *AP* andado por el Planeta. Quan- 1.

Fig. do hubiere andado 90° ó *AB*, se hallará á la distancia máxima del centro *C* respecto del observador, porque el mismo radio ó seno total *BC* será la distancia aparente del planeta al centro *C*, en el supuesto de que el observador esté á una distancia sumamente grande del planeta. En pasando del punto *B* parecerá que vuelve á la linea de los centros, porque los senos como *FG*, menguarán del mismo modo que fueron creciendo en el primer quadrante de círculo *AB*, hasta que llegado el planeta á *D*, siendo de 180° el arco que hubiere andado, el seno ó la perpendicular desaparezca como en *A*.

Pasando el planeta al otro lado de la línea de los centros mas allá del punto *D*, el seno que fue menguando hasta cero, vuelve á crecer en la otra direccion, con los mismos incrementos que en el primer quadrante.

13 Son, pues, en este caso los senos, y no los arcos andados por el planeta, la medida de su movimiento observado desde el punto *O*. Se hace preciso en estos casos acudir á las tablas de los senos, para averiguar á qué distancia parecerá el planeta respecto de la linea de los centros *OACD* en diferentes tiempos de su revolucion ó en diferentes grados de su orbita.

14 Convendrá tener presente en todo el discurso de esta obra lo que dejamos demostrado (II. 360 &c.) acerca de los senos y cosenos; es á saber, que los senos mudan de signo en el tercero y quarto quadrante del círculo, y los cosenos en el segundo y tercer quadrante.

Tam-

15 Tambien recordaremos que quando el arco *BR* pasa de 90°, la tangente *AT* muda de signo, bien que esté del mismo lado que el seno, porque el punto de concurso *T* de la tangente *AT*, y del radio *CT* cae al lado opuesto, hallándose sobre el radio prolongado mas allá del centro. Fig. 1.

16 Para hallar el seno de un arco *ABDK* que pasa de 180°, basta quitarle 180°, y tomar el seno del arco *DK*, porque el seno de dos grados es el mismo que el seno de 182°, conforme lo está diciendo la figura, donde la linea *KG* es el seno de *DK*, de *KA*, y de *ADK*. Por consiguiente quando una cantidad varía como los senos, es nula á los 180°, y vuelve á crecer pasados los 180° del mismo modo que crecia ácia cero; por la misma razon el seno de 380°, es el mismo que el seno de 20°.

17 Conviene volver á decir igualmente que los senos son y se deben considerar como quebrados del radio. Las tablas de los senos no son en realidad (I. 648) mas que series de fracciones decimales, cuya unidad es el radio ó seno total, esto es el seno de 90°. Hallamos, por egemplo, en las tablas que para 90° el seno es 100, y que para 30° es 50, ó la mitad de 100; podremos, pues, decir que el seno total es 1, y que el seno de 30° es $\frac{1}{2}$ ó 0,5 para darle la forma de decimal. Asimismo, el seno de 10° será 0,17 ó $\frac{17}{100}$ del radio ó del seno total considerado como unidad.

18 Luego siempre que una cantidad fuere multipli-

ca-

Fig. cada por un seno, como quando decimos $2''$. sen $30°$, esta espresion significa que los $2''$ son multiplicados por un quebrado, cuyo quebrado, es á saber sen $30°$, es un medio, porque siempre se supone que dicho seno se refiere al seno total cuya parte es.

1. Supongamos que la distancia máxima de un Planeta al centro *C*, ó el radio *CB* sea de $20''$, podremos decir en general que su distancia aparente *PE* vista desde la tierra en otra posicion qualquiera de su orbita es igual á $20''$. sen *AP*. Con efecto, quando el seno del arco *AP* ó la perpendicular *PE* fuere la mitad de *BC*, la distancia *PE* parecerá de $10''$ no mas, porque $20''$. sen *AP*, serán $20''$ multiplicados por un medio; quando el seno *AP* fuere la décima parte del radio, $20''$. sen *AP* será $2''$ ó la décima parte de $20''$. Este es el modo corriente hoy dia de considerar los senos; y añadiremos que lo propio se estila con los cosenos, así $20''$ cos $60° = \frac{20''}{2} = 10''$, porque cos $60°$ = sen $30°$ es lo mismo que $\frac{1}{2}$.

19 Por lo que mira á las tangentes, no son fracciones verdaderas sino hasta $45°$ (I. 643); mas allá de los $45°$ son números mayores que la unidad. Así $20''$ tang $56° \; 19' = 30$, porque la tangente de $56° \; 19'$ es igual á $1\frac{1}{2}$, conforme se verifica por medio de las tablas de los senos.

2. 20 Acerca de los senos tenemos que hacer otra prevencion muy esencial. Si en un triángulo rectángulo *ABC* tomamos por radio la hypotenusa *AB*, podremos espresar el

el lado BC con AB. sen A, y el lado AC con AB. cos A. Fig. Porque R : sen A :: AB : BC (I. 664), ó 1 : sen A :: AB : BC, una vez que siempre consideramos el radio como unidad; luego $BC = \frac{AB \cdot \text{sen} A}{1} = AB$. sen A. Tambien tenemos (I. 664) 1 : cos A :: AB : AC, esto es, $AC = AB$. cos A. Si sobre el radio AB trazamos un arco de círculo DBG, será patententemente BC el seno del arco BD; $AC = BE$ es el seno del arco BG ó el coseno del arco BD, ó del ángulo A. Por consiguiente si el seno BC del ángulo A fuese la mitad del radio BA, sería $BC = \frac{1}{2} AB$; luego en general sea BC la fraccion que se quisiere del radio AB, su espresion será AB. sen A, pues sen A, segun dejamos dicho atrás, no es mas que un quebrado del radio, ó lo que es lo propio, el radio multiplicado por un quebrado. Queremos decir finalmente que la perpendicular de un triángulo rectángulo es igual á la hypotenusa multiplicada por un quebrado, cuyo quebrado se halla en las tablas de los senos.

21 Hay otra espresion de los senos que es muy usada; por egemplo, el seno del ángulo A, ó del arco $BD = \frac{BC}{BA}$; esta espresion viene á ser la misma que se saca de lo dicho (I. 664), porque AB es á BC como el radio es al seno del arco BD; y como siempre hacemos el radio $= 1$, tendremos AB : BC :: 1 : sen BD; luego sen $BD = \frac{BC}{AB}$. Lo propio se probará respecto de los cosenos y de las tangentes.

22 Síguese de aquí que si una misma linea recta corres-

Fig. respondiere á dos arcos de diferentes radios, los quebrados que en las tablas espresan los senos de dichos arcos, estarán en razon inversa de los radios. Porque como sen BD es igual á BC dividida por el radio, si fuere BC una misma, siendo otro el radio, sen B crecerá tanto mas quanto mas menguare el radio.

23 Por lo probado (II. 379) sen $2A =$ 2 sen A. cos A, y cos $2A =$ cos A^2 — sen A^2; luego tang $2A \left(= \frac{\text{sen } 2A}{\cos 2A} \text{ (II. 367)}\right) = \frac{2 \text{ sen } A \cdot \cos A}{\cos A^2 - \text{sen } A^2}$.

3. Sea un arco $KD = KG = A$, y $RK = B$; si despues de divididos RG y RD en dos partes iguales en S y P, tiramos las tangentes RM, RL, tenemos $RM =$ tang $\frac{1}{2}(A + B)$, $RL =$ tang $\frac{1}{2}(A - B)$. Como el ángulo RHG tiene por medida la mitad de RG, será igual al ángulo RCM, luego los triángulos rectángulos GIH, CRM son semejantes; luego $IH : IG :: CR : RM$, ó cos $A +$ cos B : sen $A +$ sen B :: 1 : tang $\frac{1}{2}(A + B)$. Los triángulos semejantes IGR, CRL dán tambien $IG : IR :: CR : RL$ ó sen $A +$ sen B : cos $B -$ cos A :: 1 : tang $\frac{1}{2}(A - B)$. Por consiguiente $\frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\cos A + \cos B} =$ tang $\frac{1}{2}(A + B)$, y $\frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\cos B - \cos A}$ $=$ cot $\frac{1}{2}(A - B)$, dividiendo la primera equacion por la segunda, $\frac{\cos B - \cos A}{\cos A + \cos B} =$ tang $\frac{1}{2}(A + B)$ tang $\frac{1}{2}(A - B)$.

Si llamamos n la tangente de un arco KR, la cosecante de su duplo, ó CB será $= \frac{1 + n^2}{2n}$. Porque como KR $= RP$, el ángulo $RCB = BDC$. Luego $CD = BD =$ $AD - AB =$ cot KR — cot $2KR = \frac{1}{n}$ — cot $2KR$. Pero quando la tangente es n, la cotangente del duplo

es

es (II. 410) $\frac{1-n^2}{2n}$; luego $CB = \frac{1}{n} - \frac{1-n^2}{2n} = \frac{1+n^2}{2n}$. Fig.

24 Sean $QARFQ$, $MKLNM$ dos círculos concén- 4.
tricos; NQM, una tangente del círculo interior en el punto Q; NE, una perpendicular; QR, una linea tirada á arbitrio en el círculo menor; NK, una linea tirada desde el estremo N de la linea MQN, paralelamente á QR; y NL, otra linea que forma un ángulo LNE igual al ángulo ENK, con la linea NE paralela al diámetro QCF; será $NK + NL = 2QR$.

Porque NK es el duplo del seno de la semisuma de los *arcos* NE *y* EK, NL es el duplo del seno de su semidiferencia; tenemos, pues, sen $\frac{1}{2}NL$ = sen ($\frac{1}{2}NLE - \frac{1}{2}LE$); luego tendremos (I. 655) sen $\frac{1}{2}NL$ = sen $\frac{1}{2}NLE$. cos $\frac{1}{2}LE$ — sen $\frac{1}{2}LE$. cos $\frac{1}{2}NLE$, sen $\frac{1}{2}NLEK$ = sen ($\frac{1}{2}NE + \frac{1}{2}EK$) = sen ($\frac{1}{2}NLE + \frac{1}{2}LE$) = sen $\frac{1}{2}NLE$. cos $\frac{1}{2}LE$ + sen $\frac{1}{2}LE$. cos $\frac{1}{2}NLE$. Luego *la suma* de los dos senos de $\frac{1}{2}NL$ y $\frac{1}{2}NK$ = 2 sen $\frac{1}{2}NLE$. cos $\frac{1}{2}LE$, y la suma de las dos cuerdas NL y NK = 4 sen $\frac{1}{2}NE$. cos $\frac{1}{2}LE$. Pero $QO = CQ$. cos CQO (20) = CQ. cos $\frac{1}{2}FR$ = CQ. cos $\frac{1}{2}LE$, $QR = 2CQ$. cos $\frac{1}{2}LE$, y por ser $CQ = \frac{1}{2}NE$ = sen $\frac{1}{2}NLE$, QR = 2 sen $\frac{1}{2}NLE$. cos $\frac{1}{2}LE$, $2QR$ = 4 sen $\frac{1}{2}NLE$. cos $\frac{1}{2}LE$, esto es, lo propio que la suma de las dos cuerdas; por consiguiente $NK + NL = 2QR$.

25 Síguese de aquí que si los dos círculos propues- 5.
tos se transformáran en elipses, se verificaría la misma propiedad.

Por-

Fig. Porque si en los planos de las dos elipses inclinamos círculos cuyos diámetros sean iguales con los eges mayores de las elipses, y el seno de la inclinacion es al seno total, como el ege menor de cada elipse es al ege mayor, cuya circunstancia se verifica siempre que los espresados círculos se mueven al rededor de la misma linea, se podrán considerar, conforme se probará mas adelante, las elipses como las proyecciones de dichos círculos, y las
4. lineas *QR*, *NK* formarán con sus proyecciones lineas que tendrán una con otra la misma razon. Porque todas las lineas menguarán en la direccion del ege menor, en la razon del seno total al seno de la inclinacion; luego se verificará en las elipses lo mismo que se verifica en los círculos, y tendremos $NK + NL = 2QR$.

26 Sea un triángulo rectángulo *MPF*, cuyo ángulo
6. *PFM* que llamaremos A, esté dividido por medio; la tangente de la mitad del ángulo *PFM* será igual á $\frac{PM}{PF + FM}$.

Pruébase en virtud de la proporcion (II. 375 n. 2) $1 + \cos A : \operatorname{sen} A :: 2 : 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$, de la qual se saca con facilidad $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A}$.

Una vez que $1 = \cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A$ (II. 379), sacaremos $1 - \cos^2 A = \operatorname{sen}^2 A$; como $1 - \cos^2 A = (1 + \cos A).(1 - \cos A)$, tambien tendremos $\operatorname{sen}^2 A$ ó $\operatorname{sen} A . \operatorname{sen} A = (1 + \cos A) \times (1 - \cos A)$, y de aquí inferiremos finalmente $\frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A}$. Luego tambien será $\frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} A$. Y de lo probado (II. 373) se saca que $\cot A = \frac{1}{\operatorname{sen} A} - \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$.

En

27 En un triángulo rectilineo qual es FOM, en el qual se conocen dos lados FO y FM, y el ángulo que forman OFM, el tercer lado OM es igual á $\sqrt{((FO)^2 - 2OF.FM.\cos F + FM^2)}$. Fig. 6.

Porque bajando la MH perpendicular al lado FO prolongado hasta H, será $FH = FM.\cos F$, y $OH = FM.\cos F - FO$; tambien será $MH = FM.\text{sen } F$; luego $(MO)^2 = FM^2.\cos F^2 - 2FM.FO.\cos F + FO^2 + FM^2.\text{sen } F^2$. Pero $\text{sen } F^2 + \cos F^2 = 1$; luego $MO^2 = FM^2 + FO^2 - 2FM.FO.\cos F$, y $MO = \sqrt{(FM^2 + FO^2 - 2FM.FO.\cos F)}$.

28 Si consideramos los triángulos TDE, TAN, probaremos facilísimamente 1.° que $TN : AN :: TE : ED$: esto es, que el radio es á la tangente de un arco como el coseno es al seno. 2.° que $TA = \sqrt{(TN^2 + AN^2)} = \sqrt{(1 + tt)}$, llamando t la tangente AN. 3.° que $TA : AN : TD : DE$, ó $\sqrt{(1 + tt)} : t :: 1 : \text{seno}$; luego el seno $= \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}$. El coseno que es igual al seno dividido por la tangente será $\frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$. 7.

29 Veamos qué diferencia vá de la hypotenusa de un triángulo esférico rectángulo al lado mayor, en el supuesto de que el ángulo chico no pase de 8 ó 10 grados; por manera que dicha diferencia sea un arco sensiblemente igual con su tangente.

Sea el triángulo esferico BCD rectángulo en D, en el qual hemos de averiguar qué diferencia vá de BC á BD. Por decontado tenemos (III. 699) $R : \cos B :: \text{tang } BC$: 8.

tang

Fig. tang BD; luego tang $BD = \cos B \cdot \tan BC$; y si llamamos s el seno verso del ángulo B; $1 - s$, su coseno; z, la tangente del arco BC, tendremos tang $BD = (1 - s)z$; luego la tangente de la diferencia que vá del arco BC al arco BD, ó la diferencia misma, si fuere muy corta, é igual con su tangente, será (II.408) $\frac{z-(1-s)z}{1+z(1-s)z} =$ $\frac{sz}{1+zz-szz} = \frac{sz}{(1+zz)\left(1-\frac{szz}{1+zz}\right)}$; pero $\frac{1}{1-\frac{szz}{1+zz}}$, egecutando la division, es $= 1 + \frac{szz}{1+zz}$; porque se pueden omitir (II.183) los términos siguientes por razon de la pequeñez de s y de $\frac{szz}{1+zz}$. Luego la diferencia de los dos arcos BC y BD es $\frac{sz}{1+zz}\left(1+\frac{szz}{1+zz}\right)$ ó $\frac{sz}{1+zz} + \frac{sz \cdot szz}{(1+zz)(1+zz)} = \frac{sz}{\sqrt{(1+zz)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}} + \frac{ss \cdot zz}{1+zz} \cdot \frac{z}{\sqrt{(1+zz)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$. Pero quando z es la tangente de un arco BC que llamamos A, su seno es $\frac{z}{\sqrt{(1+zz)}}$, y $\frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$ es su coseno (27); luego la diferencia de los arcos BC y BD será $s \cdot \cos A \cdot \text{sen } A + s^2 \cdot \text{sen } A^2 \cdot \text{sen } A \cdot \cos A$; y resolviendo estos productos (II. 397) sacaremos $\frac{1}{2} s \cdot \text{sen } 2A + \frac{1}{4} s^2 \cdot \text{sen } 2A - \frac{1}{8} s^2 \cdot \text{sen } 4A$.

Si se baja un arco DK perpendicular á BC, será BK menor que BD, por la misma razon que BD es menor que BC. Por consiguiente la diferencia entre BC y BK, ó el arco CK será sensiblemente dupla de la reduccion, particularmente si el ángulo B fuere muy chico, será, pues, igual á $s \cdot \text{sen } 2A$.

39 Por el mismo método hallaremos una espresion del co-

coseno de CD, que necesitaremos en los cálculos de la teórica de la luna. Fig.

Sea TNS el plano de la eclíptica, y TNV el plano de la orbita de la luna, al qual se bajará desde el centro S del sol la perpendicular SV. Supongamos las SN y VN perpendiculares á TN, el ángulo SNV será igual á la inclinacion de los dos planos (I. 531), el ángulo STV será igual á la latitud del sol respecto de la orbita de la luna; $\frac{TV}{TS}$, será su coseno (21). Si hacemos $TN = 1$, $NS = z$, cos $SNV = 1 - s$, tendremos $TS = \sqrt{(1+zz)}$, $NV = (1-s)z$, porque $R : \cos N :: NS : NV$ (20); luego la hypotenusa $TV = \sqrt{[1 + (1-s)^2 zz]} = \sqrt{[1 + zz - (2s - ss)zz]} = \sqrt{(1+zz)} \times \sqrt{\left[1 - \frac{(2s-ss)zz}{1+zz}\right]}$; luego $\frac{TV}{TS} = \sqrt{\left[1 - \frac{(2s-ss)zz}{1+zz}\right]}$; y reduciendo este radical á serie (II. 107) será $= 1 - \frac{(s-\frac{1}{2}s^2)zz}{1+zz} - \frac{\frac{1}{2}s^2 z^4}{(1+zz)^2}$. Pero quando z es la tangente de un ángulo STN, que llamaremos A, su seno es $\frac{z}{\sqrt{(1+zz)}}$, y su coseno $\frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$ (28); luego $\frac{z}{1+zz} =$ sen A . cos $A = \frac{1}{2}$ sen $2A$, y $\frac{z^4}{(1+zz)^2} =$ sen $A^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{8}\cos 4A$ (II. 397); luego $\frac{TV}{TS}$, ó el coseno del ángulo STV, es á saber, el coseno del lado menor de un triángulo esférico, cuya hypotenusa fuese A y $1-s$ el coseno del ángulo menor, será $= 1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{16}s^2 + \frac{1}{2}s \cdot \cos 2A - \frac{1}{16}s^2 \cdot \cos 4A$. 9.

31 Quando en un triángulo rectilineo rectángulo STN, se supone muy pequeño el ángulo T, la diferencia 9.

Fig. que vá del lado mayor *TN* á la hypotenusa *TS*, es igual á la mitad del quadrado de la fraccion que espresa *SN* respecto de *TN*.

Sea $TN = 1$, $SN = \alpha$, de modo que α sea un quebrado muy pequeño de la unidad ó de *TN*; tendremos $(TS)^2 = 1 + \alpha^2$, y elevando $1 + \alpha^2$ á la potencia $\frac{1}{2}$ (II. 107), sacaremos $TS = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2$, desechando los demás términos por ser mucho menores que α^2. Si, por egemplo, *SN* fuese $\frac{1}{10}$ de *TN*, será $\frac{1}{100}$ de *TN* el exceso que la hypotenusa *TS* llevará al lado *TN*. Síguese de aquí que si *SN* fuese infinitamente pequeña respecto de *TS*, la diferencia que hubiere entre *TS* y *TN* será un infinitamente pequeño de segunda orden, y se podrá despreciar.

7. 32 Si los senos *BC* y *DE* de dos arcos *BN* y *DN* están en razon constante, sus cosenos estarán en razon compuesta de la de sus senos, y de la razon inversa de las cortas variaciones de los mismos arcos.

Supongamos que *BF* y *DH* son las variaciones infinitamente pequeñas que dichos arcos esperimentan, de modo que *BC* esté infinitamente próxima á *FL*, y *DE* infinitamente próxima á *HM*. Por lo probado (III. 352) tenemos $DH : DI :: TD : TE$, y $BG : BF :: TC : TB$ ó TD; luego $\frac{TC}{TE} = \frac{DH.BG}{DI.BF}$; pero $\frac{BG}{DI} = \frac{BC}{DE}$; pues una vez que los senos permanecen en la misma razon, sus incrementos les son proporcionales; luego $\frac{TC}{TE} = \frac{BC}{DE} \cdot \frac{DH}{BF}$.

6. 33 Si dadas dos cantidades desiguales *MP*, *PF*, hacemos esta proporcion: la menor es á la mayor, como el

ra-

radio es á la tangente de un ángulo *PMF*, y restamos Fig.
45° del ángulo *PMF*, haciendo $PN = PM$, y tirando la linea *MN*, el radio será á la tangente del residuo ó de *NMF*, como la suma de las dos cantidades es á su diferencia. Tirando por el punto *F* una perpendicular *FI* á *MN* prolongada hasta *I*, y la *MD* paralela á *PF*, será *MD* la suma de las dos cantidades, cuya diferencia es *FN*; pero *DM* : *FN* :: *ID* : *IF*; luego &c.

34 En un triángulo *BGH*, cuyo ángulo *B* es infinita- 10.
mente pequeño, y *BH* un lado infinitamente pequeño, *GH* siempre será un infinitamente pequeño de segunda orden.

Si tomáramos una cantidad finita como *BL*, el arco *KL* que mide el ángulo *B* sería de la misma orden, esto es, un infinitamente pequeño de primera orden; pero *BH* es infinitamente mas pequeño que *KL*, luego *GH* es infinitamente mas pequeño que *KL*, ó que el ángulo *B* cuya medida es *KL*; luego si el ángulo *B* es infinitamente pequeño, igualmente que el lado *BH*, la linea *GH* será un infinitamente pequeño de segunda orden.

35 Si al ángulo *B* que es infinitamente pequeño de primera orden, se le añadiera un infinitamente pequeño de segunda orden, no resultaría en *GH* mas que un infinitamente pequeño de tercera orden.

Porque una vez que *B*, infinitamente pequeño de primera orden, no ha producido en *GH* mas que un infinitamente pequeño de segunda orden; si se le añade un infinitamente pequeño de segunda orden, no resultará en *GH* mas que un au-

Fig. mento infinitamente menor, esto es, de tercera orden.

36 Tambien es de considerar que *BG* no discrepa de *BH* sino una cantidad infinitamente menor que *GH*.

Porque si tomamos *BG* por seno total, *BH* será el coseno del ángulo *B*; pero el coseno de un arco infinitamente pequeño discrepa del radio una cantidad infinitamente menor que el arco (48), ó que respecto del radio es un infinitamente pequeño de segunda orden; luego en el supuesto de ser *GH* perpendicular á *BH*, *BG* solo discrepa de *BH* un infinitamente pequeño de tercera orden, si fuere *BG* un infinitamente pequeño.

11. 37 Síguese de aquí que si se tira una tangente *PA* á un arco *PB* infinitamente pequeño, el corto desvío de la tangente, ó la cantidad *AB* no discrepará del seno verso *PC* del arco *PEB*, sino una cantidad infinitamente menor que *AB*.

Tírese la *BG* paralela é igual á *PC*; el ángulo *ABG* = *PSA* es infinitamente pequeño; luego las lineas *AB* y *BG* discrepan una cantidad infinitamente menor que *AG*, esto es, infinitamente pequeña de segunda orden respecto de *AB*, é infinitamente pequeña de quarta orden, dado caso que *AB* fuese un infinitamente pequeño de segunda orden.

38 Dos cantidades finitas, que solo discrepan una de otra un infinitamente pequeño son iguales, aun en el cálculo diferencial. Porque el cálculo diferencial solo considera las relaciones que tienen unas con otras las cantidades infinitamente pequeñas; por consiguiente aunque una cantidad infinitamente pequeña no se pueda desechar respecto

de

de otra de su misma especie, es sin embargo nula respecto Fig.
de una cantidad finita.

Sea un triángulo rectilíneo BKL rectángulo en K, cuyo 10.
ángulo B, y el lado KL son infinitamente pequeños, el ángulo L solo discrepa del ángulo recto la cantidad del ángulo infinitamente pequeño B; en virtud de esto, se le puede tomar por un ángulo recto, sin que de aquí resulte falta de exactitud en el cálculo de los infinitamente pequeños. Para hacerlo patente, tiraremos LD paralela á BK, y ED paralela é igual con KL, será $ED = KL$, ora se tome el ángulo DLK que es evidentemente un ángulo recto, ora se tome el ángulo FLK que discrepa del ángulo recto un ángulo infinitamente pequeño FLD. Porque la linea EF no discrepa de ED sino una cantidad FD que es una cantidad infinitamente pequeña de segunda orden (34), y por lo mismo despreciable aun en el cálculo diferencial.

39 Lo propio se verifica en los triángulos esféricos. 12.
Porque estando el arco CBF infinitamente próximo al arco CEG, si tiramos la BE perpendicular á CB, tambien será perpendicular á CE, porque el ángulo E solo discrepará del ángulo B un infinitamente pequeño, y lo que podrá resultar en las razones de las cantidades infinitamente pequeñas quales son ED, DB, BE, no será mas que un infinitamente pequeño de segunda orden.

40 Siendo AP un arco infinitamente pequeño, será 1.
su senoverso $AE = \frac{AP^2}{AD}$.

Porque la propiedad del círculo dá $EP^2 = AE . ED$;

Fig. luego $AE = \frac{EP^2}{ED}$; pero una vez que AE es infinitamente pequeña, ED es lo mismo que $ED + EA$ (II. 183); luego $AE = \frac{EP^2}{AD}$; en lugar de EP, podemos substituir el arco AP, que discrepa de él un infinitamente pequeño de tercera orden.

11. Si suponemos infinitamente pequeño el arco PB, tendremos $PC = \frac{PB^2}{2PS} = BG$. Pero segun hemos probado (37), BG no discrepa de AB; luego el desvío de la tangente, ó la linea $AB = \frac{PB^2}{2PS}$, que es un infinitamente pequeño de segunda orden.

41 La eleccion de las unidades, ó el uso de las equaciones que no espresan mas que razones, coadyuva mucho para simplificar los cálculos. Manifestemos, pues, los fundamentos de esta práctica.

Toda proporcion se puede poner en forma de equa-
11. cion; si fueren, por egemplo, PE y PB dos arcos muy pequeños, tendremos esta proporcion $PD : PC :: PE^2 : PB^2$ (40), de donde inferiremos la equacion $PC = \frac{PD \cdot PB^2}{PE^2}$. Supongamos que la abscisa PD sea de una linea, y el arco PE de un segundo, y queramos valuar todas las abscisas como PC en lineas, y todos los arcos PB en segundos; tendremos $PD = 1$, y $PE = 1$, luego la equacion antecedente $PC = \frac{PD \cdot PB^2}{PE^2}$ se transformará en esta $PC = PB^2$, que está diciendo que quando PB fuere de dos segundos, ó igual á 2, la abscisa PC será $= PB^2$, ó igual á 4, quiero decir, de 4 lineas, y así de los demás valores de PC. Luego en virtud de haber tomado PD por unidad

de

de las abscisas, y PE por unidad de los arcos, tendremos Fig. $PC = PB^2$, bien que la linea PC sea heterogenea con el arco PB ó de distinta especie.

42 Quando ocurre comparar unos con otros tiempos t y T, espacios e y E, velocidades u y V, se debe tener presente (IV. 26) que el espacio e está con el espacio E en razon compuesta de la velocidad u á la velocidad V, y del tiempo t al tiempo T, y que por lo mismo $e : E :: ut : VT$. Luego si tomamos el tiempo t de un segundo por unidad, el espacio e de un pie por unidad de los espacios, y la velocidad u de un pie por segundo por unidad de las velocidades, tendremos $E = T . V$, cuya equacion nos está diciendo, que quando la velocidad V fuere de dos pies por segundo, el tiempo T de dos segundos, será el espacio E de 4 pies. Espresa, pues, la equacion $E = TV$ la razon que hay entre E y e, por medio de la que hay entre tu y TV; porque viene á ser la misma que $\frac{E}{e} = \frac{TV}{tu}$, esta equacion señala la igualdad entre la razon de los espacios E, e, y el de los productos TV, tu de la velocidad y del tiempo. Luego la equacion $E = TV$ es tan exacta como la otra, una vez que se supone que las letras E, T, V espresan una fraccion de una unidad determinada de espacio, de tiempo, y de velocidad.

43 Una misma fraccion puede referirse á distintas unidades, con mudar el número de las partes; dos lineas son $\frac{1}{6}$ de pulgada; si queremos que sean quebrados de pie ó de 12 pulgadas, se las multiplicará por 12, y saldrán 24 li-

Fig. neas ó 2 pulgadas que tambien son $\frac{1}{6}$, pero $\frac{1}{6}$ de pie, y no por esto ha mudado el quebrado. En general, quando una cantidad dada a es un quebrado de otra cantidad A, si se quiere que sea un quebrado de mA, bastará multiplicar a por m, y ma espresará partes de mA, sin que el quebrado dege de ser el mismo, porque $a : A :: ma : mA$.

44 Fundados en estos principios (41) solemos decir
10. que un arco infinitamente pequeño es igual al radio del arco, multiplicado por el angulillo que mide. Es evidente que quanto mas creciere el radio BK de un arco pequeño KL, y el ángulo KBL, tanto mas crecerá tambien el arco KL; por consiguiente los pequeños arcos como KL, GH están en razon compuesta de sus radios, y de los ángulos que miden. Llamemos r el radio; du, el angulillo KBL; dx, el pequeño arco KL; supongamos que para un radio de una vara tengamos un arco de una linea, y un ángulo de un minuto, si espresáremos todos los radios en varas, los arcos en lineas, y los ángulos en minutos, siempre será $rdu = dx$; por egemplo, quando $r = 2$ varas, y $du = 2'$, será $dx = 4$ lineas.

45 Haremos patente de otro modo la verdad de esta equacion $rdu = dx$.

Supongamos que el arco dx esprese partes del radio r, de suerte que $\frac{dx}{r}$ sea el seno del angulillo du (21), quiero decir, un quebrado del radio (18); sacaremos indefectiblemente la misma equacion si comparamos el angulillo du con el ángulo de 57° que es igual (III. 487) al radio,

dio,

dio, pues el seno de un ángulo infinitamente pequeño es igual al arco (II. 403). Luego comparando el seno chico con el radio, sacaremos cabalmente la misma razon ó fraccion que quando comparemos el arco pequeño con el arco igual al radio. Luego si nos convenimos en espresar todos los ángulos ó arcos en partes del arco de 57°, conforme se usa con frecuencia, tendremos verdaderamente $du = \frac{dx}{r}$ ó el arco igual al seno, esto es, $rdu = dx$, por ser entonces du y $\frac{dx}{r}$ quebrados iguales. Fig.

Quando en esta hypótesi ocurriere hacer du igual á toda *la circunferencia del círculo* para sacar alguna integral, se toma el duplo de 3,14 por la circunferencia (II. 424), esto es, 6,28, que tambien supone que el arco de 57° ó el radio del círculo es la unidad.

46 Los arcos pequeños de que se hace tanto uso en los cálculos, se pueden espresar en segundos ó en decimales del radio. Quando decimos que un arco es de un segundo, queremos decir que es $\frac{1}{1296000}$ de toda la circunferencia, porque el círculo se divide en 360° ó 1296000.″ Pero suele ser mas acomodado para calcular decir que dicho arco es $\frac{1}{206265}$ del radio, y es preciso practicarlo para tener una medida comun entre las lineas rectas y los arcos pequeños; esto viene á ser lo mismo, pues la longitud del radio equivale á 206265″, conforme se evidencia diciendo: La circunferencia es á un medio, como 1296000″ es á un quarto término, que será 206265″, 80624.

Quando despues de concluido un cálculo se hallan arcos

Fig. cos espresados en partes del radio, se reducen á segundos con multiplicarlos por 206265." Porque como la doscienmilésima parte del radio vale un segundo, tendremos tantos segundos quantas doscienmilésimas del radio hubiere en una fraccion dada; luego para hallar el número de segundos se deberá dividir la fraccion dada por la doscienmilésima parte del radio. Con esto sabremos quantas veces la espresada doscienmilésima parte del radio, ó un segundo, cabe en el quebrado propuesto. Por consiguiente dividiendo un quebrado del radio por $\frac{1}{206265}$, ó multiplicándole por 206265, determinaremos el número de segundos que contiene; se percibe muy facilmente, que pues el radio es 200 mil veces menor que los segundos, las partes de segundos serán 200 mil veces mayores que las partes del radio.

47 Hemos probado (II. 403) que si z fuere un arco, é y su seno, será $y = z - \frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}z^5$ &c. Luego si conocemos en segundos el valor de un arco a, conoceremos su seno $a - \frac{a^3}{6}$; luego la diferencia entre un arco pequeño, y su seno es igual á $\frac{a^3}{6}$, esto es, á la sexta parte del cubo del mismo arco. Pero como el cubo de un quebrado pequeño, es un quebrado todavía menor, síguese que se puede despreciar la diferencia que vá de un arco á su seno; porque si a es infinitamente pequeña será a^3 infinitamente pequeña de tercera orden.

48 El coseno de un arco cuyo seno es y será $\sqrt{(1 - yy)}$; si sacamos, pues, la raiz de 1 menos el quadrado del

del seno, cuya espresion es la serie $z - \frac{1}{1.2.3} z^3$ &c. el valor del coseno será la serie $1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720}$ &c. De donde se sigue que si el arco z fuere infinitamente pequeño el coseno $1 - \frac{z^2}{2}$ discrepará del radio 1 una cantidad $\frac{z^2}{2}$ infinitamente menor que el arco, ó un infinitamente pequeño de segunda orden respecto del radio. Fig.

Esta espresion $\frac{z^2}{2}$, añadiéndola los términos siguientes de la serie, dá el seno verso de un arco z, y se saca, por egemplo, que para el arco de un minuto el seno verso en decimales del radio es 0,000000042307975.

49 *El seno de una cantidad* muy pequeña, qual sería a. sen A, es igual á $(a - \frac{1}{8}a^3)$ sen $A + \frac{a^3}{24}$. sen $3A$. Porque hemos probado poco ha (47) que el seno es igual al arco menos la sexta parte del cubo del arco; luego el seno de a. sen $A = a$. sen $A - \frac{a^3 . \text{sen} A^3}{6}$. Pero sen $A^3 = \frac{3}{4}$ sen $A - \frac{1}{4}$ sen $3A$ (II. 397); luego el seno que se busca es $= a$. sen $A - \frac{a^3}{6} . \frac{3}{4}$ sen $A + \frac{a^3}{24}$ sen $3A = (a - \frac{1}{8}a^3)$ sen $A + \frac{a^3}{24}$ sen $3A$, despreciando las demás potencias de a.

50 De lo probado (47) se saca un modo de espresar en segundos la diferencia que hay entre un arco y su seno. Supongamos que sea, por egemplo, a un arco muy pequeño, igual á 1° ó 3600''; dividiremos desde luego este arco por 57° ó 206265'' que es la longitud del radio reducido á segundos, y tendremos el arco espresado en decimales del radio (46), cuyo logaritmo es 8,24188; el triplo de este logaritmo es 4,72564, lo-

Fig. logarítmo de a^3; restaremos de este logarítmo el de 6, y el residuo será el logaritmo de un quebrado del radio que es igual á $\frac{a^3}{6}$; esto es, al exceso que el arco a lleva á su seno en partes del radio. Si quisiéremos valuar este exceso en segundos, le multiplicaremos por 57° (con añadir el logaritmo 5,31442), y sacaremos 0,″18.

51 La regla que acabamos de dar para hallar la diferencia entre un arco, y su seno se reduce á la siguiente regla mas simple: del triplo del logaritmo del arco en segundos, réstese el logaritmo 1,4070053, la resta será el logaritmo de la diferencia que se busca. Tambien se puede acudir á las tablas de los senos, diciendo: el arco igual al radio es á la unidad, como el arco dado es á su valor en partes del radio; se restará este valor del seno de dicho arco que hay en las tablas, y tendremos la diferencia en decimales; se la multiplicará por 206265″, y estará reducida dicha diferencia á segundos.

13. 52 Dado el arco PA del círculo circunscripto á una elipse PMH, hallar el segmento $PEAP$, y la superficie circular PSA, que remata en el focus S de la elipse.

Sea $CP = 1$, $PS = b$, el arco AP de 18° ó 64800″; se convertirá este arco AP en decimales del radio dividiéndole por el arco de 57°, y sacaremos 0,3142 para el arco AP en partes del radio; si le multiplicamos por la mitad del radio CP, ó por $\frac{1}{2}$, sacaremos la superficie del sector $PCA = 0,1571$. La superficie del triángulo CAD es igual á la mitad del producto de AD por DC,

ó

ó del seno de 18° por el coseno, esto es, 0,1469; el Fig.
triángulo *APD* es igual al producto del seno *AD* por la mitad del seno verso *PD*, esto es, 0,0076; si restamos estos dos triángulos de la superficie del sector *PCA*, sale el segmento $PEAP = 0{,}0026$.

53 *Un arco tirado dentro de un centro de un ángulo esférico muy pequeño, perpendicularmente á los lados, es igual al mismo angulillo multiplicado por el seno de la distancia del arco al vértice del ángulo.*

Supongamos dos círculos máximos *PSD*, *PAB*, que 14.
formen uno con otro en *P* un ángulo muy pequeño; que *PD* sea de 90°, de modo que *DB* sea la medida del angulillo *P*; que á una distancia qualquiera del vértice *P*, se tire otro arco de círculo máximo *SC*, perpendicular á *PCB*, tan pequeño que se le pueda considerar como una linea recta, y que al mismo tiempo *PS* sea sensiblemente igual á *PC*. Del triángulo *PSC* rectángulo en *S* y *C*, sacaremos esta proporcion (III. 698): el radio es al seno de la hypotenusa *PS*, como el seno del angulillo *P* es al seno del arco pequeño *SC*, ó como el ángulo *P* es al arco *SC* (por ser los arcos pequeños iguales á sus senos) ó como el arco *BD* es al arco *SC*. Por consiguiente si tomamos la unidad por radio, tendremos $1 : \text{sen } PS :: BD : SC$; luego $SC = BD \cdot \text{sen } PS$.

54 Síguese de aquí que un arco pequeño del equador, ó una corta diferencia de ascension recta, multiplicado por el coseno del arco que señala á qué distancia está del equador

un

Fig. un astro que se observa, dará el efecto que de aquí resulta en la region del astro, ó el arco pequeño comprendido en aquel parage entre los dos círculos de declinacion.

55. *En un triángulo rectángulo esférico que tiene un ángulo, y el lado opuesto muy pequeños respecto de los demás lados, la diferencia entre la hypotenusa, y el lado grande es igual á la mitad del quadrado del lado pequeño multiplicada por la cotangente de la hypotenusa.*

Sea *ABD* un triángulo esférico rectángulo en *D*, cuyo
15. lado *AD* venga á ser una linea recta muy chica; *DH* y *AH* dos tangentes en *D* y *A*; desde el punto *H* donde las dos tangentes encuentran el radio de la esfera prolongado, ó *CEBH*, se trazará por el punto *A* un arco chico de círculo *AG*, que teniendo por radios *HA* y *HG*, su seno será la perpendicular *AD*, y *GD* el seno verso. En virtud de esto y de lo probado (40), tendremos $GD = \frac{AG^2}{2AH}$; pero *AH* es la tangente del arco *BA* ó *BD*, y *AG* no discrepa de *AD*; luego $DG = \frac{AD^2}{2 \tan BD} = \frac{AD^2}{2} . \cot BD$. Esto supone que las lineas *AG* y *AD* están espresadas en las tablas en partes semejantes, esto es, ó en decimales del radio ó en segundos; pero las tangentes que hay en las tablas están en decimales del radio; es, pues, preciso que el arco *AD* esté en decimales. Si estuviere espresado en segundos, se debería dividir AD^2 dos veces por 57° (46) para sacar AD^2 en decimales, y despues de valuada de este modo la fórmula, será menester para sacar *DG* multiplicar por 57° ó $206264''$, para reducirle á segundos. Luego

DG

DG ó la diferencia entre la hypotenusa *AB* y el lado *DB* Fig. del triángulo *ABD* espresado en segundos, es $\frac{AD^2 . \cot BD}{2 . 57^\circ}$.

Algunas propiedades de la Elipse.

56 *Proyectar* una figura es referirla á un plano distinto de aquel donde está, con tirar lineas desde cada punto de la figura al espresado plano. Aunque hay muchas especies de proyeccion, solo hablaremos aquí de la proyeccion *ortográfica*, que se forma con lineas perpendiculares al plano de proyeccion.

Sea una linea *AB*, y un plano qualquiera *PL*, distinto de dicha linea. Si desde los estremos *A* y *B* de la linea dada bajamos el plano *PL* perpendiculares *Aa*, *Bb*, el espacio *ab* que ocuparen en el plano *PL*, será la *Proyeccion ortográfica* de la linea *AB*, y el plano *PL* al qual se hubieren bajado dichas perpendiculares se llamará el *Plano de Proyeccion.* 16.

57 Si las lineas *Aa*, *Bb* en vez de ser paralelas y perpendiculares al plano de proyeccion, saliesen de un punto comun, resultaría en el plano *PL* otra figura, otra especie de proyeccion.

58 *La proyeccion ortográfica* ab *de una linea* AB *que forman en un plano de proyeccion* PL *las perpendiculares* Aa, Bb *es el coseno de su inclinacion.*

Porque si tiramos *AC* paralela á *PL*, el ángulo *BAC* será igual á la inclinacion de la linea *AB* respecto del plano de proyeccion *PL*, y *AC* = *ab* será la proyeccion de

la

Fig. la linea *AB*. Pero *AB* : *AC* :: *R* : cos *BAC*; por consiguiente el radio es al coseno de la inclinacion, como la linea *AB* es á su proyeccion *AC*. Luego si tomamos el radio por unidad, se verificará que la proyeccion de una linea es igual á la misma linea multiplicada por el coseno de su inclinacion al plano de proyeccion.

17. 59 *La proyeccion de un arco como* FL *es igual á su seno.*

Supongamos que la circunferencia *DFH* del semicírculo cuya proyeccion se pide, esté en un plano perpendicular al plano de proyeccion; todas las lineas perpendiculares *FC* bajadas desde cada punto de la circunferencia al radio *CH*, serán perpendiculares al plano, y señalarán las proyecciones de los mismos puntos; el punto *K* será la proyeccion del punto *I*; así la linea *CK* será la proyeccion del arco *FI*. Pero si *C* fuere el centro del círculo, *CK*=*IL* será el seno del arco *FI*; luego los senos de los arcos *FL* serán las proyecciones de los mismos arcos, tomando su origen en el punto *F* que corresponde perpendicularmente al centro *C*.

60 *La proyeccion ortográfica de un círculo inclinado*
17. *siempre es una elipse.*

Sea *DFG* el círculo cuya proyeccion se desea; *DH*, uno de sus diámetros que está en el plano de proyeccion ó es paralelo á este plano. Si inclinamos dicho semicírculo haciéndole girar al rededor del diámetro *DH*, de modo que todas las lineas *IK* formen con el plano de proyeccion un

un ángulo qualquiera, las proyecciones de todas estas lineas Fig.
serán lineas *KG* cada una de las quales será igual á su correspondiente *IK* multiplicada por el coseno del ángulo de inclinacion (58), de modo que en qualquiera situacion siempre será *KG* á *IK*, como el coseno del ángulo de inclinacion es al radio. Pero es propiedad de la elipse (64) que todas sus ordenadas *KG* estén con las ordenadas *IK* de un círculo de igual diámetro en una razon constante; luego las lineas *KG* formarán una elipse; luego finalmente la proyeccion de un semicírculo *DFH* será la circunferencia de una elipse *DGH*, cuyo ege mayor *DH* es el mismo que el del semicírculo, y el ege menor, menor en la razon del coseno de la inclinacion. Lo propio sería aun quando el diámetro *DH* del círculo proyectado estuviese á alguna distancia debajo del plano de proyeccion.

61 Por consiguiente un círculo mirado oblicuamente parece en forma de elipse.

Porque sabemos que una linea *AB* mirada oblicuamente desde el punto *O*, parece del mismo tamaño que la linea perpendicular *AC* = *AB*. sen *ABC*; así, en un círculo *CAD* mirado oblicuamente todas las ordenadas *AB*, *EF* parecen menores en una misma razon, y por consiguiente el círculo parece una elipse *CGD*, cuyo ege menor es al mayor como el seno de la inclinacion es al radio. Esta proposicion viene á ser la misma que la antecedente; pero importa mucho hacerse á considerar que un círculo mirado oblicuamente, parece en figura de elipse.

(Fig. margin: 18. beside "Porque sabemos..."; 19. beside "parecen menores...")

Fig. 20. 62 Todo esto presupuesto, hemos visto (III. 94) como si llamamos a el semiege mayor CA de la elipse; b, su semiege menor CZ; x, la abscisa CB; y, la ordenada MB, la equacion de la elipse será $y^2 = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$. Tambien vimos (III. 93) como estando no en el centro de la curva, sino en el vértice, el origen de la abscisa x, la equacion de la elipse será $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$.

63 De esta equacion se puede sacar el valor de x en y, considerando que $(a - x)^2 = aa - 2ax + xx$; pero en la elipse $2ax - xx = \frac{aa}{bb}y^2$; luego $(a - x)^2 = aa - \frac{aa}{bb}y^2$, y $a - x = \frac{a}{b}\sqrt{(bb - yy)}$.

64 De lo que dejamos probado (III. 91) consta que
21. si sobre el mismo ege HK, y al rededor del mismo centro C trazamos una elipse HLK, y un círculo HIK, tendremos en el círculo $MF : DM :: CL : CI$; quiero decir, que las ordenadas de la elipse son proporcionales á las del círculo. La razon que hay en esta proporcion está diciendo que si se dividen por medio las ordenadas DM, CI &c. de un semicírculo $KDIH$, la linea que pasare por todos los puntos de division, será una elipse $KFLH$. Apelaremos muchas veces á esta proporcion constante que hay entre las ordenadas del círculo y las de la elipse.

65 Hace patente esta propiedad de la elipse que la proyeccion de un círculo sobre un plano al qual es inclinado, es una elipse (60). De esta consecuencia se saca una demostracion muy simple de la propiedad que dejamos probada (III. 111); es á saber, que la propiedad de los

eges

eges (III. 90) se verifica igualmente respecto de dos diámetros de la elipse MEN, QEq, tales que el uno sea paralelo á las ordenadas del otro; quiero decir que $(Ss)^2 : (Qq)^2 :: NV \cdot VM : NE : EM$. Fig. 22.

Con efecto, todas las ordenadas Ss, Qq de la elipse que son paralelas entre sí, son menores que las ordenadas XO, Ff del círculo cuyas proyecciones son, y son menores en una razon constante; los segmentos NV, VM, NE, EM en la elipse son menores que los segmentos YZ, ZB, YE, EB, cuyas proyecciones son, y son menores en una razon constante, una vez que todas las lineas de la elipse están igualmente inclinadas al plano del círculo proyectado. Pero en el círculo los quadrados de las ordenadas son iguales á los productos de los segmentos, luego en la elipse están en una razon constante; si los quadrados de las ordenadas elípticas son, pongo por caso, la mitad de los quadrados de las ordenadas circulares, y los productos de los segmentos en la elipse son la quarta parte de los del círculo, los quadrados de las ordenadas elípticas siempre serán duplas de los rectángulos de sus segmentos.

66 Síguese tambien de aquí que si dos lineas MN, AR se cortan en la elipse, siendo paralelas á dos diámetros GF, BD, siempre se verificará esta proporcion $AP \cdot PR : MP \cdot PN :: BQ \cdot QD : GQ \cdot QF$. 23.

Porque las ordenadas RA, BD son menores que las ordenadas circulares, cuyas proyecciones son; pero tienen unas con otras la misma razon; los segmentos MP, PN,

Fig GQ, QF son los mismos que los segmentos circulares, cuyas proyecciones son; luego ya que los quadrados de las ordenadas eran iguales á los productos de los segmentos en el círculo, estarán en razon constante en la elipse.

24. 67 Por la demostracion que dimos de una propiedad de la elipse (III. 116) consta que la subtangente RQ de esta curva es $= \frac{aa-xx}{x}$; y yá dejamos probado antes (III. 108) que la distancia CQ del centro á la tangente $= \frac{aa}{x}$. Y como la equacion de la elipse es la misma respecto del ege menor (III. 92) que respecto del mayor, tendremos respecto del ege menor $CG : CB :: CB : CX$, y $CX . CG = CB^2$.

68 Si la linea FNH fuere perpendicular en F á la tangente $QFTX$, el producto de FH por FN será igual al quadrado del semiege menor. Porque de la semejanza de los triángulos CTX, FNR, sacamos $CT : CX :: FR : FN$, ó $FH : CX :: CG : FN$; luego $FH . FN = CX . CG = (CB)^2$.

22. 69 Por ser el punto Q de la elipse la proyeccion del punto F del círculo circunscripto, la tangente de la elipse en Q es la proyeccion de la tangente del círculo en F (67); la tangente de la elipse en Q es paralela al diámetro conjugado MN (III. 113); luego la tangente en F es paralela al radio EY, cuya proyeccion es EN; luego el radio EF forma un ángulo recto con el radio EY ó con el radio EB.

70 El paralelogramo hecho con dos diámetros con-

ju-

jugados es constante, ó lo que viene á ser lo propio, el Fig.
producto del semidiámetro EQ, y de la perpendicular QH, bajada á su semidiámetro conjugado EM, es igual al rectángulo ó al producto de los dos semieges.

Una vez que el ángulo EFB siempre es recto, el quadrado formado con FE y EB es constante, sea la que fuere la situacion de los puntos F y B cuya proyeccion está en Q y M; el paralelogramo sobre QE y EM es la proyeccion de dicho quadrado; la superficie de esta proyeccion es constante, porque sea la que fuere la situacion de *una figura en un plano*, *su proyeccion en otro plano de una inclinacion dada siempre está en una misma razon con la figura proyectada*, aunque la proyeccion mude de forma. La verdad de esta proposicion la percibirá facilísimamente el que dividiere en todos los casos la figura proyectada, pongo por egemplo, el quadrado sobre FEB en elementos ó lineas perpendiculares á la seccion comun LE de los dos planos; la suma de estos elementos siempre será constante, pues vale la superficie del quadrado; cada uno de dichos elementos tiene por proyeccion una linea menor en la razon del seno de la inclinacion al seno total (58), luego la suma que forman será en todos los casos una superficie menor en la misma razon que la superficie dada. Por consiguiente, como el quadrado sobre EFB tiene por proyeccion el paralelogramo hecho con los diámetros conjugados QE, EM, este paralelogramo ó el producto de EQ por QH es una cantidad constante, sea el que fuere el punto Q. Pero

Fig. quando el punto Q está en L, y el punto M en G, el espresado paralelogramo es el rectángulo de los dos semieges, $= ab$, luego $QE \cdot QH = ab$.

71 *La suma de los quadrados de dos diámetros conjugados siempre es constante*; esto es, igual á la suma de los quadrados de los dos eges. Por egemplo, $(EQ)^2 + (EM)^2 = 1 + b^2$, en el supuesto de que sea 1 el semiege mayor, y b el semiege menor.

Si nos figuramos que los puntos Q y M de la elípse son la proyeccion de los puntos F y B del círculo, la elevacion perpendicular del punto F del círculo sobre el plano de la elipse será el lado de un triángulo rectángulo del qual FD ó el seno del arco FL es la hypotenusa, y QD el otro lado. Luego el quadrado de esta elevacion será igual al quadrado de FD menos el quadrado de QD que está en la misma razon en cada punto de la elipse; luego el quadrado de dicha elevacion será como el quadrado del seno de FL. Ya que FB es un quadrante de círculo, la depresion del punto B debajo de la figura será como el quadrado del coseno de FL, luego la suma de los quadrados de la depresion y de la elevacion será constante. Pero los quadrados de las hypotenusas FE y EB son constantes, luego la suma de los quadrados de los lados EQ, EM es constante, esto es, igual en todas partes á la suma de los quadrados de los semieges.

Por la misma razon la suma de los quadrados de las abscisas EC, ED que corresponden á los diámetros conjugados es constante; porque la una es el coseno, y la otra el se-

seno de LB, y el quadrado del seno mas el quadrado del coseno siempre es igual al quadrado del radio; luego $EC^2 + ED^2 = EL^2$. Fig.

72 Quando la abscisa EV es el seno de un número de grados tomados en el círculo circunscripto CD, la ordenada SV es el coseno de un arco semejante, ó de un mismo número de grados tomado en el círculo inscripto ABF. Supongamos el arco CD de 50°, y el arco AT de 50°, y tiremos un radio ETD; el seno DG del arco CD es igual á la abscisa EV; luego EV es el seno de 50° en el círculo grande; la linea SV que es igual á PE, tambien es el coseno de 50° en el círculo ATB. Porque $ET : ED :: TR$ ó $SV : DV$, ó $\frac{DV}{ED} = \frac{SV}{ET}$; pero $\frac{DV}{ED}$ es el coseno del arco CD de 50° (21); luego $\frac{SV}{ET}$ tambien es el coseno de 50° ó del arco AT; luego si la abscisa EV es el seno de 50° en el círculo grande, la ordenada SV será su coseno en el círculo chico. 25.

73 El sector elíptico $GSVG$ es al sector circular $GSFG$, como el ege menor de la elipse es al ege mayor. 26.

Porque todas las ordenadas de la elipse están con las ordenadas correspondientes en el círculo en razon constante (64), y en la que hay entre el ege mayor y el menor; luego el segmento elíptico GBV estará con el segmento GBF en la misma razon del ege menor al mayor. Los triángulos rectilineos BSV, BSF son entre sí como sus bases BV, VF, esto es, como el ege menor es al mayor; luego las sumas ó los sectores enteros GSV, GSF que se

Fig. se componen respectivamente de un triángulo y un segmento, son tambien como el ege menor es al mayor.

74 Hemos probado (III. 577) que la superficie de la elipse es á la del círculo circunscripto como el ege menor es al mayor. Luego si llamamos a y b los semieges de la elipse, y c la circunferencia de un círculo cuyo radio $= 1$, y cuya circunferencia será con corta diferencia $6,28$, la superficie de la elipse será $\frac{cba}{2}$; porque la circunferencia trazada sobre el semiege mayor, es entonces ca, la superficie es $\frac{ca^2}{2}$, la de la elipse es á la del círculo $:: a : b$, luego la de la elipse es $\frac{ca^2}{2} \cdot \frac{b}{a}$ ó $\frac{cab}{2}$.

75 Por consiguiente, la superficie de una elipse es igual á la de un círculo cuyo diámetro es medio proporcional entre los dos eges de la elipse. Porque el radio de este círculo sería $\sqrt{ab}$, y su superficie $\frac{c}{2}\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$ ó $\frac{cab}{2}$, igual á la superficie de la elipse.

20. 76 De lo probado (III. 85 3.°) resulta que si llamamos CZ, b; CS, e; CA, a, y desde el estremo Z del ege menor, y con un radio ZS igual al semiege mayor trazamos en arco de círculo, tendremos $aa - ee = bb$.

77 Luego el radio vector $SM = \frac{PB.SA}{CA} - SB$, esto es, $= \frac{(a+x)(a+e)-a(e+x)}{a}$, ó lo que es lo mismo $\frac{a^2+ex}{a}$.

Porque segun vimos (III. 84 1.°) $SM + FM = 2a$; si hacemos $SM = a + z$, y $FM = a - z$, tendremos BM^2 ó $y^2 = SM^2 - SB^2 = aa + 2az + zz - ee - 2ex - xx = FM^2 - FB^2 = aa - 2az + zz - ee + 2ex - xx$; luego $2az - 2ex = - 2az + 2ex$, $z =$

$\frac{cx}{a}$; luego $SM = a + \frac{cx}{a}$, ó lo que es lo propio, $SM =$ Fig.
$\frac{PB.SA}{CA} - SB$.

78 Si tiramos al punto V un radio vector SV, un diámetro VCn, un diámetro conjugado CI, este último interceptará en el radio vector SV una parte $Vq = AC$.

Porque si tiramos la Fb paralela al diámetro CI, tendremos $FV = Vb$, porque los ángulos FVu, SVN son iguales (III. 117), y sonlo por lo mismo sus alternos F y b, pero por razon de los triángulos semejantes SCq, SFb, en los quales $SC = CF$, tambien será $Sq = qb$; luego Vq es igual á la semisuma de FV y Vb, mas la mitad de Sb, esto es, á la mitad de FV y de VS, ó á la mitad del ege mayor.

79 Al radio vector $SM = \frac{PB.SA}{CA} - SB$ (77) se le puede tambien dar esta espresion $SM = PS + \frac{CS.PB}{CA}$. Porque $PB.(SA - CS)$, esto es, $PB.CA$ es lo propio que $CA.(PS + SB)$; luego $PB.SA - SB.CA = CA.PS + CS.PB$, ó $\frac{PB.SA}{CA} - SB = PS + \frac{CS.PB}{CA}$.

80 La normal $FN = \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^4 - a^2xx + b^2xx)}$. Por- 24.
que en el triángulo NFQ rectángulo en F, $QR : RF :: RF : RN$, ú $\frac{aa-xx}{x} : \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)} :: \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)} : \frac{bbx}{a^2}$; este es el valor de la subnormal.

En el triángulo rectángulo NFR, $FN^2 = \sqrt{(FR^2 + RN)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2}(aa - xx) + \frac{b^4x^2}{a^4}\right)} = \frac{b}{a^2}\sqrt{\left(a^4 - a^2xx + b^2xx\right)}$.

81 Si desde el estremo F de un diámetro FC bajamos una perpendicular FH á su diámetro conjugado $ECHD$, y lla-

Fig. llamamos m y n el seno y el coseno del ángulo DCL, tendremos $CH \,.\, FH = mn(aa - bb)$.

Porque $RN = \frac{bbx}{aa}$ (80); luego $CN = x - \frac{bbx}{aa}$. Pero $CQ = \frac{aa}{x}$ (67); luego $CN \,.\, CQ = aa - bb$. En el triángulo CNH rectángulo en H, $CN : CH :: 1 :$ sen CNH, ó al coseno n del ángulo HCN; asimismo $CQ : CT$ ó $FH :: 1 : m$; tenemos, pues, estas dos proporciones, $1 : n :: CN : CH$, y $1 : m :: CQ : FH$; multiplicándolas ordenadamente sale $1 : mn :: CN \,.\, CQ$, ó $(aa - bb) : CH \,.\, FH$; luego finalmente $CH \,.\, FH = mn\,(aa - bb)$.

82 El radio osculador ó el radio de la evoluta en la elipse es igual (III. 460) al cubo de la normal dividido por el quarto del quadrado del parámetro; luego suponiendo que el primer ege sea $= 1$, la espresion del radio osculador en la elipse será $\frac{4b^3}{pp}(1 - xx + bbxx)^{\frac{3}{2}}$ (80) y substituyendo $4b^4$ en lugar de pp, será $\frac{1}{b}(1 - xx + bbxx)^{\frac{3}{2}}$.

83 La equacion de la elipse entre el radio vector, y la animalia media es muy socorrida en algunos cálculos. En

20. una elipse cuyo semiege es a, la anomalia $MSA = u$, el radio vector $SM = r$, la excentricidad $CS = e$, el semiparámetro $= p = \frac{bb}{a} = \frac{aa - ee}{a}$, tenemos $\frac{p}{r} = \frac{a - e\,.\,\cos u}{a}$.

Porque si hacemos $CK = \frac{aa}{e}$, tendremos $KB = \frac{aa}{e} + x = \frac{aa + ex}{e} = MH$; $SK = \frac{aa}{e} - e = \frac{aa - ee}{e} = \frac{ap}{e}$; pero (77) $SM = \frac{aa + ex}{a}$, y $\frac{aa + ex}{a} : \frac{aa + ex}{e} :: e : a$; luego $SM : MH :: e : a$, ó $r = \frac{e}{a}\, MH$; pero $MH = SB + SK = r\,.\,\cos u + \frac{aa - ee}{e}$; luego r ó $\frac{e}{a} MH = \frac{aa - ee + er\,.\,\cos u}{a}$, $\frac{ar - er\,.\,\cos u}{a} = \frac{aa - ee}{a} = p$; luego $\frac{p}{r} = \frac{a - e\,.\,\cos u}{a}$.

Es-

84 Esta espresion dá el valor del radio vector r en partes del semiege, ó de la distancia media a que se toma por unidad, porque $r = \frac{ap}{a - e.\cos u}$. Supongamos $u = 90°$, tendremos $r = p$; quiero decir, que entonces el radio vector es igual al semiparámetro de la elipse. Fig.

85 Si supusiéramos el semiege $= 1$, sacaríamos $r = \frac{p}{1 - e.\cos u} = \frac{1 - ee}{1 - e.\cos u}$, este es el radio vector, y la equacion de la orbita será $\frac{p}{r} = 1 - e.\cos u$.

86 Si en lugar del ángulo u que espresa la anomalía verdadera, se substituye el ángulo contado desde otro punto qualquiera distante del ápside una cantidad m, siendo $u - m$ *la anomalía verdadera*, se debería escribir $u - m$ en lugar de u; sacaríamos entonces (II. 378) $\frac{p}{r} = 1 - e.\cos u.\cos m - e.\operatorname{sen} m.\operatorname{sen} u$, y con hacer las constantes $e.\cos m = b$, $e.\operatorname{sen} m = g$, saldrá $\frac{p}{r} = 1 - b.\cos u - g.\operatorname{sen} u$.

87 Si en el mismo tiempo que el planeta traza un ángulo u, la linea de los ápsides tambien caminára ácia adelante; quiero decir, si el ápside fuese mobil, y fuese su movimiento al del planeta, como $1 - m$ es á 1, siendo u el movimiento del planeta, el del ápside sería $u - mu$; la anomalía verdadera del planeta en su elipse mobil sería mu, y la equacion de la elipse mobil sería $\frac{p}{r} = 1 - e.\cos mu$.

88 *La seccion oblicua de un esferoide elíptico aplanado, qual es la tierra, siempre es una elipse.*

Sea GF el diámetro del equador; AR, el diámetro de la seccion oblicua AOR cuya naturaleza buscamos; BD, un diá- 23.

Fig. diámetro de la elipse tirado paralelamente á la seccion *AR*; *MN* el diámetro de un paralelo *MON*; *PO*, una ordenada comun al círculo *MON* y á la curva *ROA*. La propiedad del círculo dá $MP \cdot PN = PO^2$; pero la propiedad de la elipse *GBF* dá $AP \cdot PR : MP \cdot PN :: QD^2 : GQ^2$ (66), luego $AP \cdot PR : PO^2 :: QD^2 : GQ^2$, esto es, en razon constante, sea la que fuere la situacion del punto *P* en la linea *AR*; luego la curva *AOR* es una elipse semejante á la que pasa por *BD*.

Esta proposicion se verifica igualmente aun quando el plano de la seccion no es paralelo al ege, ni perpendicular al plano del equador; pero la proposicion que sigue solo se verifica respecto de un plano de seccion paralelo al ege menor del esferoide, ó al ege del mundo.

89 *La seccion de un esferoide aplanado qual es la tierra, paralelamente al meridiano es una elipse semejante al meridiano.*

Porque si la linea *AR* llega á ser paralela á *GQF*, la razon entre $(GQ)^2$ y $(DQ)^2$ llegará á ser la misma que hay entre el quadrado del semiege mayor, y el quadrado del semiege menor; luego en la seccion *AOR*, quando *AR* fuere paralela al ege del mundo la razon entre los eges será la misma que en la elipse *GDF*.

90 Síguese de aquí que la seccion de un esferoide elíptico siempre es semejante á la elipse del meridiano, con tal que el plano de dicha seccion sea perpendicular al plano del equador, porque entonces siempre será paralelo á alguno de los meridianos.

De

De los Circulos de la Esfera.

Fig.

91 El primer fenómeno celeste que se llevó naturalmente la atencion de los hombres es el movimiento diurno ó diario con el qual parece que se mueve el cielo, y dura 24 horas. Así vemos que el sol nace y se pone todos los dias.

92 El orizonte es aquel ámbito del cielo que reparamos al rededor de nosotros en forma de círculo, y limita la vista por todos lados, quando estamos en un sitio elevado. Este círculo divide el cielo en dos partes, pero no vemos mas que la que está mas arriba del orizonte; los astros no se dejan ver sino quando llegan á este emisferio superior, y entonces decimos que nacen.

93 Quando se considera con cuidado continuado este movimiento general de los astros por espacio de una ó muchas noches, se repara que cada estrella anda un círculo en el discurso de 24 horas; las que están mas ácia el norte andan círculos menores que las otras, cuyos círculos ván menguando continuamente hasta desvanecerse y confundirse con un punto elevado del cielo, que llamamos *el Polo del mundo*; el que nosotros vemos se llama *el Polo boreal ó ártico.*

94 Por consiguiente el que quisiere formar juicio de los círculos de la esfera, debe en una noche muy clara enseñarse á conocer el polo del mundo. Hay en el cielo una estrella muy próxima á este punto llamada *la Estrella polar.*

Fig. *lar.* Por estar esta estrella muy inmediata á dicho polo fijo, al rededor del qual las demás estrellas dán la vuelta cada dia, parece que está siempre en un mismo lugar á todas las horas del dia y todo el año ; siendo así que las demás andan círculos al rededor de ella, que viene á ser el centro de sus movimientos.

95 La estrella polar es muy facil de conocer. Un hombre por sí solo, aunque jamás hubiese observado el cielo, con tal que no le faltase paciencia para observar parte de la noche las diferentes estrellas que están del lado del norte, reparando su situacion y altura respecto de campanarios, paredes ú otros obgetos muy visibles, echaría de ver muy presto que hay una estrella que se mantiene con muy corta diferencia en un mismo sitio, y esta es la que llamamos estrella polar. Pero si esto no bastare, enseñaremos otro modo de conocerla.

96 En todos los paises es conocido aquel grupo ó conjunto de estrellas que el vulgo llama *el Carro*, y los Astrónomos llaman *Ursa mayor*. Si se tira una linea por las
27. dos estrellas mas distantes de la cola, señaladas α y β, esta linea prolongada del lado de la estrella α, pasará muy cerca de la estrella polar, que está á la misma distancia de la estrella α, que esta de la estrella η, que forma el estremo de la cola. En algunos tiempos del año estará la estrella polar mas alta que la ursa mayor, en otros estará mas baja. En el primer caso el círculo que debe ir á encontrar la estrella polar se debería prolongar mas arriba de la ursa mayor;

yor; esto sucede quando á principios de Noviembre miramos al norte á eso de las 10^h de la noche. A principios de Mayo á la misma hora, veríamos la ursa mayor en lo mas alto del cielo; y entonces se debería prolongar ácia abajo la linea que junta los dos estremos del quadrado de la ursa mayor, para encontrar la estrella polar. Esté donde estuviere el carro, la estrella polar siempre estará del lado de la estrella α ó del lado de la convexidad de la cola. Fig.

97 En conociendo el polo del mundo, se distinguen facilísimamente los *Puntos Cardinales*; es á saber, el *Norte*, el *Sur*, el *Oriente*, y el *Occidente*. El norte ó septentrion *es el lado al qual estamos* de cara quando miramos el polo; el sur ó mediodia es el lado opuesto, aquel donde vemos el sol á la mitad del dia; el oriente ó leste, el poniente ú occidente están entre los dos puntos del norte y del sur, á distancias iguales de uno y otro, á ángulos rectos, el uno del lado donde *nacen* los astros, y el otro del lado donde se *ponen*.

98 El *Zenit* es el punto que está directamente encima de nuestra cabeza, al qual vá á parar el plomo si le concebimos prolongado hasta la concavidad del cielo. Por ser el zenit el punto mas alto del cielo, está á 90° de todos los puntos del orizonte. Por consiguiente quando un astro está 60° elevado mas arriba del orizonte, dista 30° del zenit, pues $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. Podremos, pues, decir que la altura de un astro es el complemento de su distancia al zenit.

El

Fig. 99 El *Nadir* es el punto inferior de la esfera celeste, diametrálmente opuesto al zenit, aquel punto al qual se dirige el plomo con su gravedad natural. Si nos figuramos un círculo que dé la vuelta al cielo pasando por el zenit y el nadir, habrá 180° ó un semicírculo de un lado, y otro tanto del otro. A este círculo que pasare de este modo por el zenit y el nadir, le llamaremos *Círculo vertical.*

100 Quando desde un sitio muy patente se mira el cielo, se concibe que pues tenemos encima de nosotros una mitad de globo, hay otra mitad que no vemos. El emisferio visible ó superior está separado del invisible ó inferior por el orizonte; *es*, pues, *el orizonte un círculo máximo de la esfera que en cada lugar de la tierra separa la parte visible del cielo de la que no se vé.* A este orizonte se le llama *Racional* ó *Matemático* para distinguirle del orizonte *sensible* que es un plano paralelo al orizonte racional, tangente de la superficie de la tierra.

101 Cada punto de la tierra tiene orizonte distinto,
28. *HO* es el orizonte de un observador puesto en *A*; si caminára hasta el punto *B* distante 10° del punto *A*, su orizonte será *RI*, y formaría con el precedente un ángulo de 10°.

102 Una vez conocido del lado del norte el polo boreal del mundo, elevado sobre el orizonte, es facil figurarse que hay otro del lado del mediodia, llamado *Polo meridional* ó *Polo austral*, directamente opuesto al primero, y está debajo del orizonte los mismos grados que el otro está

mas

mas arriba. La línea recta que vá desde el un polo al otro Fig.
se llama el *Ege del Mundo*, porque el mundo parece que dá la vuelta al rededor de ella en el discurso de un dia.

103 El *Meridiano* es un círculo máximo como 29.
HPZEORQH que se concibe que pasa por el zenit, el nadir y los polos del mundo. Cada punto de este círculo dista igualmente del orizonte á la derecha y á la izquierda; por manera que todos los astros entre su nacimiento y su ocaso se hallan en el meridiano, una vez encima del orizonte, otra vez debajo. Su revolucion diurna se podrá dividir en quatro partes iguales; es á saber, desde que nacen hasta llegar al meridiano, desde que pasan por el meridiano hasta ponerse, desde que se ponen hasta pasar por la parte inferior del meridiano, y desde que pasan por la parte inferior del meridiano hasta que vuelven á nacer el dia siguiente.

104 El meridiano divide el cielo en dos emisferios que están el uno al oriente, el otro al poniente, por cuyo motivo se llaman *Emisferio oriental*, y *Emisferio occidental*. Llámase meridiano este círculo, porque quando el sol llega á alcanzarle estamos á la mitad del dia. Por él pasan tambien todos los demás astros.

105 El meridiano de París, por egemplo, es distante del meridiano de un país que está mas al oriente que París, y un observador que camina ácia el oriente ó el occidente muda de meridiano tanto como se acerca al oriente ó al occidente. Como Brest está 7° mas al occidente que

Fig. París, el meridiano de París dista 7° del de Brest. Un observador que vá en derechura ácia el norte ó al sur no muda de meridiano.

106 Todos los meridianos de los diferentes países de la tierra se juntan y cruzan en los dos polos del mundo, pues todos ván desde un polo á otro. Quando un observador que está en un lugar fijo habla del meridiano, siempre se entiende el meridiano del lugar donde está.

107 El que conoce los dos estremos del ege, concibe facilmente la rueda ó el círculo que está en medio; este círculo es el *Equador*, y está á iguales distancias de los dos polos.

29. Sea un círculo *HPZEORQH* que representa la circunferencia del meridiano; *P*, el polo boreal; *R*, el polo austral; *PR*, el ege del mundo; la linea *EQ* representará el diámetro del equador, que pasa á iguales distancias de ambos polos, cuyo plano es perpendicular al ege, del mismo modo que el plano de una rueda es perpendicular á su ege. Hemos, pues, de imaginar sobre el diámetro *EQ* un círculo perpendicular al plano de la figura, cuya mitad esté encima de dicho plano, y la otra mitad debajo; este círculo será el equador. Por estar el equador á igual distancia de cada polo, se puede decir en general é indistintamente que la esfera con su equador *EQ* dá vueltas al rededor del ege *PR*, ó al rededor de los polos *P*, *R* del equador.

108 El equador divide todos los meridianos en dos partes iguales, una vez que el equador está en medio del in-

intervalo que hay de un polo á otro. Todos los meridianos son perpendiculares al equador; porque si no fuera así, el equador se arrimaría mas al un polo que al otro, cuya consecuencia desdice de su naturaleza. Fig.

109 A los tres círculos principales de que hemos hablado hasta aquí, es á saber, el orizonte, el meridiano, y el equador, se refieren todos los astros que se observan. Por de contado ningun astro es visible hasta que asciende por el orizonte; y quanto mas arriba del orizonte sube un astro, tanto mas tiempo es visible. Es, pues, la altura de un astro sobre el orizonte un punto muy importante; veamos como se determina.

110 Sea *O* un observador cuyo zenit es *Z*, y *HOR* el orizonte; habrá, pues, 90° desde *Z* á *R*, porque *ZR* es el quadrante del círculo, ó de toda la circunferencia; así, una estrella que viésemos en *Z*, tendría 90° de altura; la que estuviese en *A*, á igual distancia del orizonte *R* que del zenit *Z*, tendría 45° de altura; y así prosiguiendo. 30.

111 El observador *O* que quisiese medir estas alturas, formará un quadrante de círculo *BD* de madera ó metal, dividiéndole en 90 partes, colocará el uno de los lados *BO* verticalmente, por medio de un plomo, y estando en esta disposicion mirará, aplicando el ojo en el centro *O*, á qué punto *C* corresponde el astro *A*; y el número de grados que hubiere en la parte *CD* del instrumento, será el mismo que habrá en la porcion *AR* de la esfera celeste, y señalará la altura del astro *A* respecto del orizonte.

Fig. Porque si el arco *DC* fuese, por egemplo, la octava parte de toda una circunferencia ó la mitad de *BD* en el instrumento, el arco celeste *AR* será tambien la mitad de *ZR*, y por consiguiente cada uno de ellos será de 45°.

112 Pero los Astrónomos colocan el quadrante de un modo mas acomodado para medir las alturas; pónenle en tal situacion, que el uno de los lados *BO* está dirigido á
31. la estrella *A*, cuya altura se proponen medir. En el centro *O* del instrumento cuelga sin tropiezo un plomo *OED*, el arco *EG* del quadrante, comprendido entre el plomo y el radio *OG*, coge tantos grados como el arco *AR* que mide la altura del astro sobre el orizonte *OR*. Porque la linea vertical *ZOED* forma con el rayo de la estrella *BOA* un ángulo, cuya medida es el arco *ZA* por un lado, y por el otro el arco *BE* que le es semejante, y de un mismo número de grados; esto es lo que llamamos *Distancia al zenit*. Pero el arco *ZA* es el complemento del arco *AR*, como *BE* es el complemento de *EG*; por consiguiente el arco *AR* es semejante al arco *EG*; luego este último arco determina la altura del astro del mismo modo que el arco *AR*. Para observar la altura de un astro no hay mas que dirigir uno de los lados *BO* del quadrante *BEG* ácia el astro supuesto en *A*, y ver quantos grados intercepta, contando desde el otro radio *OG* del instrumento, el plomo *ZOED* colgado en el centro *O* del instrumento, esto es, el arco *GE*.

113 La medicion de los ángulos que se egecuta con un quadrante, ó una porcion qualquiera de círculo, es el fun-

fundamento de toda la Astronomía. Como su asunto es averiguar los movimientos de los cuerpos celestes, ha cumplido en señalando siempre que se ofrezca, la situacion *aparente* de los astros unos respecto de otros. Para esto basta saber que empezando desde un punto determinado del cielo, un astro ha andado un número determinado de grados, ó una porcion qualquiera de la circunferencia, mas que otro astro. Fig.

Si reparamos, por egemplo, que un astro dista de otro la mitad del cielo, esto es, 180°, de modo que esté respecto de él en una situacion diametralmente opuesta, esta será la mayor de todas las distancias aparentes. Quando observemos otro astro que estuviere á la mitad de este intervalo, y como en medio de los otros dos, diremos que está á 90° ó á un quadrante de distancia de cada uno; mediremos 30.
igualmente 30°, 15°, 5° de distancia aparente entre dos astros. Todas estas distancias se miden con presentar á los obgetos que se observan un arco de círculo como *CD*, cuyo centro ocupe nuestro ojo, y cuya parte *CD* sea semejante á la parte *AR* de la circunferencia celeste que se ha medir.

114 Mientras que toda la esfera gyra sobre sus dos polos *P* y *R*, los puntos del equador *EQ* trazan un círculo que es del mismo diámetro que la esfera; pero los puntos que están mas inmediatos á los polos, como el punto *A*, trazan círculos menores. Tal es el círculo *AB* cuyo centro está en el punto *D* del ege *PR*, y parece una elipse, porque se le vé de lado, y en perspectiva. Estos círculos 32.

Fig. menores se llaman *Paralelos al equador*, ó solamente *Paralelos*. Cada punto del cielo traza un paralelo al equador, tanto menor quanto el punto está mas inmediato al polo (94).

A todos estos paralelos *AB* los divide en dos partes iguales el círculo *HBPAO*; porque como su centro *D*, y su polo *P* están en el plano del meridiano, este plano pasa por su centro, y los corta por lo mismo en dos partes iguales (103). Así, el astro que puesto al principio en el punto *A* del meridiano, traza con su movimiento diurno el paralelo *AB*, estará tanto tiempo á la izquierda como á la derecha del meridiano, cuyo círculo dividirá en dos partes iguales el tiempo que dura su revolucion.

115 Quando todo el paralelo *AB* que anda la estrella estuviere encima del orizonte *HO*, se la verá pasar dos veces al dia por el meridiano, primero en *A*, y doce horas despues en *B*. Su mayor altura sobre el orizonte será en su paso superior por *A*, y su menor altura en su paso inferior por *B*. Pero si el paralelo de la estrella no tuviere mas que una corta porcion mas elevada que el orizonte, como el paralelo *MNL*, cuya parte *MN* mas alta que el orizonte, es mucho menor que la parte invisible *NL*, no será visible la estrella sino unas pocas horas de las 24 que dura la revolucion.

116 Considerando el movimiento diurno, hemos hallado algunos de los círculos que componen la esfera; es á saber, el orizonte, el meridiano, y el equador, y tambien los paralelos. Fáltanos dar noticia de los demás círculos,

pa-

para cuyo fin hemos de considerar el movimiento anuo. Fig.

Llámase *Movimiento anuo* ó *periódico* el movimiento con el qual parece que el sol se mueve, cuyo movimiento se llama *Movimiento propio.* De él pende la variedad de las estaciones, los calores del estío, y los rigores del invierno, como tambien la diferencia que en el discurso del año esperimentamos en los dias y noches, que son mas largas en una estacion que en otra.

117 Si por la tarde, despues de puesto el sol, se repara ácia poniente alguna estrella fija, y se la considera con atencion muchos dias de seguida á una misma hora, se *la verá cada dia* mas cerca del sol; por manera que al último desaparecerá, y la borrará la luz y el resplandor del sol, del qual estaba apartada al principio. Se echará de ver al mismo tiempo que el sol se habrá arrimado á la estrella, y no la estrella al sol. Porque si reparamos que todas las estrellas nacen y se ponen cada dia en unos mismos puntos del orizonte, estando siempre á la misma distancia unas de otras, siendo así que el sol nace y se pone cada dia en diferentes puntos del orizonte, y se halla á distintas distancias de unas mismas estrellas, no podremos menos de conocer que el sol habrá mudado de lugar respecto de la estrella, y se la habrá ido arrimando. Esta observacion se puede hacer en todos los tiempos del año, pero el que se emplee en ello deberá poner cuidado en no equivocar una estrella con un planeta.

118 Luego lo primero que se repara en el movimien-

Fig. to del sol, es que *este astro se vá arrimando cada dia á las estrellas que son mas orientales que él*; quiero decir, que camina ácia el oriente. Luego el movimiento propio del sol es de poniente á oriente, viene á caminar un grado cada dia, y al cabo de 365 dias se volverá á ver la estrella ácia poniente á la misma hora, en el mismo lugar donde pareció el año antes el mismo dia; esto es, el sol habrá vuelto al mismo punto respecto de la estrella; habrá concluido una revolucion; y esto es lo que propiamente se llama movimiento anuo.

33. 119 Para combinar el movimiento anuo con el movimiento diurno del sol, figurémonos un globo grande por cuyo centro pasa un ege cuyos estremos descansan en los puntos *P* y *R*, y dándole vueltas formaremos juicio del movimiento diurno. Si hubiere una mosca, por egemplo, en *A* á distancias iguales de ambos polos *P*, *R*, tendrá que dar vueltas con el globo, y trazará el equador. Si hubiere otra mosca en *B* mas cerca del un polo que del otro, trazará un paralelo, cuya circunferencia será menor. Pero mientras que el globo dá vueltas ácia una direccion, la mosca que suponemos en *A*, podria tambien caminar sensiblemente ácia la direccion contraria; entonces representaría el movimiento propio del sol, que vá caminando poco á poco ácia el oriente, mientras que se le lleva cada dia con todo el cielo ácia el occidente un movimiento comun.

120 Es, pues, este movimiento anuo ó propio del sol de occidente á oriente, contrario al movimiento diurno,

con

con el qual todo el cielo se mueve de oriente á occidente. Fig. El sol dá cada dia una revolucion al rededor de nosotros, pero al mismo tiempo anda un grado, con corta diferencia, ácia una direccion contraria, ó de occidente á oriente, y corresponde á diferentes puntos del cielo.

121 Despues de observado con cuidado este movimiento anuo se ha averiguado que su rastro forma un círculo llamado la *Eclíptica*, cuya posicion nos importa determinar.

Por decontado la eclíptica, el camino anuo y aparente del sol, es distinto del equador. La altura del equador respecto de los primeros Caldeos que observaban en Babylonia, era de 54°; y si el sol se hubiera movido con su movimiento anuo en el equador, le hubieran visto cada dia á la altura de 54° á mediodia. Pero observaron que en verano el sol subia 24° mas arriba del equador, y en invierno bajaba 24° mas abajo, por manera que su altura á mediodia era de 78° en estío, y de 30° no mas en invierno; de donde infirieron que la eclíptica era un círculo distinto del equador, y distante de él 24.° Echaron de ver que este círculo cortaba el equador en dos puntos, porque observaban dos veces al año, es á saber en la primavera y el otoño, que la altura del sol á mediodia era de 54°, la misma que la del equador; de donde resultaba que aquellos dos dias el sol estaba en el mismo equador, del qual tres meses antes se habia apartado 24° los dias de los dos *Solsticios*.

Por

Fig. 122 Por consiguiente, es la eclíptica un círculo de la esfera que corta el equador en dos puntos, del qual se aparta 24° al norte y al sur. Y como estas dos distancias son iguales, se sigue que la eclíptica es un círculo máximo de la esfera; por ser propiedad de los círculos máximos el cortarse en dos partes iguales. Averiguado esto, faltaba determinar en el cielo y entre las estrellas el rastro de la eclíptica, y las estrellas, por las quales debia pasar el sol cada dia del año.

123 Con esta mira se reparó desde luego que dos dias del año distantes seis meses uno de otro, el sol tenia 54° de altura meridiana, y por consiguiente la misma altura que el equador. A estos dos dias les llamaron *Dias de los Equinoccios*, porque como aquellos dias anda el sol el equador, está 12 horas sobre el orizonte, y 12 horas debajo, y los dias son iguales con las noches.

124 Con averiguar el dia del equinoccio de la primavera qué estrella ó punto del cielo pasaba por el meridiano, 12 horas despues del sol ó á media noche, á la misma altura que él, esto es á la misma altura que el equador, se supo con certeza el punto opuesto al sol, esto es, el equinoccio del otoño, y el lugar donde habia de estar el sol seis meses despues al pasar por el equador en el punto opuesto.

125 Los puntos de la eclíptica situados entre los dos equinoccios, y en los quales se halla el sol quando está mas distante del equador, se llaman *Solsticios*.

Está, pues, averiguado quanto se necesita para trazar

la

la eclíptica, pues conocemos los dos puntos equinocciales Fig.
donde corta el equador, y sabemos que si en otros tiempos se apartaba 24° del equador, no se aparta hoy dia mas que $23^{\circ}\frac{1}{2}$ al norte y al sur.

126 Despues de formado un globo artificial y señaladas en él las estrellas cuyas posiciones se han observado, trazando primero el equador, y los polos, se ha podido señalar tambien la eclíptica, y las estrellas por entre las quales este círculo habia de pasar.

127 Tambien se señalan en el globo dos círculos perpendiculares al equador, que pasan por los polos del mundo, el uno por los equinoccios, y el otro por los solsticios. Llámanse *Coluros*; el primero, *Coluro de los equinoccios*; el segundo, *Coluro de los solsticios.*

128 La distancia ó arco de $23^{\circ}\frac{1}{2}$ que en los sols- 33.
ticios hay entre el equador y la eclíptica, se llama la *Oblicuidad de la eclíptica.* Para determinar esta oblicuidad fue preciso averiguar quanto el sol subia en verano mas que el equador, y quanto bajaba en invierno (121), ó quanto mas alto se hallaba el sol en verano que en invierno; como se halló entre estas dos alturas una diferencia de 47°, la mitad de esta diferencia, es á saber, $23^{\circ}\frac{1}{2}$ determinó la mayor distancia entre la eclíptica y el equador. Esta oblicuidad es en estos tiempos de $23^{\circ}\,28'\,20''$, y mengua como $1'$ en 100 años.

129 Cada uno de los paralelos al equador, que el sol anda al parecer cada dia en virtud de su movimiento diurno, dis-

Fig. dista del equador tanto como el punto de la eclíptica donde se halla el sol. Quando el sol dista 10° del equador, ó tiene 10° de *declinacion*, anda un paralelo que dista 10° del equador, y pasa por el zenit de todos los paises de la tierra que están á la latitud de 10.° Quando llega á su mayor distancia *B*, que es de 23° $\frac{1}{2}$, traza su paralelo *BC* el mas apartado ó el menor de todos, y se le llama *Trópico.* Hay un trópico de cada lado del equador; el uno se llama *Trópico de Cancer*, porque el sol le anda el dia del solsticio de verano, quando entra en un grupo de estrellas llamado el *Signo de Cancer*; el otro se llama *Trópico de Capricornio*, porque el sol le anda el dia que entra en un grupo de estrellas llamado el *Signo de Capricornio.* Por consiguiente los dos trópicos abrazan todo el espacio donde puede hallarse el sol, cuyo espacio coge 47.° Los trópicos tocan la eclíptica, y se confunden con ella en los puntos solsticiales; esta es la causa porqué el sol quando se acerca el tiempo de los solsticios parece que permanece algunos dias en los trópicos, manteniéndose á la misma altura, como si se parára, y de aquí proviene el nombre de *Solsticio.*

130 Todos los círculos de que acabamos de hacer individual mencion, se vén, segun digimos (5), en la *Esfera armilar*, porque cada círculo parece un collar ó sortija, y la voz latina *armilla* significa lo mismo.

34. 131 El orizonte es el círculo *AGB*, sostenido por quatro pies clavados en el pie de la esfera.

El meridiano es el círculo *AZB*, perpendicular al ori-

orizonte, y por la parte de abajo está sujeto en una muesca Fig.
hecha al pie del instrumento, y por los lados en dos muescas hechas en el orizonte al norte y al mediodia. Estos dos círculos son inmóbiles.

132 Los círculos móbiles forman una como armazon, que dá vueltas al rededor de un ege *PR*. Hay quatro grandes, es á saber, el equador, la eclíptica, y los dos coluros que sirven para sostener la armadura, recibiendo á los demás círculos en unas muescas hechas á propósito. Hay tambien quatro círculos menores los dos trópicos *HM*, *DI*, y los dos círculos polares *XV*, *SO*.

Los dos círculos polares distan $23^{\circ} \frac{1}{2}$ de los polos del mundo, lo mismo que los trópicos distan del equador.

133 El *Zodiaco* es una banda celeste *HI*. Tiene 16° de ancho, es á saber, 8° de cada lado de la eclíptica, no se hace memoria de este círculo en la Astronomía, solo sirve para representar el espacio del qual no pasan los planetas, que en sus movimientos al rededor del sol se apartan como unos 8° de la eclíptica.

134 Lleva tambien la esfera una muestra *KL* dividida en 24 horas que sirve para resolver sin cálculo ninguno algunas cuestiones de Astronomía. El circulillo ó muestra está asegurado en el meridiano, estando su centro en el polo de la esfera; por consiguiente el estremo del ege ocupa el centro de la muestra, cuya mano dá vueltas en dándolas la esfera.

Ha-

Fig.

Hallar la altura del polo por medio de las estrellas circumpolares.

135 La disposicion de los tres círculos máximos de la esfera, el equador, el orizonte, y el meridiano es el fundamento de todas las observaciones, porque á los tres espresados círculos se refieren los astros para determinar su situacion y sus movimientos. Es, pues, de suma importancia conocer su situacion recíproca, cómo está situado el equador respecto de nuestro orizonte; quanto el polo es elevado del lado del norte, quánto el equador es elevado del lado del mediodia.

136 Una vez que el movimiento diurno se hace sobre el equador, este movimiento nos servirá para determinar el equador, y como dicho movimiento se hace al rededor de los polos, tambien nos los dará á conocer. Si la estrella polar (94) estuviera cabalmente en el mismo polo del mundo, bastaría medir su altura (110), y quedaría averiguada la altura del polo. Pero como la espresada estrella está á dos grados del polo, conforme consta de observaciones hechas con buenos instrumentos, y sumo cuidado, hemos de apelar á otro recurso.

29\. 137 La misma estrella polar nos le suministrará. Si
31\. la estrella *A* traza al rededor del polo *P* un círculo *AB*, si dicha estrella estuviera á 2° del polo, el arco *AP* será de dos grados, y tambien lo será el arco *PB*, y el arco total *APB* que espresa lo ancho del paralelo, será de 4°.

Por

Por consiguiente quando la estrella estuviere en el punto *A* del meridiano, y en la parte superior de su paralelo, tendrá respecto del orizonte una altura *AH*, quatro grados mayor que la altura *BH* quando la estrella 12 horas despues se hallare debajo del polo; y la diferencia de estas dos alturas será de 4.° Supongamos ahora que se haya observado la altura de la estrella en *A*, y su altura en *B*; para hallar la altura del polo *P* se deberá partir por medio la diferencia *AB* de las dos alturas; la mitad de esta diferencia será PB, se la añadirá á la altura *HB* mínima de la estrella, y la suma *HP* será la altura del polo. Fig.

138 *La altura del polo* y la altura del equador valen juntas 90°, de modo que dada la una de las dos se conoce la otra. Sea *P* el polo; *E*, el equador; *PH*, la altura del polo; *EO*, la del equador, el semicírculo *HZO* es la parte visible del cielo que coge 180.° Si de esta se resta el quadrante de círculo *PZE* que es la distancia del polo al equador, ó 90°, restarán por precision otros 90°; luego los arcos remanentes *HP* y *EO* valen juntos 90.° Luego *la altura del polo* HP *es el complemento de la altura del equador* EO. 29.

139 Síguese de aquí que la altura del equador es igual á la distancia del polo al zenit, esto es, á *PZ*. Porque *ZH* es de 90°, pues del zenit al orizonte hay un quadrante de círculo; así *HP* es el complemento de *PZ*. Pero hemos visto poco ha que *HP* es el complemento de *EO*, luego *PZ* = *EO*; quiero decir que la distancia del polo al

ze-

Fig. zenit es igual á la altura del equador.

140 De lo mismo se deduce que la distancia *ZE* del zenit al equador es igual á la altura del polo *PH*. Porque *ZH* es de 90° igualmente que *PE*; si restamos de cada uno la parte comun *PZ*, los arcos residuos *PH* y *ZE* serán iguales.

Trazar una linea meridiana.

141 La definicion que hemos dado (104 y 114) del meridiano y de los paralelos manifiesta que el meridiano divide en dos partes iguales y semejantes todos los arcos diurnos de los paralelos al equador. El sol al asomarse al orizonte sube por grados, llega á mediodia al punto mas alto del cielo, y vuelve á bajar ácia el poniente con la misma velocidad por los mismos grados, y en el mismo tiempo que puso para subir hasta el meridiano. Divide, pues, el meridiano en dos partes iguales la duracion de la aparicion del sol, y señala al mismo tiempo la altura máxima del sol.

142 Infiérense de aquí dos modos de averiguar la direccion del meridiano, y saber la hora de mediodia. El primero consiste en determinar el instante que el sol deja de subir, y las sombras de los cuerpos que alumbra son las mas cortas; entonces la sombra de una estaca ó un estilo plantado verticalmente, ó la de un plomo, señalará la direccion del meridiano, y formará lo que llamamos la *Linea Meridiana*, ó la seccion de los planos del orizonte y del meridiano.

Es-

Este método es poco exacto, porque no es posible conocer con bastante precision el instante de la altura máxima; al acercarse al mediodia, y quando la altura está para llegar á su máximo, crece con tanta lentitud que queda poca seguridad en la operacion. Fig.

143. Acudiremos por lo mismo á otro método. Este consiste en reparar la sombra del sol naciente y la del sol poniente, estas dos sombras están á igual distancia del meridiano, y el medio de estas dos sombras dará la del mediodia.

Sea el círculo *SMCBDA* que representa la circunferencia del orizonte; *S*, el sol naciente; *C*, el sol poniente; *P*, el pie de un estilo plantado perpendicularmente al orizonte; *PB*, la sombra del estilo quando el sol nace; *PA*, la sombra del mismo estilo quando el sol se pone. Si dividimos en dos partes iguales en el punto *M* el ángulo *SPC* ó el arco *SC*, la linea *MPD* será la meridiana, pues naciendo el sol en *S*, y poniéndose en *C*, estará á distancias iguales del meridiano que pasa por *M*. 35.

144 Pero se le hace alguna alteracion á este método, porque necesita su práctica un orizonte sumamente despejado. En lugar de los dos puntos del orizonte se substituyen otros dos puntos que estén ambos á igual altura, el uno antes de mediodia, y el otro despues. Si en vez de señalar la sombra del sol quando se hallaba en los puntos *S* y *C* del orizonte, la señalamos media hora despues de nacer, y media hora antes de ponerse, tendremos otras dos sombras *PF*,

Fig. *PG* mas inmediatas al meridiano y mas cortas, bien que á distancias iguales del meridiano. Con tomar el medio *H* de las dos sombras se trazará la linea meridiana *PHD*.

145 Se podrá, pues, trazar desde el centro *P* un arco como *FG*, se notará el momento en que la sombra de la mañana llegare á *F*, y la de por la tarde á *G* sobre el mismo arco; como estas dos sombras han de estar á igual distancia del meridiano, se dividirá el arco *FG* en dos partes iguales, y se determinará un punto *H*, por donde habrá de pasar la meridiana *PHD* tirada por el pie del estilo.

Para mayor exactitud, se podrán trazar varios círculos concéntricos, cada uno de los quales dará un punto particular de la meridiana. Mas adelante diremos cómo se le dá á este método toda la perfeccion que pide la importancia de la operacion.

146 Finalmente, en lugar del estilo que suponemos
36. plantado en *P*, puede servir un instrumento muy portatil y acomodado. Es una plancha *P* de unas 3 pulg. que lleva un agugero hecho con una punta de alfiler, por el qual se introduce un radio solar. Está sobre un pie *AB* de 7 ú 8 pulgadas, y el radio dá en la plancha *BD* del pie, ó en una mesa puesta á nivel. Desde el punto *C* que corresponde perpendicularmente debajo del agugero, y le señala un plomo *TC*, se trazan muchos círculos concéntricos; en cada círculo se señala el punto luminoso de por la mañana *K*, y el de por la tarde *L*; el medio *H* del intervalo determina la meridiana *CH*.

Si

147 Si se cubre la plancha con un gran pedazo de carton, el punto luminoso será mas perceptible, y esta es una ventaja del instrumento propuesto. Dá facilidad para poner á nivel la misma mesa por medio del instrumento; colgando en *P* un plomo puntiagudo, deberá corresponder exactamente al punto *C*, si el instrumento fuere bien hecho, y estuviere la mesa á nivel. Fig.

148 La linea meridiana es el primer fundamento de un observatorio; las mas de las observaciones suponen una buena meridiana; porque todas las teóricas astronómicas estrivan en las alturas tomadas al mediodia, y en los pasos por el mediodia.

Del Tiempo.

149 Como el movimiento de la tierra al rededor de su ege es uniforme, las revoluciones diurnas de los astros se hacen en tiempos iguales, y son por lo mismo muy á propósito para medir el tiempo. Pero ya que todos los astros gyran succesivamente unos despues de otros, y con un movimiento perpetuo, se debia escoger uno cuyas revoluciones contándolas desde un término fijo sirviesen para la espresada medida; y por ser el sol respecto de la tierra el mas resplandeciente de todos los astros, á él se le dió esta preferencia. Como el orizonte sensible donde el sol nace y se pone, es un círculo muy irregular, lleno de vapores que obscurecen, y desfiguran el sol, y los dias cuyos límites señala son muy desiguales, por estos motivos se ha tomado

Fig. el meridiano por término de las revoluciones diurnas.

150 Aunque dejamos dicho (118) que en el discurso de 365 dias el sol vuelve á una misma estrella, ó que un año dura 365 dias, no es exacta esta determinacion. Ya repararon los antiguos Astrónomos, despues de observar muchos años de seguida el regreso del sol al solsticio ó equinoccio, ó su paso por el equador, que en 60 años, de 365 dias cada uno, el sol no volvía al equador puntualmente, y que necesitaba 15 dias mas para hallarse en el mismo círculo. Infirieron de aquí con razon que la revolucion del sol no era de 365 dias cabales, sino de 365 dias y 6 horas, esto es de 365 dias y $\frac{1}{4}$, ó de 366 dias cada quatro años, y de $365^d + 15^d$ en 60 años.

151 Si partimos los 360° del círculo solar, ó los 1296000″ que valen, por 365 dias y $\frac{1}{4}$, hallaremos que el sol debería andar 59′ 8″ cada dia.

152 Pero quando los Astrónomos hubieron observado por espacio de un año el lugar verdadero del sol en la eclíptica todos los dias á mediodia, repararon que el sol no se hallaba donde debia en virtud de su movimiento medio; quiero decir, que no se hallaba donde correspondia si anduviese 59′ 8″ cada dia, de donde resultaba que en unos tiempos del año andaba mas que en otros. Con efecto, tambien enseña hoy dia la observacion que el movimiento verdadero de este astro no es igual á su movimiento medio, pues el dia primero de Abril el sol se halla donde debería estar el dia 3, ó dos dias mas tarde si hubie-

biera caminado uniformemente en la eclíptica desde el dia Fig.
primero de Enero. Al contrario, á primeros de Octubre el *sol* está la misma cantidad menos adelantado de lo que corresponde á su movimiento medio.

153 Como el movimiento diurno (149) es la medida del *tiempo*, este se mide muy naturalmente por me*dio de los* arcos del equador que pasan por el meridiano, porque en el discurso de 24 horas todo el equador pasa por el meridiano en virtud del movimiento diurno. Si á este movimiento en virtud del qual los 360^{o} de la esfera pasan por el *meridiano*, y dura 24^{h}, le dividimos en 24 *partes iguales, cada una será* de una hora, y corresponderá á 15^{o}, por ser 15 la 24^{ma} parte de 360. Prosiguiendo esta division se hallará que 1^{o} vale $4'$ de tiempo, $1'$ de grado vale $4''$ de tiempo; en general, con quadruplicar los minutos de grado quedan convertidos en segundos de tiempo del primer mobil.

La operacion contraria, es á saber, la que consiste en reducir el tiempo del primer mobil á grados, es tambien muy facil. Se darán 15^{o} á una hora, la quarta parte de los minutos de tiempo espresará grados, la quarta parte de los segundos de tiempo, valdrá minutos de grado, y la quarta parte de los terceros de tiempo, espresará segundos de grado.

154 Cuesta alguna mas dificultad el reducir los grados á horas solares medias. Hemos visto (118 y 151) como el *sol* anda en virtud de su movimiento propio $59' 8''$

Fig. cada dia respecto de las estrellas fijas; por consiguiente quando una estrella, que pasó por el meridiano á mediodia con el sol, parece que ha dado la vuelta al cielo, y ha vuelto al meridiano el dia siguiente, el sol no ha llegado todavía, porque en el intervalo de un mediodia á otro ha caminado cerca de un grado ácia el oriente. Dista, pues, de la estrella, y por consiguiente del meridiano como un grado; y como necesita 4′ de tiempo (153) para andar un grado con el movimiento diurno, pasará por el meridiano 4′ mas tarde que la estrella; ó, lo que es lo propio, la estrella pasará 4′ antes que el sol. Porque como el sol es para nosotros el obgeto mas reparable, le tomamos por término de comparacion; su regreso señala nuestras 24 horas; y decimos que las estrellas vuelven al meridiano en 23 horas 56 minutos, siendo así que el sol vuelve en 24 horas.

Los reloges de péndola, que mas comunmente se llaman *Péndolas*, están arregladas por el movimiento medio del sol, señalan las horas solares medias; quiero decir, que estos reloges han de concordar al cabo de un año con el sol, así como concordaban al principio del año, y han de señalar cada dia $23^h 56'$ en el intervalo del paso de una estrella por el meridiano al paso siguiente. Los mas de los Astrónomos arreglan sus reloges del mismo modo, á fin de que el relox señale con corta diferencia la hora que es para los usos de la sociedad, y con corta diferencia el tiempo verdadero de las diferentes observaciones que han de hacer.

Sin

Sin embargo, como las estrellas se mantienen fijas, siendo así que el sol camina, ó parece que camina un grado cada dia, mas ó menos, el regreso de una estrella al meridiano sería una medida mucho mas fija y mas igual que el regreso del sol; el regreso de la estrella nos manifiesta el movimiento cabal de la esfera, y la rotacion completa de la tierra. Por este motivo algunos Astrónomos de gran autoridad arreglaron sus reloges por las estrellas, que por consiguiente adelantaban 4′ cada dia respecto del sol. Hallaban en esta práctica la ventaja de que al cabo de una hora señalada por este *relox*, estaban seguros de que habian pasado por *el meridiano* 15° de la esfera estrellada. Este es el tiempo que llamamos tiempo del primer mobil, una hora del qual *siempre* corresponde á 15° del cielo en virtud del movimiento diurno y comun. Fig.

155 Las horas solares son mas largas que las horas del primer *mobil*, pues el sol gasta 4′ mas que una estrella para volver al meridiano. Hablaremos por ahora de las horas solares medias, esto es, de las que el sol señala prescindiendo de las desigualdades de su movimiento (152); en otro lugar hablaremos de las horas solares verdaderas que no gozan la misma uniformidad.

Las 24 horas corresponden á 360° 59′ 8″, porque en 24 horas solares medias, no solo la estrella vuelve al meridiano, cuyo regreso completa los 360°, mas el sol mismo que habia caminado 59′ 8″ en una direccion contraria, llega tambien despues, y este regreso completa las

Fig. 24 horas solares medias. Un relox arreglado por estas 24 horas ya no señala 15° por hora, sino 15° 2′ 8″, que son la 24ma parte de 360° 59′ 8″, y lo propio debe entenderse de las demas partes del tiempo. Esto se llama *convertir las horas solares medias en grados.* En una Obra que la Real Academia de las Ciencias de París publica todos los años con este título : *Connoissance des Temps*, hay una tabla para hacer esta reduccion, cuya tabla es de un uso continuo para los Astrónomos, cuyos reloges siguen las horas solares medias, y toman, en algunas observaciones, por cada hora de su relox 15° 2′ 8″ de la esfera estrellada.

156 Tambien se halla en la misma obra una tabla para egecutar la operacion contraria, ó para reducir las partes del equador á horas solares medias. Manifiesta esta tabla que 15° de la esfera corresponden á 59′ 50″ del relox arreglado por el movimiento medio, y que 360° hacen 23^h 56′ 4″$\frac{1}{10}$ de tiempo que gastan las estrellas en volver al meridiano.

157 Los reloges arreglados por las horas del primer mobil, que siguen el movimiento diurno de las estrellas (154), adelantan 3′ 56″ cada dia á mediodia medio, respecto del movimiento medio del sol, y nunca señalan la hora del sol á excepcion del dia del equinoccio. Hay una ventaja en este modo de arreglar los reloges, y es que las estrellas pasan todos los dias por el meridiano á la misma hora contada en el relox, siendo así que pasaban 3′ 56″ antes respec-

to

to de los demás reloges, pero este *antes* se refería al sol, Fig. por el qual se estila arreglar los reloges ordinarios. Es de mucho recurso para los que observan muchas estrellas en el meridiano, el saber con dar una mirada á su relox quál es la ascension recta de la estrella que está para pasar; pero tambien tiene esta práctica el inconveniente que es preciso hacer una regla de tres para saber quál es el tiempo verdadero de cada observacion, y para disponerse para observar el paso del sol, y de cada estrella por el meridiano.

158 La aceleracion diurna de las estrellas fijas es la cantidad que una estrella precede cada dia al sol, valuada en tiempo solar medio, en el instante que la estrella pasa por el meridiano. Es la cantidad que tiene que andar entonces el sol para llegar al meridiano, ó el tiempo que necesita para andar los $59' 8''$ que anda cada dia ácia el oriente respecto de la estrella en 24 horas solares medias. Esta aceleracion se determina por esta proporcion $360^\circ\ 59' 8'' 2041$ son á 24 horas, como $360^\circ\ 0'\ 0''$ son á $23^h\ 56'\ 4'' 098$, este es el tiempo que gasta la estrella en andar los 360° ó en volver al meridiano; para las 24 horas faltan $3' 55' 902$, esta es la aceleracion diaria de las estrellas.

159 Quando un relox arreglado por las estrellas fijas ha acabado sus 24 horas, el sol está todavía á $59'$ de distancia del meridiano; y quando el sol llega al meridiano, el relox ha de señalar algo mas; este exceso se saca haciendo esta proporcion 360° son á 24 horas, como $59' 8'' 2041$ son á $3' 56'' 547$, esta es la cantidad que el sol adelan-

ta-

Fig. tará cada dia en 24 horas; pero no es ésta cantidad la que llamamos aceleracion de las estrellas.

160 El relox arreglado por las estrellas fijas, ó por el primer mobil, siempre señala $0^h\ 0'\ 0''$ en el instante que el equinoccio pasa por el meridiano, y siempre señala la ascension recta del *Punto culminante*, esto es, del punto de la eclíptica que está en el meridiano, convertida en tiempo á razon de 15° por hora. Porque, segun declararemos mas por menor en adelante, la ascension recta de un astro es el tiempo que pasa por el meridiano mas tarde que el punto equinoccial; y si un astro pasa por el meridiano una hora, y otro dos horas despues que pasó el punto del equinoccio, se dice que la diferencia de ascension recta entre los dos astros es de una hora. Por consiguiente, en el momento que el sol está en el meridiano, el relox de las estrellas señala la ascension recta del sol en tiempo, y para saber qué hora señalará cada dia á mediodia, basta convertir en tiempo la ascension recta del sol para el dia propuesto.

161 Cada dia se empieza á contar desde un mediodia para otro; se dice que es una hora de tiempo verdadero quando el sol ha andado la 24^{ma} parte de la revolucion de un mediodia para otro, y para hallar el tiempo verdadero de una observacion, basta saber á qué parte se halla el sol de las 24 horas, ó de los 360° que ván de un mediodia á otro, cuya operacion declararemos mas adelante.

De

Fig.

De las Longitudes y Latitudes Geográficas.

162 Hay tambien en la tierra un equador, y dos polos; y así como el equador celeste determina las estaciones, el terrestre determina el temple, y el grado de calor ó frio que se esperimenta en las diferentes regiones.

Se repararon desde luego las estrellas que en el cielo corresponden al equador, ó estaban á igual distancia de ambos polos celestes. Viajando despues por la tierra notaron los hombres observadores, al ir ácia el mediodia, que dichas estrellas se acercaban á la vertical, y pasaban por *el meridiano mas cerca del* zenit á medida que eran mas meridionales los paises donde se hallaban.

163 Echaron de ver que caminando todavía mas al mediodia llegarian á los parages de la tierra donde dichas estrellas pasan cabalmente por el zenit, y los polos están en el orizonte, y que entonces estarian debajo del equador celeste *ó sobre* el equador terrestre, porque el uno corresponde al otro, están en un solo y mismo plano, pues el equador celeste determina el terrestre.

164 El equador terrestre ó *Linea Equinoccial* dá la vuelta á la tierra, pasa por medio del Africa, por los Estados poco conocidos del Macoco y del Monoemugi, atraviesa el mar de las Indias, las Islas de Sumatra y de Borneo, y la vasta estension del mar Pacífico. El equador atraviesa despues la América Meridional, desde la Provincia de Quito en el *Perú*, hasta el desaguadero del rio de las Amazonas.

Los

Fig. Los paises que están sobre esta linea no tienen latitud alguna. A medida que nos vamos apartando del equador para ir ácia los polos, decimos que abanzamos en latitud; á un grado de distancia del equador decimos que estamos á un grado de latitud. Es, pues, la *Latitud* la distancia á que estamos del equador, medida ácia el sur ó ácia el norte; llámase *Latitud septentrional* la distancia al equador respecto de los paises que están del lado del norte; y *Latitud meridional* ó *austral* la que se cuenta del otro lado de la linea. La latitud no puede pasar de 90°, porque no hay mas que 90° desde el equador á los polos.

29. 165 La altura del polo (137) es igual á la latitud. Porque la latitud de un lugar qualquiera es lo mismo que la distancia de dicho lugar al equador terrestre, ó la distancia de su zenit al equador celeste, esto es, ZE; pero $ZE = PH$ (140); luego la latitud es igual á la altura del polo.

166 No basta medir las distancias de norte á sur con el nombre de latitud, es tambien preciso medirlas de occidente á oriente. Las distancias contadas en esta última direccion se llaman *Longitudes*, porque los paises conocidos de los antiguos cogian mas de largo de occidente á oriente, que de norte á sur.

33. Para medir las longitudes se conciben muchos círculos perpendiculares al equador, que pasan por los dos polos de la tierra, como PQR, PSR, y son los meridianos terrestres; todos los paises que están sobre un mismo meridiano tienen una misma longitud.

El

167 El primer meridiano, aquel desde el qual se cuentan las longitudes, es arbitrario y de convenio, porque en el cielo no hay ningun término fijo para las longitudes, siendo así que el equador lo es para contar las latitudes. Fig.

Ptolomeo puso el primer meridiano en las Islas Canarías que eran las últimas tierras que se conocian de su tiempo del lado del occidente. Los Franceses le han señalado en virtud de una Pragmática de Luis XIII en el estremo de la Isla del Hierro, la mas occidental de las Canarias, cuya Isla está 19° 53′ 45″ al occidente de París. Pero el célebre Geógrafo Frances *Delisle* supuso, para mayor facilidad, y en números redondos, que París está á 20° de longitud, y todos los Geógrafos de su nacion le han seguido en esta determinacion. Así los Franceses ponen su primer meridiano universal á 20° del meridiano de París del lado del occidente, y prosiguen contando ácia el oriente hasta 360° dando la vuelta á la tierra.

168 Los Astrónomos Franceses que suelen determinar las longitudes comparando las observaciones hechas en París con las que se hacen en otros parages de la tierra, tienen otro modo de contar. Cuentan no por grados sino por tiempo, la diferencia de los meridianos ó la diferencia de longitud entre París, y los demás paises; quince grados de longitud componen una hora, cada grado vale 4 minutos de tiempo; y en vez de decir, por egemplo, que Poitiers está á 18° de longitud, porque esta ciudad es 2° mas oc-

Fig. occidental que París, dicen que la diferencia de los meridianos es de 8′ occidental.

Los Olandeses ponen su primer meridiano en el pico de Tenerife, que es una de las montañas mas altas del mundo.

Los Arabes ponen su primer meridiano en el Estrecho de Gibraltar; y algunos Geógrafos nuestros le pusieron en Toledo.

169 Las diferencias de los meridianos, manifiestan la diferencia de las horas que se cuentan en un mismo tiempo en diferentes países ó ciudades. Un observador que caminase 15° mas al oriente de lo que está París, pongo por caso hasta Viena de Austria, contaría una hora mas que en París; porque como caminaría ácia el sol que dá la vuelta cada dia de oriente á poniente, le vería una hora antes que los vecinos de París. Si prosiguiera caminando de este modo de 15 en 15° ácia el oriente, ganaría una hora cada vez; y si llegase á dar toda la vuelta á la tierra, tendría adelantadas 24 horas al llegar á París, y contaría un dia mas que los de París, estaría en Lunes quando los moradores de París no estarían mas que en Domingo.

Un observador que caminase ácia el occidente se atrasaría la misma cantidad, y al llegar á París, despues de dar la vuelta á la tierra, estaría en Sabado, quando los de París estarian en Domingo.

170 La determinacion de las longitudes es un punto muy importante y dificultoso. Se trata de saber, por egemplo,

plo, quánto el meridiano de París dista del de la Martinica, Fig.
ó quánto se ha de caminar ácia el occidente para llegar á la Martinica. El método que siguen los Astrónomos para conseguir esta determinacion consiste en buscar en el cielo un fenómeno ó una señal que se pueda ver en un mismo instante desde París y la Martinica, pongo por caso el instante en que empieza un eclipse de luna. Si son las 12 de la noche quando el eclipse empieza, y se contaron en el mismo instante $4^h\ 13'$ de la madrugada en París, es constante que habrá $4^h\ 13'$ de tiempo, ó $63^\circ\ 15'$ de arco entre el meridiano de París, y el de la Martinica.

Con efecto, el sol gasta 24 horas en dar la vuelta á la tierra, y una hora en andar 15 grados. Si los de la Martinica tuvieren mediodia una hora mas tarde que los de París, sería señal cierta de estar la Martinica 15° mas al occidente que París. Pero como le tienen $4^h\ 13'$ mas tarde, segun consta de la observacion, está por lo mismo la Martinica $63^\circ \frac{1}{4}$ mas al occidente que París; porque $4^h\ 13'$ á razon de 15° por hora y de 1° por 4 minutos de tiempo, son $63^\circ \frac{1}{4}$.

De la Esfera recta, oblicua, y paralela.

171 Hay tres posiciones distintas de la esfera armi- 37.
lar correspondientes á tres situaciones diferentes de los pai- 38.
ses de la tierra; es á saber la esfera recta, la esfera obli- 39.
cua, la esfera paralela, conforme el equador corta á ángulos rectos el orizonte, le corta oblicuamente, ó es paralelo

con

Fig. con él. Las apariencias del movimiento diurno son muy distintas en estas tres posiciones, conforme vamos á declarar. Pero dos causas contribuyen para que el dia sea mas largo de lo que corresponde á la situacion de la esfera; es á saber, la refraccion de la luz, y la luz crepuscular.

172 La refraccion es causa de que los rayos del sol se tuercen (VI. 104 y sig.), y llegan á nosotros antes de lo que llegarian por la linea recta. Es causa esta refraccion de que quando el borde superior del sol llega al orizonte, de modo que no hace mas que empezar á dejarse ver, estando todavía debajo del orizonte el disco entero, la refraccion hace que le veamos todo entero, por manera que entonces su borde inferior toca el orizonte, y el efecto de la refraccion es igual al diámetro del sol.

173 La luz crepuscular es aquella luz suave y apacible de la aurora, que vemos crecer poco á poco por la mañana antes que nazca el sol, y mengua por la tarde despues de puesto el sol. Proviene este crepúsculo de la dispersion que padecen los rayos del sol en la masa del ayre que los reflecte ácia todas partes. El crepúsculo dura toda la noche en los paises que tienen mas de 48° $\frac{1}{2}$ de latitud; si hubiese habitantes debajo del polo, estos tendrian un crepúsculo de tres semanas, de suerte que las tinieblas durarian para ellos seis semanas menos por razon del crepúsculo, sin que el sol pareciese en su orizonte. En lo que vamos á decir prescindiremos de estas dos causas.

38. 174 La esfera recta, esto es, aquella en la qual el

equa-

equador *EV* es perpendicular al orizonte *HO*, es la de los Fig.
que habitan debajo del equador, como los moradores de Quito. Alli los dos polos siempre están en el orizonte; todos los paralelos al equador, como *PA*, están divididos por el orizonte en dos partes iguales; por consiguiente todos los dias son iguales unos con otros, y con las noches todo el año.

175 El sol pasa dos veces al año por el zenit, es á saber los dias 21 de Marzo, y 23 de Septiembre, cuyos dias el sol anda el equador que pasa por el zenit de aquellos pueblos.

176 En la esfera recta está el sol del lado del norte, y la sombra del lado del sur la mitad del año, desde 21 de Marzo hasta 23 de Septiembre, lo contrario sucede desde 23 de Septiembre hasta 21 de Marzo; y los dias del equinoccio, no hay sombra ninguna á las doce del dia.

177 Todas las estrellas se vén encima del orizonte en el discurso de 24 horas, porque dando la vuelta están 12 horas encima, 12 horas debajo; siendo así que en las demás posiciones de la esfera hay estrellas que jamas se vén.

178 Finalmente se ven nacer el sol, y todos los demás astros perpendicularmente al orizonte.

179 La *Esfera oblicua* es la de todos los paises de 37.
la tierra que no están ni debajo del equador, ni debajo de 40.
los polos, ora estén en el emisferio boreal, ora estén en el emisferio austral que tiene el polo antárctico elevado sobre el ori-

Fig. orizonte, del mismo modo que para nuestros climas el polo ártico es el polo elevado.

En la esfera oblicua está el equador en situacion oblícua respecto del orizonte; el orizonte divide en dos partes desiguales los paralelos al equador; el dia no es igual con la noche sino los dias 21 de Marzo, y 23 de Septiembre, que son los dias de los equinoccios, andando el sol el equador que el orizonte parte en dos partes iguales.

180 En los paises septentrionales, qual es Europa, tenemos los dias mas largos quando el sol está en la parte
40. septentrional del cielo, y traza los paralelos como *AB*, que tienen mas arriba del orizonte su mayor porcion *AD*. En los paises meridionales, quales son Africa, y parte de la America Meridional, los dias mas largos son quando el sol está en la parte meridional del cielo, porque entonces el sol anda los paralelos, cuya porcion mayor está encima del orizonte.

37. Porque el ege del mundo *PR* pasa por los centros *K*, *C*, *N* de todos los paralelos; pero la parte meridional *CR* del ege está mas alta que el orizonte en los paises meridionales; luego los paralelos tienen allí sus centros mas elevados que el orizonte; luego los arcos diurnos de dichos paralelos son mayores que los arcos nocturnos; luego los dias son allí mas largos que las noches, quando el sol está en la parte meridional del cielo.

181 Los arcos diurnos ó superiores de los paralelos
29. son tanto mayores, quanto mas próximos están al polo ele-

va-

vado. Así, el paralelo cuyo diámetro es *IG* tiene su parte diurna *GΥ* mucho mayor respecto de su parte nocturna *IΥ*, que el paralelo *KL*, cuyas dos porciones son *KN* y *NL*. Porque como el ege del mundo *RCP* se vá apartando mas y mas del orizonte *OH*, el centro *X* del paralelo *GI* está mas elevado que el centro *V* del paralelo *KL*. Fig.

182 El arco diurno del trópico de cancer es por lo mismo el mayor de todos los arcos diurnos del sol respecto de los paises septentrionales, porque entre todos los paralelos el trópico de cancer es el mas inmediato al polo. Esta es la razon por qué el dia mas largo del año es el dia que el sol anda el trópico de cancer, esto es, el dia del solsticio de estío; por la misma razon la noche mas larga de todo el año es la del solsticio de invierno.

183 En la esfera oblicua, del mismo modo que en la esfera recta, el dia es igual con la noche en los equinoccios, porque entonces el sol anda el equador, y porque un orizonte qualquiera divide el equador en dos partes iguales, conforme requiere la naturaleza de los círculos máximos.

184 En la esfera oblicua boreal el sol sube desde 21 de Diciembre, dia del solsticio de invierno, hasta 21 de Junio, dia del solsticio de estío, porque cada dia se acerca al norte una corta cantidad; crecen los dias y menguan las noches, porque los arcos diurnos de los paralelos ván siendo mayores.

185 Los dias igualmente distantes de un mismo solsticio son iguales; así los dias 20 de Mayo, y 23 de Julio

Fig. el sol se pone en París á las $7^h\ 43'$, porque hallándose aquellos dos dias 20° distante del equador, ó lo que es lo mismo siendo de 20° la declinacion del sol, traza el mismo paralelo el dia 20 de Mayo al apartarse del equador subiendo ácia el trópico, que el dia 23 de Julio al acercarse al equador despues del solsticio de estío.

186 Quando el sol tiene 20° de declinacion austral, los dias 20 de Enero, y 21 de Noviembre, el dia es tan largo como era la noche en el primer caso, y la noche dura lo que duraba el dia quando el sol andaba el paralelo semejante al norte del equador; porque á 20° del equador los paralelos son iguales, é igualmente cortados por el orizonte, bien que al reves el paralelo del norte respecto

29. del paralelo del sur. Porque si el paralelo *MDL* dista tanto del equador *ECQ* ácia el mediodia, como el paralelo *KVNL* dista por la parte del norte; quiero decir, si $CW = CV$, entonces la cantidad *DW* será igual á la cantidad *VN*, pues los triángulos *CDW* y *CVN* serán semejantes. Pero $WM = VL$, una vez que los dos paralelos están á la misma distancia del equador; luego las partes restantes *DM* y *NL* serán iguales; quiero decir, que el arco diurno del uno de los paralelos será igual con el arco nocturno del otro, y la noche de 20 de Mayo será igual al dia de 20 de Enero.

187 Dos paises que están á latitudes iguales, el uno al norte del equador, el otro al sur, tienen estaciones siempre opuestas; la primavera del uno es el otoño del otro; el es-

estío del primero es el invierno del segundo, porque los Fig.
arcos diurnos del lado del norte son iguales á los arcos nocturnos del lado del mediodia, tomándolos en unos mismos dias. Comparemos con efecto una con otra las dos figuras; 40.
en la una el polo septentrional *P* está mas arriba del ori- 37.
zonte; en la otra, el polo meridional *R* es el que está mas arriba del orizonte. El paralelo *GL* en ambas figuras está al mediodia del equador; pero en la primera figura el mediodia está en la parte de abajo, y en la segunda está en la de arriba; en la primera figura el arco diurno *GM* es menor que el arco nocturno *ML*; siendo así que en la segunda el arco diurno *GM* es el mayor; el arco nocturno *LM* de la primera figura es igual al arco diurno *GM* de la segunda; quiero decir, que los paises que están por egemplo á 30° de latitud boreal, tienen el dia igual con la noche de los que están á los 30° de latitud meridional, y el uno tiene el invierno quando el otro el verano.

188 Los paises que están debajo de un mismo paralelo de un mismo lado del equador, tienen los dias iguales, la misma estacion, haya entre ellos la distancia que hubiere. Porque como tienen la misma altura de polo, y el ege del mundo está situado de un mismo modo respecto del orizonte de ambos, todos los paralelos están cortados de un mismo modo.

189 La *Esfera paralela* es aquella que tiene el orizonte paralelo al equador, cuyo equador se confunde con el orizonte. No hay en la superficie de la tierra mas que dos

Fig. puntos á los quales pertenezca esta esfera, es á saber, los dos polos, y como estos dos puntos son inhabitados é inhabitables, hablaremos muy poco de la esfera paralela.

En esta esfera el polo celeste *P* está al zenit, el año se
39. compone de un dia, y una noche que duran seis meses cada uno. Todo el tiempo que el sol permanece en la parte septentrional, el polo boreal está iluminado sin interrupcion; todos los paralelos que traza desde el equador hasta el trópico de cancer *TR*, están mas altos que el orizonte al qual son paralelos; por consiguiente el sol dá cada dia la vuelta al cielo sin mudar de altura, sin apartarse, ni arrimarse al orizonte sensiblemente por lo menos. Quando el sol pasa despues á la parte meridional del equador, no parece mas sobre el orizonte; los paralelos que traza están todos en el emisferio inferior é invisible, y hay una obscuridad de seis meses. Hemos de exceptuar el crepúsculo que empieza 52 dias antes que el sol se dege ver sobre el orizonte, y acaba 53 dias despues que el sol desapareció totalmente.

190 La sombra de los cuerpos dá la vuelta cada dia sin crecer ni menguar, su marcha es uniformemente circular. En la esfera paralela las estrellas jamás se ponen, se mantienen constantemente á la misma altura sobre el orizonte, la mitad del cielo es siempre visible, y las estrellas del otro emisferio nunca parecen.

191 En lo que digimos de las latitudes terrestres y situaciones de la esfera (162 y 171) se funda la division que los Geógrafos han hecho de la superficie de la tierra en cin-

cinco zonas ó bandas circulares, que son la *Zona tórrida*, las dos *Zonas templadas*, y las dos *Zonas glaciales*. Fig.

192 La zona tórrida *KMLLK* coge $23^{\circ}\frac{1}{2}$ al uno y otro lado del equador; abraza todos los paises que están entre los dos trópicos, y cuyos moradores pueden tener el sol á su zenit. 29.

193 Las zonas templadas *ABLK*, *MLTS* cogen 43° contados desde cada trópico, la una está al norte del trópico de cancer, la otra al sur del trópico de capricornio. En estas dos zonas están los paises que nunca tienen el sol á su zenit, ni dejan de verle en invierno. Los paises que están á $66^{\circ}\frac{1}{2}$ de latitud boreal, no tienen el equador elevado mas que $23^{\circ}\frac{1}{2}$ (138); y por consiguiente quando el sol en el solsticio de invierno está $23^{\circ}\frac{1}{2}$ debajo del equador, no sube mas arriba del orizonte, y no hace mas que dejarse ver en el orizonte mismo en el instante del mediodia.

194 Mas allá de los $66^{\circ}\frac{1}{2}$ de latitud, llega tiempo que no se vé el sol, en las inmediaciones del solsticio de invierno; allí empieza la zona glacial, y coge hasta el polo. Sabemos que la zona glacial del norte es habitada, pues en ella están Laponia y Siberia, lo demás es un mar inmenso hasta el polo. La zona glacial del sur es totalmente desconocida.

195 Llamamos *Círculo polar* un círculo menor *AB* de la esfera terrestre paralelo al equador, que está á los $66^{\circ}\frac{1}{2}$ de latitud boreal, cuya circunferencia coge todo el espacio 29.

Fig. *APB* que hemos llamado zona glacial. Hay dos círculos polares *AB*, *ST*, y dos zonas glaciales; la una coge desde el un círculo polar hasta el polo septentrional; la otra, desde el otro círculo polar hasta el polo antártico ó meridional de la tierra.

De los Antípodas.

196 Llamamos *Antípodas* dos paises de la tierra que están en los estremos de una linea recta que pasa por el centro de la tierra. Así la Ciudad de Lima en el Perú es antípoda de Siam, Ciudad de la India; Buenos-Ayres es antípoda de Pekin, Capital de China, pruébase por medio de las longitudes y latitudes observadas de las espresadas Ciudades.

197 Ha mas de dos mil años que los sabios, despues de averiguada la redondez de la tierra, tienen por cierto que los antípodas de un lugar habitado son tambien habitados. Solo en los tiempos de una estúpida ignorancia, quando estuvo abandonado el estudio de las Matemáticas, pudo haber acerca de esto alguna duda.

198 Muchos no conciben cómo pueden ser habitados dos paises antípodas uno de otro, de modo que sus pies se correspondan; les parece que los moradores de alguno de los dos paises han de estar con la cabeza ácia abajo y patas arriba. Pero ningun escrúpulo tendrá acerca de esto el que considerare que hay una fuerza llamada *Gravedad*, gravitacion ó atraccion, cuya causa ignoramos, y que obra en

to-

todos los puntos de nuestro globo. En todas partes los cuerpos tienen una tendencia ácia el centro de la tierra, en virtud de un conato constante é inalterable; en todas partes se dice que lo que cae baja, y que sube todo lo que se aparta del centro de la tierra. Así, el cuerpo *A* impelido ó atrahido ácia el centro *C* del globo terrestre, en la direccion *ABC*, ó el cuerpo *E*, atrahido en una direccion contraria *EDC*, caen y bajan ambos ácia la tierra, porque su inclinacion natural es acercarse al centro *C*. Un hombre puesto en B verá caerle encima la lluvia desde *A* á *B*, y el que vive en sus antípodas *D* verá caer la lluvia sobre la tierra en la direccion *ED*; verdad es que son dos direcciones diferentes, pero son igualmente naturales, porque el centro *C* de la tierra es el paradero comun, el punto de reunion de la lluvia y demás cuerpos graves. Fig. 41.

199 Se nos preguntará tal vez por que si el cuerpo *A* baja de *A* á *B*, el otro no ha de bajar de *D* á *E* y *F*. Responderemos que el cuerpo *A* no baja ácia *B*, sino porque hay una fuerza que le precisa á acercarse al centro de la tierra, siendo así que no hay nada por la parte de *F*, ni fuerza, ni causa alguna de movimiento que pueda obligar el cuerpo *E* á moverse. No tiene mas que una inclinacion natural ácia la tierra, y quando vá desde *E* ácia *D*, sigue el mismo impulso, y se mueve del mismo modo que el cuerpo *A* quando baja ácia *B*.

200 Muchos no alcanzan cómo se quedan las estrellas colgadas, cómo el sol no se nos cae encima, y se mantiene

Fig. ne la tierra en su sitio. Lo alcanzarán si consideran que ningun cuerpo muda de sitio sino quando obra en él alguna causa motriz; las estrellas no están ni necesitan estar colgadas, porque nada las mueve de su lugar, y basta que estén una vez en un sitio para permanecer en él. Las cosas que tienen alguna disposicion para caerse son las que se han de sostener, y las estrellas ninguna tendencia tienen ácia la tierra, de la qual se hallan á una distancia prodigiosa.

Del Systema del mundo.

201 Si la multitud y estension de los asuntos que he ofrecido tratar en estos Elementos lo consintiera, sería este el lugar de dar á conocer los systémas mas afamados que han inventado los Astrónomos. Una vez que me es forzoso ceñirme, solo propondré el mas celebrado de todos, renovado en el siglo XV por Nicolas Copérnic, Canónigo de Thorn, Ciudad de Polonia, cuyo systema tienen dias ha muchas naciones ilustradas de Europa por el verdadero systema de la naturaleza. Pero yo, receloso de que se me dé en cara con que me está prohibido ser tan arrojado ó tan crédulo, me contentaré con proponerle sencillamente, y si añado despues los argumentos con que se han dejado preocupar á su favor algunos Filósofos, es con la mira no mas de hacer patente quan fundada vá la autoridad de los hombres en atajar lo que llama demasías de la razon humana.

42. 202 En el systema Copernicano el sol S ocupa el centro del systema, al rededor del sol se mueven de occiden-

dente á oriente, ó en la direccion *ABCD*, Mercurio ☿, Fig.
Venus ♀, la Tierra ♁, Marte ♂, Júpiter ♃, Saturno ♄.

203 Mercurio que está mas inmediato al sol, concluye su revolucion en 3 meses; Venus, cuya orbita es algo mayor, gasta 8 meses con corta diferencia en andar la suya. Mas allá de Venus está la Tierra que dá la vuelta en el discurso de un año, manteniéndose su ege constantemente paralelo á sí mismo. Marte gasta 2 años; pero Júpiter que está mucho mas lejos, tarda 12 años en andar su orbita. Finalmente Saturno es de todos los Planetas el que mas tiempo pone en andar su orbita al rededor del sol. La orbita de este planeta abraza, segun se vé, las orbitas de todos los demás, y se ha observado que su revolucion periódica dura 30 años.*

204 La Tierra, además del movimiento anuo, ó de traslacion al rededor del sol, tiene un movimiento de rotacion, llamado *Movimiento diurno*, porque en virtud de este movimiento dá en el discurso de 24 horas ó de un dia una vuelta al rededor de su ege.

205 Todos estos planetas son los planetas primarios, entre los quales hay tres; es á saber, la Tierra, Júpiter y Saturno que ván acompañados de sus satélites en el discurso de sus movimientos al rededor del sol. Los *Satélites* ó lunas dán su vuelta al rededor de su planeta principal. La tierra no tiene mas que una luna que la acompaña al rededor

* Mas adelante se determinarán con toda puntualidad estas distancias, y los tiempos que duran estas revoluciones, lo propio se practicará respecto de los satélites.

Fig. dor del sol todo el tiempo que tarda en andar su orbita, dando la luna una revolucion cada mes al rededor de la tierra que ocupa el centro de sus movimientos.

A Júpiter le siguen quatro satélites que gyran al rededor de él en tiempos diferentes, concluyendo sus revoluciones en tanto menos tiempo quanto mas próximos están al planeta principal. El primer satélite que dista del centro de Júpiter tres veces el diámetro de este planeta, ó mas exactamente $2\frac{5}{6}$, dá la vuelta en un dia, y 18 horas; el segundo que dista $4\frac{1}{2}$ diámetros, concluye su revolucion en tres dias, y 13 horas; el tercero que dista de Júpiter $7\frac{1}{2}$ diámetros de este planeta, acaba su revolucion en siete dias y 3 horas; el quarto finalmente gasta 16 dias y 18 horas en dar la vuelta, distando como unos $12\frac{2}{3}$ diámetros de Júpiter del mismo planeta.

Saturno tiene cinco satélites. El primero acaba su revolucion al rededor del planeta principal en $1\frac{7}{8}$ de dia, siendo de $4\frac{3}{4}$ semidiámetros de Saturno su distancia al centro de este planeta; el segundo satélite la concluye en 2 dias 17 horas, y dista del centro de su revolucion $5\frac{3}{5}$ semidiámetros de Saturno; el tercero, en 4 dias 13 horas á la distancia de 8 semidiámetros; el quarto, en 16 dias, á la distancia de 18 semidiámetros; finalmente el quinto y último satélite que dista del centro 54 semidiámetros, concluye su revolucion en $79\frac{1}{2}$ dias.

206 Declarado lo mas sencillamente que hemos podido el Systema Copernicano, propondremos las razones en

que

que sus acerrimos partidarios fundan la preferencía que le dán. Para que no pierdan de su fuerza algunas de estas razones, hemos de prevenir que como anduvo valido muchos siglos el systema, llamado de *Ptolomeo*, que supone la tierra sin movimiento alguno en el centro de los movimientos celestes, cuya opinion es, segun se vé, diametralmente opuesta á la de Copérnico, el empeño de los Copernicanos se ha dirigido en gran parte á probar que es un absurdo repugnante con las observaciones astronómicas el systema que coloca la tierra inmobil en el centro de los movimientos planetarios. Fig.

207 *El movimiento* diurno ó de rotacion que Copérnico dá á la tierra se prueba de varios modos.

1.° Se sigue de la analogía que debe haber entre este planeta y los demás; porque consta de repetidas observaciones que todos los planetas y el mismo sol dán la vuelta al rededor de su ege; parece, pues, natural le suceda otro tanto á la tierra.

208 2.° Supuesto el movimiento diurno de la tierra, se esplica con suma facilidad sin espantar la imaginacion, y de un modo que satisface, el movimiento diurno, del sol, de las estrellas, y de toda la esfera celeste. Porque si paramos la consideracion en la inmensidad de la bóveda celeste, llena de una infinidad de estrellas que todas están á distancias inmensas de nosotros, y de planetas que todos tienen sus movimientos propios; si comparamos la pequeñez de la tierra con todas estas moles, no es posible alcance

Fig. ce la imaginacion como se pueden mover con un movimiento comun, regular y constante en el discurso de 24 horas, al rededor de un átomo como la tierra. No se alcanza qué correspondencia puede haber entre todos estos cuerpos para que haya tanta uniformidad en su movimiento diurno, quando no se repara ninguna entre sus demás movimientos.

209 3.º Hemos visto (IV. 258) que si un péndulo no hace sus vibraciones en un mismo tiempo en distintos parages, no será en estos una misma la fuerza centrífuga, debiendo ser esta mayor donde gasta mas tiempo el péndulo en sus vibraciones. Hemos insinuado (IV. 274), y consta por esperiencia, que tarda mas tiempo el péndulo que bate los segundos en hacer sus vibraciones en el equador que en los paises mas inmediatos á los polos. Luego la fuerza centrífuga es mayor en el equador. Este aumento de la fuerza centrífuga solo puede provenir del movimiento de rotacion de la tierra, y no hay otro modo de es-
43. plicarle. Porque supongamos que represente *AEBD* el globo de la tierra, y *AB* su ege. En el supuesto de que la tierra dé vueltas al rededor de su ege; como por causa de la union de las partes del globo, todos los puntos de su circunferencia dán la vuelta en un mismo tiempo, el punto *D* trazará un círculo cuyo radio es *DC*, en el mismo tiempo que el punto *F* trazará un círculo cuyo radio es *FG*. Luego la fuerza centrífuga en *D* será mayor (IV. 274) que en *F*, y por lo mismo quedará destruida en *D* mayor parte de la pesantez del péndulo, y de su fuerza centrípeta. Luego

go si la pesantez mengua yendo del equador á los polos, es indispensable que la tierra gyre al rededor de su ege. Fig.

210 Por lo que mira al movimiento anuo lo probarémos con gran facilidad, en sentando una proposicion muy importante para el caso.

Supongamos que un cuerpo *A* se mueva al rededor del centro *S*, y que en un punto *O* fuera del círculo *AaBb* &c. esté un observador esplorando su movimiento. Es constante que quando el mobil llegáre al punto *a*, la medida de su movimiento será el arco *Aa*, ó el seno *aa'* del mismo arco (12); los arcos que miden el camino que anda el espresado cuerpo, ó la distancia á que se aparta del punto *A* no pasan de 90.° Porque en pasando el mobil del punto *B* donde remata el arco *AB* de 90° ó el primer quadrante de su revolucion, y llegando pongo por caso á *b*, le parecerá al observador que ha vuelto al punto *a*. Yá se vé como se ha de discurrir acerca de los demás puntos del círculo donde se halláre succesivamente el mobil. Luego quando el observador estuviere fuera del círculo que traza el mobil, la mayor distancia aparente á que este llegare del principio de su movimiento no pasará de 90.° 44.

Pero si suponemos el observador en *O*, moviéndose el cuerpo en el círculo *ABD*, los arcos andados irán creciendo continuamente, de modo que la mayor distancia á que el mobil llegará del punto de donde salió será de 180.° Porque el arco *AD* que mide el camino del cuerpo *A* llegado á *D* es mayor que el arco *AB*, que mide su carrera 45.

quan-

Fig. quando está en *B*, el arco *ABDC* es mayor que *ABD*, é igual á 180°. Este arco mide la mayor distancia á que el mobil puede llegar del punto *A*; porque en pasando del punto *C* yá se vuelve á arrimar al principio de su movimiento, pues la distancia de *A* á *E* es menor que la de *A* á *C*.

44. 211 Si fuese *A* un planeta que se mueve al rede-
45. dor del sol puesto en *S*, y que el observador ó la tierra esté en *O*, inferiremos de lo probado $1.^{\circ}$ que quando la tierra está fuera de la orbita del planeta, la mayor distancia aparente de este al sol, no pasará de $90.^{\circ}$ $2.^{\circ}$ que quando la tierra estuviere dentro de la orbita del planeta, la mayor distancia aparente de este al sol llegará hasta 180°.

211 Luego siempre que al observar los movimientos planetarios se verificare que algun planeta se aparta del sol 180°, ó 90° no mas en su mayor distancia aparente, podremos inferir que en el primer caso la orbita del planeta abraza la tierra, y que en el segundo esta se halla fuera de la espresada orbita.

213 Quando la tierra está en *O*, el sol en *S*, y el
44. planeta en *C* ó *A*, se dice que el planeta está en conjun-
45. cion con el sol; estando en *A*, la conjuncion es superior, estando en *C* es inferior. Quando el sol está en *S*, la tierra en *O* el planeta está en conjuncion con el sol así que llega al punto *A*, y en oposicion así que llega al punto *C*, esto es luego que se halla en una misma linea con el sol, estando la tierra entre los dos.

214 Todo esto presupuesto, es constante que esté don-

donde estuviere el sol, le abraza la orbita de Venus. Porque Fig. Venus se vé yá detras del sol quando al tiempo de su conjuncion superior le vemos perfectamente luminoso ó redondo. Como los planetas no lucen sino porque el sol los alumbra, Venus nos parece lleno quando la superficie ó mitad de este planeta que vemos es cabalmente la que está de cara al sol, y por lo mismo es preciso que Venus esté respecto de nosotros mas allá del sol.

Sea, por egemplo, *S* el sol; *T*, la tierra; *F* ó *V*, Venus, es constante que en esta situacion Venus parecerá perfectamente redondo á los habitantes de la superficie de la tierra, porque andará la parte de su orbita que está mas allá del sol. Al contrario quando desapareciere enteramente, ó no le viéremos mas que como una media luna, no podrá menos de hallarse entonces entre la tierra y el sol, porque no está de cara ácia nosotros su emisferio alumbrado, estará entonces Venus en el punto *G* de su orbita, ó en el punto *H* si viéremos una corta parte de su disco alumbrado. Por consiguiente quando Venus está entre la tierra y el sol pasará y ha pasado con efecto alguna vez por el disco mismo del sol. Finalmente este planeta no se aparta del sol sino una cantidad limitada, de la qual no pasa. Nunca se le ha visto mas de 48° lejos del sol, cuya cantidad no llega, ni con mucho á 90°, y por consiguiente nunca puede estar 180° lejos del sol, conforme debería suceder si su orbita abrazase la orbita terrestre (211). 46.

215 Lo mismo se puede decir de Mercurio, que

Fig. casi siempre está sumergido en los rayos solares, y debe andar una orbita menor que la de Venus, pues se aparta menos del sol. Si hay alguna diferencia solo consiste en que la orbita de Venus abraza la de Mercurio, pero el sol se mantiene constantemente en el centro de las dos orbitas. Tambien es prueba de estar Mercurio mas próximo que Venus al sol, el ser la luz de Mercurio mas viva y mas resplandeciente que la de Venus, y de los otros planetas.

216 Marte se vé en algunas ocasiones en oposicion, ó 180° distante del sol, de donde se sigue que la orbita de Marte no solo abraza la orbita de la tierra, mas tambien el sol, que por lo mismo ocupará el centro de su orbita. Porque si no fuera así, sería preciso que acercándose Marte al tiempo de su conjuncion con el sol, le viésemos en forma de media luna; esto repugna con las observaciones, pues por ellas consta que Marte es entonces estremadamente pequeño, y redondo del todo. Pero quando el mismo planeta está 90° distante del sol, su redondez padece alguna alteracion, y es el único tiempo en que se le puede ver con esta apariencia.

47. Sea *S* el sol; *T*, la tierra; *MNPR*, la orbita de Marte. Quando Marte estuviere en *P* ó *M*, se verá desde la tierra su disco enteramente redondo, porque en ambas situaciones está de cara ácia nosotros su emisferio alumbrado. Pero yá no está vuelto del todo ácia nosotros quando Marte está en *N* ó *R*, proviniendo de aquí la alteracion que se repara en su disco aparente, porque no es posible veamos enton-

ces

ces todo entero su emisferio luminoso. Finalmente, quando Fig.
Marte está en *M* ó en oposicion con el sol, su disco aparente es siete veces mayor que ácia su conjuncion. Está, pues, siete veces mas cerca de nosotros que en la conjuncion, y en su conjuncion está de nosotros á la mayor distancia posible. Parece, pues, que el sol, y no la tierra ocupa el centro de la orbita de Marte, y que está la tierra muy lejos de dicho centro.

217 Lo que dejamos dicho de Marte se verifica igualmente respecto de Júpiter y Saturno, sin mas diferencia que la que se nota en los diámetros de estos planetas, y por consiguiente en *las distancias á la* tierra en el discurso de un año. Porque la desigualdad en los diámetros ó en las distancias es mucho menos notable en Júpiter que en Marte, y en Saturno lo es todavía menos que en Júpiter.

218 Tambien probaremos geométricamente que no ocupa la tierra el centro de los movimientos planetarios.

Si un cuerpo se mueve en la direccion de una recta AZ 48.
dada de posicion, y es impelido al mismo tiempo de una fuerza centrípeta dirigida al punto inmobil S, *colocado fuera de la espresada recta; la linea que el cuerpo trazará será curva, cóncava ácia* S, *y estará en un plano inmobil que pasa por la recta* AZ, *y el punto* S. *Las areas comprehendidas entre qualesquiera porciones de dicha curva, y las rectas tiradas al centro* S, *tendrán unas con otras la misma razon que los tiempos que gastare el cuerpo en andar dichas porciones.*

G 2 Con-

Fig. Concibamos el tiempo dividido en partes iguales, y que en la primera de estas partes el cuerpo ande á impulsos de la fuerza que le hace andar la recta *AZ*, la parte *AB* de esta recta. Es evidente que en la segunda parte del tiempo igual con la primera andaría en la recta la parte *Bc* = *AB*, si nada se lo estorvára. Pero concibamos que llegado el cuerpo á *B*, la fuerza centrípeta le dé tal impulso que con él anduviese en la segunda parte del tiempo la recta *BG*. Si por el punto *c* tiramos la recta *cC* paralela á *BG*, y por el punto *G* la *GC* paralela á *Bc*, el cuerpo en la segunda parte del tiempo llegará á *C* andando la recta *BC*, que está en el plano del paralelogramo *BGCc*, cuyos lados *BG* y *Bc* están en el plano del triángulo *ASB*, que pasa por el centro *S* de las fuerzas, y por la recta inmobil *AZ*. Los triángulos *SCB*, *ScB* son iguales, pues tienen una misma base *BS*, y están entre las paralelas *SB*, *Cc*. Pero *ScB*, *SBA* son iguales, porque sus bases son iguales, y tienen una misma altura; luego *SBA* y *SCB* son iguales. Del mismo modo probaríamos que si en la tercera parte del tiempo el mobil anduviese una recta qualquiera *CD*, el triángulo *SCD* será igual al triángulo *SBC*, y que la recta *CD* está en un mismo plano con las rectas *SB*, *BC*, esto es, en el mismo plano que pasa por la recta *AB*, y el punto *S*. Y prosiguiendo á este tenor, mientras durare el movimiento, en partes iguales del tiempo crecerá igualmente la area formada por radios tirados al centro inmobil de las fuerzas. De donde resulta que las sumas de las areas son entre sí como los tiem-

pos

pos gastados en trazarlas. La linea que el cuerpo traza estará en un plano inmobil, una vez que pasa por la recta inmobil *AB*, y el centro inmobil *S*. Será tambien cóncava ácia *S*, porque qualquiera porcion suya como *BC*, se aparta de la *AB* inclinándose ácia el centro. Si concebimos que crezca al infinito el número de los triángulos *SAB*, *SBC* &c. menguando al infinito su latitud, sus bases *AB*, *BC* &c. formarán una curva cóncava ácia un mismo punto que estará con ella en un mismo plano, y la fuerza centrípeta que obraba antes como por intervalos en tiempos iguales, cuya fuerza aparta el cuerpo de la tangente de la misma curva, obrará ahora sin discontinuar, y las areas *SABCS*, *SABCDES*, serán como antes proporcionales á los tiempos en que se trazaren. Fig.

219 *Si un cuerpo se mueve en una curva* ABCD *trazada en un plano, cóncava ácia un mismo punto, y tirando un radio al punto inmobil* S, *que está en el mismo plano de la curva del lado de su concavidad, traza areas proporcionales á los tiempos, es animado de una fuerza centrípeta dirigida á dicho punto* S. 49.

Concibamos la curva que el mobil anda dividida en partes *AB*, *BC*, *CD* &c. tales que cada una de ellas discrepe poco de la linea recta, y las trace el mobil en partes iguales del tiempo. Concibamos tambien que la fuerza centrípeta obra por intervalos no mas en los puntos *B*, *C*, *D* &c. como antes (218). Prolónguese *AB* hasta *c*, de modo que sea *Bc* = *AB*, y *BC* hasta *d*, de modo que sea

Fig. *Cd* = *BC*, y así de las demás. El triángulo *SAB* será igual al triángulo *SBC*, una vez que por la hypótesi las areas son proporcionales á los tiempos; y *SAB* será igual á *SBc*, por ser *AB* = *Bc*. Luego será *SBC* = *SBc*, y por lo mismo *Cc* será paralela á *SB*, como se puede inferir de lo dicho (I. 493). Pero el cuerpo que en la primera parte del tiempo anda *AB*, andaría á impulsos de la sola fuerza comunicada el espacio *Bc*; y como en esta segunda parte del tiempo anda con efecto *BC*, síguese que la fuerza que obra en el punto *B*, cuya fuerza junta con la fuerza impresa hace andar al cuerpo la linea *BC*, tiene su direccion en una recta paralela á *Cc*, esto es, en la recta *BS*. Del mismo modo la fuerza que obra en el punto *C*, cuya fuerza unida con la fuerza impresa, en virtud de la qual el cuerpo andaría la *Cd* en la tercera parte del tiempo, puede moverle en la recta *CD*, tiene su direccion en una recta paralela á *dD*, esto es en la recta *CS*. Y como las rectas *BS*, *CS* se dirigen al punto *S*, la fuerza centrípeta que aparta el mobil de las tangentes de la curva, obra en direcciones que ván al centro *S*.

220 *Las fuerzas que desvian los planetas primarios de la direccion rectilinea, y los mantienen en sus orbitas, no se dirigen ácia la tierra sino ácia el sol.*

Todo cuerpo que se mueve en una linea curva es apartado por el impulso de alguna fuerza de la direccion rectilinea, que seguiría naturalmente. Los planetas se mueven en lineas curvas, pues sus orbitas son cerradas. Pero dicha fuerza en los planetas no se dirige ácia la tierra, porque las

pr-

orbitas de Mercurio y Venus (214 y 215) no abrazan la tierra, y por lo mismo no son cóncavas ácia la tierra. Luego las fuerzas (218) que los mantienen en sus orbitas no se dirigen ácia la tierra. Por lo que mira á Marte, Júpiter, y Saturno, se observan, conforme declararemos mas adelante, yá retrogrados, yá directos, yá estacionarios, respecto de la tierra; el tiempo en que estos movimientos se hacen siempre corre uniformemente, y por lo mismo las áreas trazadas por un radio qualquiera tirado desde uno de dichos planetas á la tierra no son proporcionales á los tiempos en que son trazadas. Luego por lo probado (220) *la fuerza que mueve los planetas* no se dirige á la tierra. Fig.

Pero hemos visto que las orbitas de Mercurio y Venus abrazan el sol, y lo mismo consta (216 y 217) de Marte, Júpiter, y Saturno, y todos estos planetas comparados con el sol siempre ván caminando ácia adelante; luego &c.

221 De todo lo dicho hasta aquí resulta que la tierra está entre la orbita de Venus, y la de Marte, y que por lo mismo hā de tener una orbita parecida á las de dichos planetas, y dar vueltas como ellos al rededor del sol. Tiene esta consecuencia apoyo en el tiempo mismo que gasta la tierra en concluir su revolucion, que tiene un medio entre el que gasta Venus, y el que Marte necesita. Venus tarda como unos ocho meses, la Tierra un año, y Marte dos en andar su orbita.

222 Si se comparan ahora los tiempos que todos los planetas gastan en sus revoluciones, con sus distancias me-

Fig. dias al sol, se reparará una conformidad maravillosa. Porque quanto mas próximo está un planeta al sol, tanto mas rápido parece su movimiento, concluyendo su revolucion en mucho menos tiempo que los demás. Se observa en los movimientos planetarios una ley de la qual nunca se apartan los planetas. Consiste esta ley, llamada *Ley de Keplero*, porque así se llamaba su inventor, en que los quadrados de los tiempos periódicos siempre son proporcionales á los cubos de las distancias al sol, cuya ley se verifica en los planetas secundarios igualmente que en los primarios. Por egemplo, el primer satélite de Júpiter dista del centro de este planeta $2\frac{5}{6}$ diámetros (205), y el tiempo de su revolucion periódica es de 42 horas. En conociendo el tiempo que dura la revolucion de otro satélite, pongo por caso del quarto, que es de 402 horas; si decimos, como 1764, quadrado de 42, es á 161604, quadrado de 402, así $\frac{4913}{216}$, cubo de $2\frac{5}{6}$, es á un quarto término que será $\frac{450090}{216}$, cuya raiz cúbica $= \frac{76}{6} = 12\frac{2}{3}$, será la distancia del quarto satélite al centro de Júpiter, la misma cabalmente que dan las observaciones.

Veamos, pues, si puede subsistir con esta ley el supuesto de que el sol gyre al rededor de la tierra. Ya que la luna es el satélite de la tierra, sería preciso para aplicar al sol esta ley general, en el supuesto espresado, suponer esta inmobil en el centro de la orbita solar. Pero como la luna gasta 27 dias en dar una vuelta, y el sol 365 dias; y la luna dista de nosotros como unos 60 semidiámetros

ter-

terrestres, tendríamos que hacer esta proporcion: como el Fig.
quadrado de 27, esto es, 729 es á 133225, quadrado de 365, así 216000, cubo de 60, es á un quarto término que sería 39460356, cuya raiz cúbica 340 espresaría la distancia del sol á la tierra en semidiámetros terrestres. Sin embargo consta, y lo probaremos á su tiempo, que la distancia del sol á la tierra es por lo menos treinta veces mayor. Inferamos, pues, que es absurdo el supuesto de moverse el sol al rededor de la tierra, una vez que no concuerda con la ley de Keplero (222) admitida de todos los Astrónomos por fundarse en observaciones incontrastables.

223 Sea *S* el sol; *ABCD*, la orbita de la tierra, en 56.
la qual supondremos que este planeta se mueve de occidente á oriente, esto es, desde *A* en la direccion *BCD*. Si suponemos el observador puesto en el centro *S* del sol, quando la tierra estuviere en *A*, le parecerá que corresponde al punto *A'* del cielo; quando la tierra estuviere en *B*, le parecerá que corresponde al punto *B'* del cielo. Prosiguiendo la tierra su rumbo hasta *C*, le parecerá al observador que corresponde al punto *C'* de la esfera; finalmente, quando estuviere en *D*, creerá que está en el punto *D'* del cielo estrellado.

Si en vez de suponer el observador en el sol, le colocamos en la tierra; quando la tierra estuviere en el punto *C* de su orbita, le parecerá que el sol se mueve en el cielo estrellado del mismo modo, y ácia la misma direccion que

veía

Fig. veía moverse la tierra quando le supusimos en el sol. Por consiguiente estando la tierra en el punto *C* de su orbita, el observador verá el sol en el punto *A'* de la esfera de las estrellas. Si prosigue observando el sol, le parecerá que camina hasta *B'*, siendo así que será la tierra la que habrá llegado en realidad á *D*. Así, el observador atribuirá un movimiento verdadero al sol, porque le habrá parecido que pasó succesivamente por *A'*, *B'* &c. Asimismo, caminando la tierra desde *D* á *A*, parecerá que el sol anda en el mismo intervalo de tiempo la porcion *B'C'*; y finalmente quando andare el otro semicírculo *ABC* le parecerá que el sol habrá andado la porcion *C'D'A'*.

224 Es constante que en los demás planetas se observarian tambien movimientos aparentes del sol mayores ó menores, conforme gyran mas ó menos aprisa al rededor de este cuerpo luminoso. Por manera que si viviéramos en dichos planetas, le veríamos andar al sol el mismo círculo cabalmente en la esfera de las estrellas fijas, y gastar en su revolucion el mismo tiempo, que se repararía respecto de cada planeta, si estuviese el observador en el sol.

Supongo, por egemplo, que estemos en Júpiter; verémos desde allí dar la vuelta al sol al rededor de Júpiter en un tiempo muy largo, y en una orbita que discrepará poco de la eclíptica; pero tambien veríamos el movimiento del sol mas lento de lo que nos parece desde la tierra, porque el sol pasando succesivamente por diferentes estrellas no volvería al mismo sitio, no concluiría su revolucion sino al ca-

cabo de 12 años. Por la misma razon desde Saturno se le Fig. vería andar al sol una orbita mucho mayor, y en mucho mas tiempo, porque este planeta gasta cerca de 30 años en su revolucion periódica.

Pero como no es posible que el sol tenga á un tiempo todos estos movimientos tan diferentes, que se mueva despacio y muy aprisa á un mismo tiempo, y no hay por otra parte razon ninguna para que uno de estos movimientos aparentes visto desde un planeta, desde la tierra por egemplo, sea el movimiento del sol, y no el que se observaría desde Júpiter ó Saturno, síguese que todos estos movimientos *aparentes del sol no son suyos*, que no tiene ninguno en realidad, y que por fin no son mas que apariencias originadas de los movimientos de los planetas.

125 Aunque las pruebas que hay á favor del systema Copernicano son muchas mas que las que acabamos de proponer, las dejámos para quando ventilemos los puntos con los quales están enlazadas. Porque la probabilidad, que otros llaman evidencia, de este systema solo pueden alcanzarla completamente los que hayan estudiado la Astronomía, y visto la gran conformidad de este systema con las observaciones, y la felicidad con que esplica los fenómenos celestes. Pasaremos, pues, á satisfacer los principales argumentos, con que se le impugnó en otros tiempos. Digo en *otros tiempos*, porque no se le conoce dias ha contrario ninguno, ni en Italia, ni en Alemania, ni en Francia, ni en Inglaterra.

L

Fig. 226 I. Si la tierra se mueve al rededor de su ege, un cuerpo que cae desde lo alto de una torre no caería al pie de la torre; porque mientras el cuerpo cae, la torre caminando ácia el oriente, se dejaría atrás el cuerpo. Pero consta por esperiencia que el cuerpo siempre cae al pie de la torre; luego &c.

Resp. Para desvanecer este argumento conviene considerar que es imposible que todos los cuerpos terrestres, y la atmósfera de la tierra, que tantos siglos ha forman un todo con la tierra, y dan vueltas con ella, no hayan adquirido un movimiento comun, una direccion comun. La tierra gyra con todo lo que es suyo, y todo pasa en la tierra mobil del mismo modo que si no se moviera. Consta que si desde lo alto del mastil de un navio que navega se deja caer una piedra, esta cae directamente al pie del mastil, del mismo modo que quando está el navio en reposo. El movimiento del navio se comunica de antemano al mastil, á la piedra, y á todo lo que lleva; por manera que todo pasa como si la embarcacion no se moviera. Solo el choque con algun obstáculo puede hacer que perciban el movimiento los que están en la embarcacion. Pero como la tierra no tropieza con obstáculo alguno, nada hay, ni en la naturaleza, ni sobre la tierra que pueda con su resistencia, su movimiento ó su impulso hacer perceptible para nosotros el movimiento de la tierra. Este movimiento es comun á todos los cuerpos terrestres; aunque se levanten en el ayre, se les ha comunicado de antemano la impresion del movimiento de la tier-

ra,

ra, su direccion y velocidad, y aun quando están muy arriba en la atmósfera, prosiguen moviéndose como la tierra. Una bala de cañon arrojada perpendicularmente ácia arriba con mucha precision, caería exactamente en la boca del cañon, bien que en el tiempo que la bala estuviese en el ayre, el cañon hubiese andado algunas leguas ácia el oriente. La razon es muy patente; al tiempo de subir la bala no pierde parte ninguna de la velocidad que la comunicó el movimiento de la tierra; estas dos impresiones no son contrarias, puede andar una legua ácia arriba mientras anda una legua ácia el oriente; pero quando cayere á impulsos de su gravedad natural, dará con el cañon que siempre se mantuvo en la linea que vá desde el centro de la tierra á la bala. Fig.

Para que la bala se quedase en el ayre en una misma linea perpendicular al punto de donde salió sin dar vuelta con la tierra, sería preciso que hubiese en el ayre alguna causa que destruyese el impulso general que le dió á la bala el movimiento de la tierra. Pero no conocemos causa alguna capaz de causar este efecto; debe, pues, la bala proseguir gyrando al rededor del centro de la tierra, aun quando le aparta de él el impulso de la pólvora. Es ley constante del movimiento de los cuerpos (IV. 11), y la mas general de todas, que un cuerpo que empieza moviéndose en una direccion qualquiera, prosigue siguiéndola con movimiento uniforme, con tal que ninguna causa le retarde, acelere, ó aniquile. No es, pues, de estrañar que los pájaros,

Fig. ros, las nubes, las balas sigan el movimiento de la tierra aun quando se apartan de ella.

227 II. Repugna que la tierra se trastorne cada dia, y no es posible concebir que al cabo de doce horas estemos cabeza abajo ó patas arriba.

Resp. Hemos demostrado que hay antípodas, cuyos pies están vueltos ácia los nuestros; estaremos, pues, dentro de 12 horas del mismo modo que nuestros antípodas están actualmente; no es mas dificultoso de concebir uno que otro.

228 III. Si desde lo alto de una torre *AB* dejamos caer un cuerpo qualquiera, este andará en quatro tiempos
51. iguales los espacios *AC*, *CD*, *DE*, *EB*, que serán entre sí como los números 1, 3, 5, 7, 9, segun se infiere de lo dicho (IV. 39); si la tierra dá vueltas, y el punto *B* anda el arco *BF* en el mismo tiempo que la cumbre de la torre anda el arco *AQ*, dividiendo este arco en quatro partes iguales, tirando los radios, y trazando los arcos *Cc*, *Dd*, *Ee*, el cuerpo andará segun el supuesto del movimiento de la tierra en quatro tiempos iguales los espacios *Ac*, *cd*, *de*, *eF*. Pero por el cálculo se puede hallar (IV. 52) que en el supuesto de que sea de 4'' el tiempo de la caida, ó sea la altura *AB* de 240 pies, las lineas *Ac*, *cd*, *de*, *eF* son iguales con muy corta diferencia; luego las velocidades por *Ac*, *cd*, *de*, *eF* son iguales. Por consiguiente el cuerpo cayendo desde *e* á *F*, esto es, al cabo de los quatro instantes de la caida, no dará en el plano orizontal con mas fuerza que al cabo del primero ó segundo instante. Esta consecuencia no se puede admi-

mitir, porque la contradice la esperiencia; luego &c. Fig.

Resp. Le hará poca fuerza esta obgecion al que tuviere presente que para apreciar la fuerza con que un cuerpo dá en otro, se debe atender además de su velocidad, al ángulo de la inclinacion con la qual se hace el choque. Es evidente que la linea *eF*, ó el camino que anda el cuerpo en el último instante de su caida, es mas directo respecto del plano orizontal que la linea *de*, y *de* mas que *cd*, y *cd* mas que *Ac*. Luego el choque será mayor en los instantes mas remotos del principio de la caida.

229 IV. La tierra es una mole pesada, vil y grosera, que parece dotada de poca aptitud para el movimiento; es un absurdo transformarla en un astro que se pasee por la concavidad del firmamento.

Resp. Convienen todos los Astrónomos en que el sol es mucho mayor que la tierra. Luego si el sol se mueve, segun quieren los mismos que proponen este argumento, con mas facilidad se moverá la tierra. Tampoco es la tierra mas grosera que los demás planetas, que son por la mayor parte tan grandes como la tierra; sin que por esto se nos hagan increibles sus movimientos.

230 V. Si la tierra se mueve al rededor del sol en el discurso de un año, la tierra que al principio de su revolucion anua se halla á una distancia determinada de una estrella dada, estará mas cerca de ella seis meses despues, un intervalo igual al diámetro de su órbita, y deberá verla en un ángulo mayor que antes. Esta consecuencia no con-

Fig. concuerda con las observaciones, pues en todos los tiempos del año se vé en un mismo ángulo una estrella determinada.

Resp. A pesar del movimiento anuo de la tierra, las estrellas se han de ver constantemente en un mismo ángulo, porque la orbita de la tierra no es mas que un punto en comparacion de la gran distancia á que están de nosotros las estrellas fijas. Como el ege de la tierra siempre corresponde á un mismo punto del cielo estrellado, no pueden menos de estar tan distantes las estrellas, que todo el espacio que anda el ege de la tierra se pierde en la inmensidad de esta distancia, y no es respecto de ella mas que un punto. En otros tiempos se les hacia duro á los Filósofos admitir un espacio inmenso entre la orbita de Saturno, y las estrellas fijas, porque le tenian por inutil. Pero está demostrado dias ha que dicho espacio inmenso sirve para las orbitas de los cometas, que por ser sumamente excéntricas le necesitan todo para sus revoluciones.

231 VI. Se nos podrá replicar, que si fuese tanta como suponemos la distancia de las estrellas á la tierra, se seguiría indispensablemente que las estrellas serian mayores que el sol; se seguiría que serian tan grandes como el diámetro de la orbita terrestre. Porque, segun afirman algunos Autores, se ven las estrellas en un ángulo de un minuto, y por otra parte el ángulo en el qual se vería desde una estrella el diámetro de la orbita anua sería tambien de un minuto; luego las estrellas serian tan grandes como la orbita terrestre.

Resp.

Resp. Pero es falso que las estrellas, ní aun las de primera magnitud, se vean en un ángulo de un minuto. Creyéronlo así algunos Astrónomos fundándose en algunas observaciones muy imperfectas. No llega ni á un segundo el angulo en el qual se vén con los mejores anteojos las estrellas de primera magnitud. Hay al rededor de las estrellas, particularmente quando se observan por la noche, una luz falsa ó scintilacion que las hace parecer mayores de lo que son. Sin embargo desaparece la mayor parte de esta scintilacion, mirando las estrellas por un agugero hecho en un naype con la punta de un alfiler, y aun mejor mirándolas con un buen anteojo que quita la mayor parte de la scintilacion, y nos manifiesta las estrellas como puntitos, y mucho menores que quando las miramos con la vista sola. Sin embargo sabemos que los anteojos amplifican los obgetos, y todo esto prueba quan poco perceptible es para nosotros el diámetro de las estrellas. Fig.

232 Se nos preguntará tal vez ¿cómo podemos percibir las estrellas fijas una vez que su diámetro aparente es tan pequeño?

A esto responderemos que la scintilacion que acompaña á los cuerpos luminosos es causa de que se les vé á distancias tan grandes, todo al reves de lo que sucede con los cuerpos opacos. Nos enseña la esperiencia que una bugía ó hacha encendida se vé de noche en un ángulo muy sensible á la distancia de mas de dos leguas; siendo así que si ponemos de dia á la mayor luz posible un obgeto qual-

 quie-

Fig quiera á la misma distancia no será posible alcanzarle con la vista. La razon de esto es que los cuerpos luminosos arrojan por todos lados una luz mas viva sin comparacion que la luz refleja, y esta, debilitada por la reflexion, apenas se percibe á una distancia notable.

233 VII. Algunos pretenden que no se puede concebir el movimiento del paralelismo del ege de la tierra, ni cómo un solo y mismo cuerpo puede tener dos movimientos distintos, el uno de traslacion que lleva su centro de un lugar á otro, el otro que muda la posicion de su ege.

Resp. Los que proponen esta dificultad se alucinan, porque miran el paralelismo del ege de la tierra como un movimiento particular de este planeta. El paralelismo del ege de la tierra no es mas que la situacion del ege que no varía, porque no hay para esto causa alguna; basta que el ege de la tierra se dirigiese al principio ácia un punto del cielo, para que se dirija constantemente ácia él, bien que la tierra tenga un movimiento anuo en una direccion determinada. Así, vemos que un trompo dá vueltas encima de una mesa en la misma direccion inicial, aunque se suba, se baje, ó se mude de lugar la mesa.

Satisfacense los argumentos que se fundan en algunos textos de la sagrada Escritura.

234 Todos estos argumentos se satisfacen con las consideraciones siguientes.

Sería un temerário el que intentase escluir de los libros

bros sagrados todas las metáforas, todas las comparaciones, Fig.
todas las figuras recibidas entre los hombres. Los Astrónomos tambien dicen el sol nace, el sol se pone, y lo dirán eternamente, sin que por esto sea su ánimo desconocer el verdadero estado de la naturaleza. Si Dios conversára con los hombres diría lo mismo, y Josué no podia decir otra cosa. Sería muy estraño pretender que un General de Egército, qual era Josué, se entretuviese en dar una leccion astronómica, tratándose de manifestar á su egército con una victoria la gloria y el poder de Dios, y dejando el lenguage que sus soldados podian entender mandase á la tierra *se parára. Le hubiera sido* preciso darles la razon de tan estraño modo de hablar, y empeñarse en una disertacion muy intempestiva é impertinente. Así, aun quando Josué hubiera sabido por inspiracion divina una cosa que de su tiempo se ignoraba, no podia menos de esplicarse conforme refiere la Escritura.

Lo propio diremos de los demás textos de la Biblia, en los quales los Autores sagrados no podian menos de hablar conforme se hablaba, y hablamos nosotros quando decimos el nacer, el ocaso, el movimiento, la desigualdad del sol.

235 Los textos de la sagrada Escritura que parecen contrarios al movimiento de la tierra, no se deben entender en su sentido propio y literal, sino en el sentido comun, conforme hablan y relatan generalmente los hombres. Hay muchos textos de la Escritura, además de los que se

Fig. citan contra Copernic, que hablan de Astronomía y Física, los quales se viene á los ojos que no se deben entender al pie de la letra, como quando Dios dice: *Tellus fundata super maria*, Psalm. 23. ó quando el Eclesiastés dice: *Terra in æternum stat.* En los textos de la Escritura que hablan del movimiento del sol, no se trasluce, ni se puede sospechar siquiera que los Escritores sagrados tuviesen ánimo de decidir la cuestion física, y fundar ó desterrar acerca de este punto alguna opinion.

236 No tenemos obligacion de creer que por el don de profecía supiesen los Autores sagrados las cosas profanas que no tenian relacion con los sucesos que escribian, ó no alteraban su esencia; ni los Autores Sagrados, ni los Santos Padres, con cuya autoridad se puede arguir en estos asuntos, no sabian la Astronomía. Tal fue S. Agustin, una de las Lumbreras de la Iglesia, que negaba los antípodas; *de Civit. Dei, lib.* 16, *cap.* 9.

237 No hay ninguna decision formal de la Iglesia contra el systema Copernicano. Verdad es que la Congregacion de los Cardenales Inquisidores dió un Decreto con fecha de 5 de Marzo de 1616 contra las Obras de Copérnic, Zúñiga, y Foscarini, y otro contra Galileo, con fecha de 22 de Junio de 1633, sentenciándole á abjurar el error del systema de Copérnic. Pero esta sentencia no le califica de heregía; solo declara que es sospechoso, y esto no prohibe su justificacion. Se tuvo por conveniente prohibirle para atajar los inconvenientes que en aquellos tiem-

tiempos podian resultar de consentir sobrada libertad á los ingenios. Pero siempre ha sido lícito aun en Roma admitirle como hypótesi, y lo mismo podrán hacer todos los que tuvieren por mas seguro este camino. Fig.

Esplica felicísimamente el systema Copernicano todos los fenómenos celestes.

238 El *movimiento diurno* de todo el cielo se esplíca con suma facilidad en el systema Copernicano; hemos visto (208) que esta es una de sus principales pruebas. Basta con efecto que la tierra dé una vuelta al rededor *de su ege de occidente á* oriente para que nos parezca que todos los astros dán la vuelta de oriente á occidente.

Sea *BDAE* el globo de la tierra; *BA*, el ege de la 52. tierra dirigido al punto *P* del cielo; *DE*, el paralelo que anda un punto *D* de la tierra en virtud de su movimiento *diurno*; *F*, el punto de la esfera celeste que corresponde verticalmente al punto *D* de la tierra; *G*, el punto que corresponde verticalmente al punto *E*; la linea *CDF* que es la vertical del punto *D*, dá la vuelta con él al rededor del punto *C*, y del ege *CP*, traza con este movimiento la superficie de un cono, cuyo vértice está en el centro *C* de la tierra, y la base coge desde *F* á *G*; el círculo celeste *FG* paralelo al equador, es la base del cono que traza la linea del zenit *CDF*. No está en el mismo plano que el paralelo terrestre *DE*, pero le corresponde esencialmente, pues to-

Fig. todos los puntos de este paralelo celeste *FG* distan del polo celeste *P*, el mismo número de grados que el punto *D* dista del polo *A* de la tierra. La linea del zenit *CDF* encontrará en el discurso de las 24 horas todos los puntos del cielo que están á la misma distancia del polo *P*, esto es, todos los puntos que están sobre el paralelo celeste *FHG*, y todos parecerán en su zenit.

239 El *movimiento anuo*, ó el movimiento aparente del sol en la eclíptica se esplica con igual facilidad en este systema, y hemos hecho patente (222) que es una consecuencia del movimiento de la tierra.

240 La *mudanza de las estaciones* se esplica en este systema por medio de la inclinacion, y del paralelismo constante del ege de la tierra; este punto pide mucha atencion, y de todos los fenómenos es aquel cuya esplicacion manifiesta mas el gran talento de Copérnic. El fenómeno de las estaciones se reduce á esto; los paises de la tierra que están debajo del trópico de cancer, á los $23^{\circ}\frac{1}{2}$ de latitud septentrional, qual es Chandernagor, vén pasar el sol por su zenit á las 12 del dia en tiempo del solsticio de verano, del mismo modo que los paises que tienen la misma latitud, ó están á la misma distancia del equador. Al contrario, los que están á $23^{\circ}\frac{1}{2}$ de latitud meridional al otro lado del equador debajo del trópico de capricornio, como Riojaneiro, tienen el sol en su zenit el dia 21 de Diciembre, quando el sol está en el solsticio de invierno. Para que este efecto se verifique en el supuesto de moverse la tierra, basta

co-

colocarla de manera que el rayo solar dirigido ácia la tierra, dé en el primer caso en el uno de los trópicos terrestres; y en el segundo en el trópico opuesto. Fig.

241 Sea *S* el sol; *C* y *D*, dos puntos diametralmente opuestos de la orbita anua de la tierra; *C*, el punto donde se halla el dia 21 de Junio; *D*, el punto donde está el dia 21 de Diciembre; *EF*, el diámetro del equador terrestre; *GH*, el diámetro del trópico de Chandernagor; *IK*, el diámetro del trópico de Riojaneiro. Si el ege *PA* de la tierra está inclinado de manera que el equador *EF* forme un ángulo de $23^{\circ}\frac{1}{2}$ con el rayo solar *SC*, esto es, con la eclíptica, (porque el rayo solar siempre está en la eclíptica); siendo el ángulo *HCF* ó el arco *HF* de $23^{\circ}\frac{1}{2}$, el rayo solar irá á parar al punto *H* de la tierra distante del equador *F* la misma cantidad de $23^{\circ}\frac{1}{2}$; quiero decir, que Chandernagor, y todos los puntos del mismo paralelo tendrán el sol en su zenit aquel dia. Si al contrario el ege *PA* fuese recto ó perpendicular al rayo solar *SC*, el diámetro *ECF* del equador estaría sobre el rayo *SC*, y se confundiría con él. Luego el sol estaría perpendicular á los lugares que están sobre el equador terrestre, y los paises que están debajo del equador tendrian el sol en su zenit. Pero la inclinacion del ege *PA* que forma con el diámetro *CSD* de la eclíptica, ó con el rayo solar *SHC*, un ángulo *PCH* de $66^{\circ}\frac{1}{2}$, es causa de que el rayo solar vá á pasar perpendicularmente por un punto *H* de la tierra distinto del punto *F* del equador. Todos los paises que están debajo del círculo cuyo diámetro es *GH*, 53.

Fig. esto es, debajo del trópico de cancer, dando aquel dia la vuelta al rededor del ege *PA*, pasarán unos tras de otros por el punto *H*, todos tendrán el sol perpendicular en su zenit, al pasar en *H* por debajo del rayo solar *SH*. Esto es lo que debe suceder, y se observa con efecto (93, 129 y 238) en virtud del movimiento diurno.

242 Al cabo de seis meses la tierra estará del otro lado del sol, en el punto *D* diametralmente opuesto al punto *C*; esto sucede en el solsticio de invierno el dia 21 de Diciembre. Supongamos que entonces el ege *TB* sea paralelo al ege *PA* de la situacion precedente, de modo que esté inclinado en la misma direccion, y del mismo lado del cielo, que seis meses antes. Entonces el trópico de cancer *CH* estará en la situacion *LM*, y el rayo solar *SRD*, en vez de ir á parar al trópico de cancer en el punto *L*, como en el primer caso, corresponderá al punto *R* del trópico *RV*, que es el de Riojaneiro, esto es, de los paises que tienen $23^{\circ}\frac{1}{2}$ de latitud meridional. Aquel dia todos los paises que están debajo del espresado trópico, cuyo diámetro es *RV*, pasarán succesivamente al punto *R* dando la vuelta al rededor del ege *TB*, todos tendrán el sol á su zenit; habrá, pues, trazado el sol verdaderamente el paralelo de $23^{\circ}\frac{1}{2}$ conforme debe ser en virtud del movimiento diurno.

243 Quando el sol correspondia al trópico de cancer, y era perpendicular al punto *H*, todos los paises situados del lado del polo árctico *P*, ó en el emisferio boreal de la tierra estaban en verano. Pero llegando el rayo solar

á

á ser perpendicular en *R* sobre el trópico austral ó de capricornio, los paises situados sobre *LM*, y todos los que están al norte del lado del polo árctico *T*, estarán en invierno, porque les dá oblicuamente el rayo solar. Los paises meridionales situados en el paralelo *RV*, y del lado del polo austral y antártico *B*, estarán en verano del mismo modo que estaban en verano los paises septentrionales quando la tierra estaba en *C*. Fig.

244 Así, una vez supuesto el paralelismo del ege de la tierra, ó de las lineas *PA*, *TB*, se esplica con exactitud y sin rodeo el paso del invierno al verano. Por lo que mira á la primavera y al otoño, que serán entre el invierno y el verano, y al pasar del verano al invierno; y suponiendo que el ege siempre se mantenga paralelo asimismo, quando la tierra estuviere por los meses de Marzo y Septiembre en los signos de Aries y Libra, el rayo solar corresponderá perpendicularmente á un punto del equador, una vez que en los meses de Junio y Diciembre correspondia al norte y al sur del equador.

245 Antes de esplicar las demás apariencias que ocasiona en el cielo el movimiento de la tierra, hemos de sentar la siguiente proposicion.

Si el ojo del observador llevado del movimiento anuo de la tierra, prosigue viendo succesivamente un mismo astro con rayos paralelos entre sí, le parecerá que el astro no se habrá movido.

Supongamos que el observador puesto en *O* vé un astro 54.

con

Fig. con un rayo *OS*, y que llegado á *P* le vé con un rayo *PM* paralelo al primero; digo que en todo el tiempo que gastó el ojo para ir de *O* á *P*, le parecerá que el astro no se ha movido; quiero decir, que le verá en la misma situacion, en la misma region del cielo, y se le figurará el astro inmobil ó *estacionario*. Porque como no podémos formar juicio de la situacion de un astro, sino es comparándole con algun punto del cielo, con algun obgeto, algun astro, algun plano, alguna linea, sea *OPR* la linea ó direccion primitiva que tomamos por término de comparacion. El ángulo *SOR* y el ángulo *MPR* son de todo punto iguales, por ser *OS* paralela á *PM*, segun el supuesto; luego la distancia aparente de *S* y *M* respecto del término de comparacion *OPR*, será en ambos casos de 90.° Por ser esta distancia la misma, no habrá ninguna señal, ninguna apariencia de movimiento en el obgeto *S*; y por lo mismo le miraremos como inmobil.

246 El que tuviere esto presente echará de ver que, conforme hemos supuesto, no se puede percibir el movimiento de un obgeto sino comparándole con otro obgeto. Si no hubiera en el mundo mas que un astro y un hombre, y fuesen ambos llevados con un movimiento comun por los espacios imaginarios, sería imposible que el hombre percibiera este movimiento, pues no habria ninguna señal que se le diera á conocer.

247 Si se nos pregunta ahora ¿quál es el obgeto de comparacion, y si hay un término fijo, como la linea *OR*, con

con el qual un Astrónomo pueda comparar los astros, para saber si tienen ó no algun movimiento aparente? responderemos que hay muchos de estos términos fijos. Tales son desde luego el plano del equador ó de la eclíptica, quando se trata de las estrellas fijas; como estos planos son fijos, ó sabemos por lo menos qué variaciones padecen, á ellos referimos las variaciones aparentes de las estrellas fijas, para apreciar la cantidad de dichas variaciones. Fig.

248 El punto equinoccial ó la linea tirada al primer punto de Aries, es tambien un término fijo de comparacion que la linea *OR* representa, y sirve igualmente para los planetas. Siempre que el rayo *OS* que señala el lugar de la eclíptica donde está la estrella, formare un ángulo recto con la linea *OR* que vá ácia el equinoccio, sabremos que el astro está á 90° de longitud; esta longitud no variará mientras que el ángulo *MPR* fuere igual con el ángulo *SOR*, y tendremos el astro por estacionario todo el tiempo que el ángulo *P* pareciere igual al ángulo *O*, esto es, siempre que el planeta tuviere 90° de longitud.

De la Refraccion Astronómica.

249 Por muchas proposiciones demostradas en los Elementos de Optica, consta que como la atmósfera muda la direccion de los rayos de luz que la atraviesan, de donde resulta que no vemos los astros en su verdadero lugar.

Sea *ABD* la superficie de la tierra; *EKG*, la superficie esterior de la atmósfera, cuya densidad es sensible 55.

has-

Fig. hasta algunas leguas de altura; *A*, el lugar del observador, y *MK* un rayo de luz que entra oblicuamente en la atmósfera por el punto *K*. Este rayo torcido en la atmósfera llega al punto *A* del mismo modo que si hubiese venido por la recta *NKA*; el ojo recibe la impresion de la luz en la direccion *NKA* del rayo que llega al ojo en *A*; el observador refiere al rayo *AKN* el astro que está verdaderamente en *M*, por manera que la refraccion es causa de que parezca el astro mas alto la cantidad del ángulo *NKM*, que se llama *Refraccion Astronómica.*

56. 250 Para determinar la refraccion astronómica se ha de considerar en general la curva que debe trazar una partícula de luz quando es atrahida ó impelida ácia el centro de la tierra con una fuerza qualquiera.

Sea *C* el centro de la tierra ácia el qual es atraído el corpúsculo *F* de luz; *A*, el lugar del observador; *Z*, el zenit; *FA*, la curva que ha de trazar el rayo; *SF*, la direccion con que entra en la atmósfera; *BIA*, la direccion del rayo que llega al punto *A*; *FH* y *AG*, las tangentes de la curva en *A* y *F*, que se cortan en *I*. Desde el centro *C* de la tierra bágense las perpendiculares *CH* y *CG* á estas tangentes; el ángulo *ZAI* será la distancia aparente de un astro *S* ó *F* al zenit; y si suponemos *AK* paralela á *FS*, el ángulo *ZAK* será la distancia verdadera. Si se prolonga la primera tangente *SFH* de la curva que el rayo traza, encontrará en un punto *I* la última tangente *AIB*, que señala el lugar aparente del astro; la refraccion astró-

nó-

nómica es igual al ángulo BIS ó GIH que forman las dos Fig.
tangentes. Y como suponemos AK paralela á $SFIH$, tambien será dicha refraccion igual al ángulo BAK.

251 Hemos probado (IV. 292) que como en las curvas trazadas en virtud de una fuerza de proyeccion uniforme, y de una fuerza central qualquiera, la fuerza es *la misma á distancias iguales del centro*, *la velocidad en diferentes puntos de la curva es en razon inversa de las perpendiculares bajadas á las tangentes en dichos puntos.* Por consiguiente la velocidad del corpúsculo de luz en F es á su velocidad en A, como CG es á CH; y si hacemos $= 1$ el radio CA de la tierra, la línea $CH = y$; la velocidad en un punto F de la curva, $= v$; la velocidad final en A, $= c$; el ángulo CAG ó la distancia aparente al zenit, $= a$, de modo que $CG = \text{sen}\ a$, será $v = \frac{c \cdot \text{sen}\ a}{y}$.

252 Supongamos que FA sea un arco infinitamente pequeño, compreendido entre dos líneas rectas finitas FC, AC, cuyo ángulo FCA sea $= dx$; tírense dos tangentes FI, AI, la AL paralela á CF, la AQ perpendicular á CF, y QO perpendicular á la cuerda AOF. Si la refraccion total HIG es igual á r, tendremos en el caso de la porcion infinitamente pequeña $FCA = dx$, $LIA = dr$; porque la una es la diferencial del ángulo del centro C, y la otra el ángulo de una tangente de la curva con la tangente que tiene infinitamente próxima, y la suma de todos estos ángulos es la inclinacion de la última tangente respecto de la primera. Si llamamos CA, z; FQ, dz; f, la fuerza refringente en F;

CH,

Fig. *CH*, *y*, siendo la velocidad en $F = \frac{v \cdot \text{sen}\, a}{y}$; el espacio *FA* que es como el producto del tiempo por la velocidad, será *vdt*, y el efecto *AL* de la fuerza aceleratriz será proporcional (IV. 62) á la fuerza, y al quadrado del tiempo, ó á fdt^2. La fuerza en la direccion *FQ*, ó la fuerza refringente absoluta *f* es á la misma fuerza resuelta en la direccion *FA* ó *FO*, como *FQ* es á *FO*, como *FA* es á *FQ*, como *vdt* es á *dz*; quiero decir, que $vdt : dz :: f : \frac{fdz}{vdt}$, que es la espresion de la fuerza atraente, en la direccion del movimiento *FI* de la luz; así la diferencial de la velocidad que es como la fuerza y el tiempo juntamente, esto es, $dzv = \frac{fdzdt}{vdt}$; luego $vdv = fdz$; por consiguiente el aumento del quadrado de la velocidad en cada uno de los arcos pequeños de la curva es como la fuerza absoluta, y la variacion de la distancia al centro.

253 Síguese de aquí que si dos partículas de luz pertenecientes á dos rayos diferentes, llegan á tener velocidades iguales á una misma distancia del centro, siempre las tendrán. Porque al acercarse igualmente al centro esperimentarán fuerzas iguales, incrementos iguales en los quadrados de las velocidades iguales, y por lo mismo las velocidades serán iguales. Pero todos los rayos homogeneos llegan á la primera superficie de la atmósfera con velocidades iguales, y por consiguiente sea la que fuere la direccion que siguen al atravesar la atmósfera, tendrán velocidades iguales á la misma distancia del centro, el valor de *c*, ó de la velocidad final en *A* será constante respecto de todos los rayos. La razon entre *CH* y *CG*, ó entre la velocidad final y la ve-

velocidad inicial será igualmente la misma ; esta razon discrepará poco de la igualdad , porque la refraccion es siempre muy corta en comparacion de la distancia al zenit. Fig.

254 Aunque sobrevengan variaciones en la atmósfera , con tal que su estado permanezca el mismo en *A*, la velocidad final siempre será la misma. Porque el aumento del quadrado de la velocidad será como la suma de todos los productos de las fuerzas atraentes en cada rebanada por sus gruesos relativos , esto es, de las *fdz*. Concibamos la atmósfera dividida en rebanadas de igual grueso ; la fuerza en cada punto será el exceso de las fuerzas con que obran las rebanadas inferiores respecto de las superiores ; al acercarse el rayo á la tierra , los efectos de las rebanadas intermedias serán destruidos succesivamente , y solo quedará el efecto del exceso que la última fuerza llevare á la primera. Así , aunque la luz llegue al ayre que nos toca , por un número qualquiera de medios de distinta densidad , su velocidad es la misma que si llegára á nosotros inmediatamente sin atravesarlos. Luego la velocidad de la luz en *A* solo pende de la constitucion de la atmósfera en *A*, y de la altura del termómetro ó barómetro en el lugar de la observacion ; pero la situacion del punto *I*, ó de la interseccion de las dos tangentes , puede hacer que sea mas variable la refraccion en las inmediaciones del orizonte.

255 Para averiguar la ley de las refracciones , se ha de averiguar su razon con la distancia al zenit , y con el ángulo *FCE*, formado en el centro de la tierra. Por ser la al-

Fig. altura de la atmósfera ó la longitud de CF una mismà respecto de todos los rayos de una misma especie, la razon entre el seno de incidencia CFH, y el seno de refraccion CAG será una misma respecto de todos, porque estos senos son $\frac{CH}{CF}$ y $\frac{CG}{CA}$ (21). Si la razon entre las velocidades en A y F, ó entre CH y CG fuere la de $1+b$ á 1, y la altura de la atmósfera MF fuere $= e$, la razon entre $\frac{CH}{CF}$ y $\frac{CG}{CA}$ será la de $\frac{1+b}{1+e}$ á 1. Y si hacemos $\frac{1+b}{1+e} = m$, tendremos $1 : m ::$ sen CAG ó sen a: sen CFH, que será $=$ m. sen a.

En el quadrilátero rectilineo $CFIA$ los quatro ángulos internos valen por precision quatro ángulos rectos, y valen otro tanto los ángulos A é I juntos con sus esternos; restando de cada suma los dos internos A é I, resultarán los dos esternos A é I iguales con los otros dos internos C y F, ó $CFI + ACF = CAG + GIH$; CFI ó CFH $= CAG - ACF + GIH = a - (x - r)$; luego tendremos m. sen $a =$ sen$\left[a - (x - r)\right]$. La suma de los dos senos que son como 1 y m es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos a y $a - (x - r)$ es á la tangente de su semidiferencia (I.657); luego $1 + m : 1 - m ::$ tang$\left[a - \frac{1}{2}(x - r)\right]$: tang $\frac{1}{2}(x - r)$. Y como esta razon es constante, síguese que la tangente de $\frac{1}{2}(x - r)$, ó el ángulo pequeño mismo $x - r$ será como la tangente de $\left[a - \frac{1}{2}(x - r)\right]$, ó de la distancia aparente del zenit despues de rebajado el ángulo pequeño $\frac{x-r}{2}$.

256. Si la razon entre x y r, ó entre el ángulo del

cen-

centro y la refraccion fuere constante, el angulillo $\frac{x-r}{2}$ será Fig.
un múltiplo de la refraccion r, y la refraccion misma será como la tangente de la distancia al zenit, despues de rebajado un múltiplo de la refraccion. La razon entre x y r será constante, si suponemos que la fuerza atractiva de las rebanadas de la atmósfera crece uniformemente, y que el rayo esperimenta continuamente la misma fuerza al pasar de una rebanada á otra inmediata. En este supuesto de la fuerza constante, sea AF un arco infinitamente pequeño, 56.
$= vdt$ (252); la tangente AI sensiblemente igual á la mitad del arco, será $\frac{vdt}{2}$; el seno de CFA, ó de CFL (que es igual con él por ser el ángulo AFL infinitamente pequeño) es $= \frac{AQ}{AF}$; pero el arco AQ es como el ángulo multiplicado por el radio (44), luego $AQ = zdx$; y como $AF = vdt$, el seno de CFA será $\frac{zdx}{vdt}$. Pero $AI : AL ::$ sen ALI ó ALH : sen AIL; esto es, $\frac{vdt}{2} : fdt^2 :: \frac{zdx}{vdt}$: sen dr; luego sen dr ó el mismo $dr = \frac{2fzdx}{v^2}$, y $\frac{dr}{dx} = \frac{2fz}{v^2}$; y con esto queda averiguada la razon entre la leve variacion de la refraccion, y el ángulo del centro.

La razon $\frac{2z}{vv}$ se puede mirar como constante, porque las velocidades y las distancias al centro de la tierra varian muy poco; por consiguiente, $\frac{dr}{dx}$ es sensiblemente como la fuerza refringente f, que obra en cada una de las rebanadas de la atmósfera, y si esta fuerza f es sensiblemente constante, ó igual en las diferentes alturas de la atmósfera, la razon $\frac{dr}{dx}$ será constante.

257 Por consiguiente, en el supuesto de que la fuer-

 za

Fig. za refringente sea constante en toda la atmósfera, la razon entre x y r es una razon constante. En este supuesto, Simpson halló, por medio de dos refracciones observadas, $r = \frac{2}{11}(x - r)$ ó $x = 6\frac{1}{2}r$. Bradley suponia $\frac{2}{12}$ ó $\frac{1}{6}$ en lugar de $\frac{2}{11}$, y hacia $x = 7r$, de donde se sigue que $a - \frac{x-r}{2} = a - 3r$. Luego la *refraccion es como la tangente de la distancia al zenit quitándole tres veces la refraccion.*

258 Bastan estos principios para probar que en todas las hypótesis que se siguen acerca del progreso de la fuerza refringente, el seno de incidencia está con el seno de refraccion en razon constante, y en razon inversa de la velocidad en el primer medio á la velocidad en el segundo (Suponemos que el rayo sea atraído perpendicularmente á la superficie refringente, y á muy corta distancia). Porque si *AC* llegára á ser paralela á *CF*, *CA* y *CF* serían iguales, *CFH* sería el ángulo de incidencia, *CAG* el ángulo de refraccion, y habría entre sus senos la misma razon que entre las perpendiculares *CH* y *CG*, ó las velocidades; luego las velocidades están en razon inversa de los senos de refraccion é incidencia.

259 Por la regla de Bradley se saca $x = 7r$; quiero decir, que el ángulo *FCA* es igual á siete veces la refraccion; por consiguiente la refraccion siempre es la séptima parte del ángulo en el centro de la tierra, que abraza todo el trecho que el rayo ha andado en la atmósfera.

260 Para hacer alguna aplicacion de la regla de Bradley, supongo que siendo de $33'$ la refraccion en el orizon-

te,

te, se pregunte de quánto será á los 45°. Se restará el triplo de la refraccion orizontal 1° 39′ de la distancia aparente al zenit 90°, restarán 88° 21′; de aquí se inferirá la refraccion que corresponde á los 45°, en sabiendo que esta refraccion es de 1′ al poco mas ó menos, con decir: la tangente de 88° 21′ es á la tangente de 44° 57′, como la refraccion orizontal 33′ es á 57″, que es cabalmente la refraccion á los 45° de distancia aparente al zenit. Por esta regla se puede construir una tabla de refracciones. Fig.

261 Esta regla que se verifica en las cortas alturas igualmente que en las grandes, y concuerda sensiblemente con las observaciones, prueba tambien que las refracciones son proporcionales á las tangentes de las distancias al zenit, mientras que dichas refracciones no pasan de unos 3′, ó sus alturas pasan de 20.° Porque entonces las tangentes de las distancias simples, ó las de dichas distancias despues de quitarlas tres veces la refraccion, tienen sensiblemente la misma razon. Pero al acercarse al orizonte no basta yá la simple distancia al zenit, porque siendo entonces triplicada la refraccion, ocasiona en las tangentes una diferencia muy notable; entonces se debe calcular la refraccion por una falsa posicion, conforme lo hemos practicado (260).

262 Hemos demostrado (V. 70) que la densidad del ayre crece en progresion geométrica. Pero hay mucho motivo para creer que la refraccion no pende solamente de la densidad de los cuerpos que atraviesa, mas tambien de alguna causa interna que será tal vez la estruc-

Fig. tura de sus partes internas, su distribucion, sus intersticios, su pegosidad, su adherencia, su calidad mas ó menos oleosa, mas ó menos inflamable. Está averiguado que la ley de la refraccion no corresponde á la que siguen las densidades de la atmósfera. Sea la que fuere la causa de este fenómeno, se sabe que la refraccion de la luz no siempre crece como las densidades de los cuerpos que atraviesa; el espíritu de trementina, por egemplo, es mucho mas ligero que el vidrio, y sin embargo refringe la luz tanto como el vidrio; podemos, pues, suponer que la materia refringente muda de densidad de un modo uniforme al levantarse sobre la tierra, bien que esto no se verifique respecto del ayre grosero. Aunque los esperimentos hechos con un ayre condensado dén una refraccion proporcional á la densidad, puede suceder que la materia eléctrica ó la materia del fuego, mucho mas abundante en la region superior de la atmósfera que en la inferior, haga que á cierta altura sea mayor la refraccion de lo que debiera, si el ayre fuera homogeneo con el que respiramos; y de aquí puede resultar que la virtud refringente se arrime mucho mas á la uniformidad que á la progresion geométrica.

263 Este supuesto de una fuerza constante se compadece con las refracciones observadas; sucediendo lo contrario con la ley de las densidades. Si por la ley de las densidades, en virtud de la gravedad específica del ayre, y de la fuerza refringente que son conocidas, se calcula la refraccion orizontal, se saca esta refraccion orizontal de 52′, sien-

siendo así que por la observacion no pasa de $32'$; pero quando se calcula dicha refraccion en el supuesto de que crezca uniformemente la densidad, el resultado del cálculo se acerca mucho á la observacion. Mas arriba de 7° de altura se puede seguir el supuesto que se quiera acerca de las densidades de la atmósfera; porque si se toma una refraccion observada á una altura que no bage de 7°, y se infieren de ella las demás refracciones en cada uno de los dos supuestos distintos, nunca se notarán en los resultados mas de $2''$ de diferencia. De aquí infirió Simpson que por ser la hypótesi de los incrementos iguales mucho mas conforme con la observacion cerca del orizonte, basta para dar una tabla muy puntual de las refracciones respecto de alturas mayores, una vez observadas las grandes refracciones. Fig.

264 Por la regla de Simpson, hay una razon constante entre el seno de la distancia aparente al zenit, y el seno de cierto ángulo; y la diferencia entre estos dos ángulos tiene con la refraccion que se busca una razon constante. Pero (255) con substituir en lugar de $x - r$ un múltiplo nr de la refraccion, sale m . sen $a =$ sen $(a - nr)$, y las observaciones determinan m y n. Por egemplo, en el supuesto de que la refraccion en el orizonte sea de $33'$, y de $1' 30'' \frac{1}{2}$ á la altura de 30°, Simpson sacaba $m =$ sen $86^\circ 58' \frac{1}{2}$, ó $0,99861$, y $n = \frac{11}{2}$.

Por la regla de Bradley, la refraccion es proporcional á la tangente de la distancia aparente al zenit despues de rebajado cierto múltiplo de la refraccion (257), ó en ge-

Fig. general, r proporcional á tang $(a - br)$, y supone $b = 3$; esto dá $n = 6$ en lugar de $\frac{11}{2}$ que dá la regla de Simpson. Es facil de inferir la una de estas reglas de la otra.

Con efecto, la de Simpson dá $1 : m ::$ sen a : sen $(a - nr)$; luego $1 + m : 1 - m ::$ sen $a +$ sen$(a - nr)$: sen $a -$ sen$(a - nr)$, ó lo que viene á ser lo mismo :: tang $(a - \frac{1}{2}nr)$: tang $\frac{1}{2}nr$ (I. 657); luego tang $\frac{1}{2}nr$, y r misma son proporcionales á tang $(a - \frac{1}{2}nr)$, por consiguiente el valor de b en Bradley es $\frac{1}{2}n$ en Simpson, y si $n = 6$, sale $b = 3$; pero si $n = \frac{11}{2}$ conforme suponia Simpson, sale $b = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ en lugar de 3; por consiguiente en este caso se debe restar de la distancia al zenit dos veces y $\frac{3}{4}$ la refraccion. Al contrario, el número n en Simpson se saca facilmente del valor de b en Bradley $= \frac{1}{2}n$; para sacar despues el otro coeficiente m, se hace uso de una refraccion r observada á una distancia a del zenit; si, por egemplo, $m = \frac{\text{sen}\,(a - nr)}{\text{sen}\,a}$, y suponemos $a = 90°$, saldrá sen $(a - nr) = \cos nr = m$.

265 La regla de Bradley es mas facil de estamparse en la memoria, y se propone con mas sencillez que la regla de Simpson; pero no es tan acomodada como esta quando se trata de construir una tabla por medio de las observaciones, porque supone que se conozca de antemano la refraccion que se busca. Por consiguiente, sería mejor darla en la práctica la forma de la de Simpson. Para cada distancia aparente a' al zenit á la qual corresponde una refraccion r', tenemos esta equacion sen $(a' - nr') = m$. sen a' (264); des-

despues de hallado el valor de $a' - nr'$, se le restará de a', quedará nr', y dividiendo este residuo por n, saldrá la refraccion r' que se busque. Por egemplo, si la refraccion orizontal es de $33' = r$, sale $nr = 6r = 3° 18'$, y $\cos nr = m = \cos 3° 18' = 0,9983$. Si quisiéramos determinar ahora la refraccion á $50°$ de distancia al zenit, hallaríamos $\cos 3° 18'$. $\operatorname{sen} 50° = \operatorname{sen} 49° 53' 13''$, á este ángulo le faltan $6' 47''$ para llegar á $50°$, y la sexta parte de esta diferencia, es á saber $1' 7'' 8$, es la refraccion que corresponde á los $50°$ de distancia aparente al zenit. Fig.

266 *Si quisiéramos* hacer uso de la altura aparente $= p$, *tomaríamos* $\cos q = m . \cos p$, será p el complemento de a, y q el complemento de $a - nr$; luego $a = 90° - p$; $q = 90° - (a - nr) = p + nr$; $nr = q - p$, $r = \frac{q-p}{n}$.

267 Busquemos ahora en esta hypótesi los coeficientes necesarios para la construccion de una tabla, por medio de dos refracciones observadas. Se tendrá presente que $m . \operatorname{sen} a$, ó $\operatorname{sen}(a - nr) = \operatorname{sen} a . \cos nr - \operatorname{sen} nr . \cos a$ (I. 655); pero por ser muy pequeño el arco nr, será $\cos nr = 1 - \frac{1}{2} n^2 r^2$ (48); por lo mismo será $\operatorname{sen}(a - nr) = \operatorname{sen} a - \frac{1}{2} n^2 r^2 . \operatorname{sen} a - nr . \cos a$. Y porque $m . \operatorname{sen} a = \operatorname{sen}(a - nr)$, dividiendo por $\operatorname{sen} a$, y substituyendo $\cot a$ en lugar de $\frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$, sacaremos $m = 1 - \frac{1}{2} n^2 r^2 - nr \cot a$. Haciendo uso de otra refraccion r' á una distancia a' del zenit, se sacará el mismo valor. Luego $\frac{1}{2} n^2 r'^2 - \frac{1}{2} n^2 r^2 = nr . \cot a - nr' . \cot a'$, y $\frac{1}{2} n =$

Fig. $\frac{r \cdot \cot a - r' \cdot \cot a'}{r'^2 - r^2}$. Si r' fuese la refraccion orizontal, saldrá $\cot a' = 0$, y $n = \frac{2r \cdot \cot a}{r'^2 - r^2}$. En conociendo el valor de n se averiguará tambien el de $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r^2 - nr \cdot \cot a$. Si r fuese una refraccion tan apartada del orizonte, que $\cot a$ no sea sobrado pequeña, se podrá desechar $\frac{1}{2}n^2r^2$, y hacer $m = 1 - nr \cdot \cot a$. Para la refraccion orizontal r', tendremos $\cot a = 0$, y $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r'^2 = \cos nr'$ (48).

Simpson hacía uso de los valores siguientes, $a = 60^\circ$, $r = 1' \; 30'' \frac{1}{2}$, $r' = 33'$, de donde se saca $n = \frac{11}{2}$, $m = \cos 3^\circ \; 1' \frac{1}{2} = \text{sen } 86^\circ \; 58' \frac{1}{2} = 0{,}9983$. Bradley suponia $r = 1' \; 38'' \; 4$, de donde se saca $n = 6$, y $m = \cos 3^\circ \; 18'$.

268 Para reducir á números el valor de $\frac{1}{2}n$ hallado poco ha, es preciso reducir el numerador y el denominador á decimales del radio; pero se puede simplificar la operacion con restar el logaritmo del arco igual al radio 5,3144251 de la suma de los logaritmos de $r' + r$ y de $r' - r$ que son el logaritmo de $r'^2 - r^2$, y sale para el valor de n una cantidad cuyas partes son todas homogeneas entre sí (46), porque entonces r y $r' + r$ quedan espresadas en segundos de grado, y $r' - r$ se convierte en decimales del radio.

269 Una vez averiguada la ley de las refracciones ó la regla de su progresion por lo dicho hasta aquí, sería facil determinar las refracciones absolutas. Supongo, por egemplo, que se haya observado la altura aparente de dos estrellas circumpolares mas arriba y mas abajo del polo (137); estas quatro observaciones corregidas por

las

las refracciones, han de dar puntualmente la misma altura de polo. Se podrá, pues, hallar con falsas posiciones qual es la refraccion orizontal que, en virtud de la teórica antecedente, dará quatro refracciones tales que la altura del polo sea rigurosamente la misma determinándola por cada una de las dos estrellas. Fig.

270 Como la regla de Bradley vá fundada en un supuesto que no concuerda enteramente con la física, bien que las observaciones le abonen, quedaba campo para indagar si se podrian representar todavia mejor las observaciones con mudar algun poco la forma de dicha regla y el valor de los coeficientes. Despues de combinadas unas con otras muchísimas observaciones, se ha averiguado que se representarian mejor con substituir en lugar del número 3 constante para todas las alturas, estotro $3,19953 + 0,03428 \,.\, \cos a$; por manera que la fórmula de refraccion se reduce á estotra, suponiendo a igual á la distancia al zenit

$$\text{Refraccion} = \frac{\text{tang}\,(a - R''.\; 3,19953 + 0,03428 \,.\, \cos a)}{\text{tang}(90^\circ - 1944(3,19953 + 0,03428 \,.\, \cos a)_{\frac{1}{1944}}}.$$

271 Volvamos á la hypótesi de la fuerza constante (263), para determinar el aumento de velocidad de la luz en la atmósfera ó el valor de b. Sea $ACI = x'$; CIG ó $CIA = a - x'$; $CIH = a - x' + r$; sus senos son como las perpendiculares CG, CH, ó las velocidades 1 y $1+b$ (251 y 255), luego $(1+b)$ sen $(a - x')$ $=$ sen $(a - x' + r)$, y suponiendo que el ángulo r sea muy pequeño, $(1+b)$. sen $(a - x') =$ sen $(a - x')$ + 56.

r

Fig. $r \cdot \cos(a - x')$ (I. 655); dividiendo por sen $(a - x')$, y substituyendo cotang en lugar de $\frac{\cos}{\text{sen}}$, sale $1 + b = 1 + r \cdot \cot(a - x')$, y $b = r \cdot \cot(a - x')$. Para hacer uso de esta fórmula conviene considerar que el valor de x' es muy corto respecto de a, particularmente quando a no se arrima mucho á los $90°$; porque sen CAG ó a : sen CIG ó $a - x'$ :: $CI : CA$; esto es, en una razon que discrepa poco de la igualdad. Si á los $60°$ de distancia al zenit la refraccion es $1' \, 38'' \, 4 = r$, se saca $b = r \cdot \cot a$, ó sen $r \cdot \cot a = 0{,}0002755$. Tambien se puede sacar b del valor de m; porque $b = r \cdot \cot a$, y $1 - m = nr \cdot \cot a$; luego $b = \frac{1-m}{n}$, y si $m = 0{,}9983$ (267), sale $b = 0{,}000277$, cuyo valor discrepa poco del que se halló poco ha por otro camino.

272 En la zona tórrida al nivel de la mar halló Bouguer que la refraccion orizontal era de $27'$, y de $5' \, 30''$ á $83°$; con estos datos se saca $\frac{1}{2} n = \frac{r \cdot \cot a}{r'^2 - r^2} = 3{,}262$; $m = \cos nr = 0{,}99866$, y $b = 0{,}0002054$. Esta cantidad es menor que en nuestros climas, porque la rarefaccion que proviene del calor del ayre, hace menores las refracciones, por ser entonces menor la densidad del ayre.

Por las mismas fórmulas se hallará con facilidad la altura e de la atmósfera sensible ó refringente; porque como $m = \frac{1+b}{1+e}$ (255), $e = \frac{1-m+b}{m}$, y por ser $b = \frac{1-m}{n}$ (271), sale $e = \frac{(n+1)(1-m)}{nm}$. Manifiesta esta espresion que la distancia al centro de la tierra varía realmente mas que la velocidad, porque la variacion e de la

dis-

distancia es á la variacion b de la velocidad, como $n + 1$ Fig. que lleva algun exceso á la unidad es á m que es algo menor que la unidad, quando se la espresa en partes del radio de la tierra (273); pero podemos espresar la razon entre estas variaciones con la de $n + 1$ á 1. Con las refracciones de Bradley se saca $e = 0,001942$ en partes del radio de la tierra, que determinaremos en los Elementos de Geografia, con las de Bouguer, 0,001548 que son 6342 y 5065 toesas.

273 Por medio de estas fórmulas se puede hallar la refraccion para un lugar situado á una elevacion qualquiera, y aun respecto de obgetos que estén debajo del orizonte, con tal que respecto del lugar propuesto se haya determinado m y n. El valor de n es el mismo, sea la que fuere la altura, porque es el número 6, por el qual se multiplica la refraccion para corregir la distancia al zenit (264); pero esta ley, que proviene de la naturaleza de la refraccion, es la misma en toda la altura de la atmósfera, una vez que la fuerza es constante. Para hallar el valor de m que pende de la altura de la atmósfera, es preciso tener presente que $e = \frac{(n+1)(1-m)}{nm}$ (272); luego $m = \frac{n+1}{n+1+en}$ $= 1 - \frac{en}{n+1}$, egecutando la division por las reglas ordinarias, y desechando las potencias superiores de e, por ser muy corta esta altura e de la atmósfera.

Por egemplo, las observaciones de Bouguer dán $n =$ 6,524, y la altura total de la atmósfera 5055 toesas; luego á la altura de 2388 toesas la distancia á la cumbre, ó el valor de e que es en dicho caso la altura de la atmósfera,

=

Fig. $= 2667 = 0{,}008166$, de donde se saca $m = 1 - \frac{en}{n+1} = 0{,}9992919 = \cos nr$ (264), en el caso de la refraccion orizontal; luego $nr = 2^\circ\, 9'\, 24''$, y $r = 19'\, 50.''$ Bouguer observó en diferentes tiempos esta refraccion de $19'\, 34''$, de $19'\, 35''$ y de $20'\, 17''$; de modo que esta regla de teórica dá una refraccion que está entre las que dá la observacion.

274 Para una altura p debajo del orizonte, si llamamos q esta altura aumentada cierto ángulo (266), sale $\cos q = m . \cos p$ y $r = \frac{q-p}{n}$, de donde es muy facil de sacar la refraccion. Por egemplo, para 7° se saca $3'\, 55''$; la observacion la daba de $3'\, 24''$ ó de $3'\, 51.''$

Para el caso en que el obgeto estaba $1^\circ\, 17'$ debajo del orizonte, y era p negativa, salen $34'\, 53''$, y por la observacion Bouguer sacaba $34'\, 47.''$ Debajo del orizonte el aumento es rápido, porque en este caso tenemos la suma de los dos ángulos p y q, siendo así que mas arriba del orizonte no tenemos mas que su diferencia.

275 El valor de $m = \cos nr = 1 - \frac{en}{n+1}$ (273) sirve para probar, conforme lo habia observado Bouguer, que la refraccion orizontal á diferentes alturas es como la raiz de la distancia á la cumbre de la atmósfera; porque $\frac{en}{n+1} = 1 - \cos nr =$ seno verso $nr = \frac{1}{2} n^2 r^2$ (48); luego $r^2 = \frac{2e}{n(n+1)}$; luego r es como la raiz de e. Por consiguiente para sacar la refraccion orizontal á un grado qualquiera de altura mas arriba del nivel de la mar, se resta dicha altura de la de la atmósfera, que segun Bouguer es de

de 5158 toesas, y la refraccion orizontal es como la raiz del remanente, que es la altura restante de la atmósfera mas arriba del lugar de la observacion. Fig.

De las Refracciones terrestres.

276 Las *Refracciones terrestres* son las que se verifican entre dos puntos de la tierra como *M* y *L*. Si suponemos un observador que desde *M* está midiendo la altura de una montaña en *L*, el rayo *LGM* acercándose de la tierra en G, y apartándose en *M*, se curva mucho, y de aquí resulta que el objeto *L* parece fuera de su verdadero lugar, y en la direccion del rayo *MGF*. 57.

277 Hay ocasiones en que la refraccion terrestre se junta con la refraccion astronómica, porque hallándose el observador en algun sitio muy elevado vé los astros debajo de la linea orizontal, y puede ser mucha la diferencia. Hallándose Bouguer en Chimborazo; 2388 toesas mas alto que el nivel de la mar, y observando el sol al ponerse en el orizonte, la refraccion orizontal era de 19′ 45″; pero llegado el sol á 1° de depresion aparente, la refraccion era yá de 30′, y aun de 34′ 47″ á 1° 17′ de depresion aparente, por causa de la refraccion terrestre. Y así debia ser por lo probado (274).

278 Sea *M* el observador en la cumbre de una montaña alta; *MH*, la linea del nivel aparente ó del orizonte racional y astronómico; *S*, el sol, cuyo rayo *SRLM* se curva al entrar en la atmósfera en *R*, y llega al ojo *M*, con- 57.

fun-

Fig. fundiéndose con la tangente *FGM*. La depresion aparente del sol es el ángulo *HMF*; la parte mas baja *MGL* del rayo solar es igual al uno y otro lado del punto *G*, que es el mas inmediato á la superficie de la tierra *T*; la inclinacion en *L* es la misma que en *M*, si suponemos el punto *L* tan elevado como el punto *M* respecto de la tierra. Por consiguiente si suponemos el ángulo *MCL* de dos grados, el ángulo *HML* de un grado, el observador vería desde *L* el astro *S* un grado mas arriba del orizonte, en vez de verle un grado mas abajo, y la curvatura de la parte *RL* del rayo sería la refraccion astronómica para un grado de elevacion aparente; pero la segunda curvatura desde *L* hasta *M* que es mayor, es una refraccion terrestre, la qual añadida á la refraccion astronómica que corresponde á un grado de altura aparente, compone la refraccion para un grado de depresion aparente, y esta misma refraccion terrestre es la que se esperimentaría, si desde el punto *M* se observase la altura aparente del obgeto terrestre *L*. Esta refraccion es con corta diferencia la séptima parte del arco terrestre que coge desde *M* á *L*, ó del ángulo *MCL* que traza el rayo al atravesar la atmósfera (259). Bouguer la supuso un noveno en algunas ocasiones; pero en suponiendo un séptimo síguese que en un intervalo de 950 toesas ó de un minuto, la espresada refraccion sería de $8''\frac{1}{2}$; por consiguiente se debe restar de cada altura observada, ó añadir á cada depresion la mitad de dicha refraccion, ó $\frac{1}{14}$ del intervalo que hay entre las dos estaciones.

De

Fig.

De los Crepúsculos.

279 El *Crepúsculo* ó la luz crepuscular que vemos ácia el orizonte despues de puesto el sol, y la aurora que vemos antes que nazca, son fenómenos parecidos á los de la refraccion; porque la atmósfera dispersa y reflecte los rayos del sol, de modo que vienen en bastante cantidad á nuestros ojos, para impedirnos que veamos los astros, bien que el sol esté debajo del orizonte.

280 Es, pues, preciso que el sol esté una cierta cantidad debajo del orizonte para que su luz nos dege ver un astro con la vista sola, cuya cantidad se llama el *Arco de emersion.* No es el mismo respecto de todos los astros, es de 18° respecto de las estrellas mas chicas, porque estas no se pueden ver con la vista sola, sino quando el sol está 18° debajo del orizonte, y esto se llama ***Depresion del círculo crepuscular.*** Esta depresion del círculo crepuscular es la que determina la duracion del crepúsculo, pero varía probablemente segun los tiempos y los parages.

281 Es, pues, la duracion del crepúsculo el tiempo que gasta el sol en bajar 18°, y esta duracion varía todos los dias. El mas largo de todos los crepúsculos es siempre el dia del solsticio de verano, pero el mas corto no siempre es el dia del solsticio de invierno; hay un término medio en que su duracion es la menor de todas, y para hallarle es preciso resolver la siguiente cuestion de *máximos* y *mínimos.*

Ha-

Fig. 282 *Hallar la declinacion del sol el dia del mínimo crepúsculo en una latitud dada, y la duracion del crepúsculo el mismo dia.*

58. Sea *HO* el orizonte; *CHZPOD*, el meridiano; *CD*, el círculo crepuscular, que está 18° debajo del orizonte; *Z*, el zenit del lugar dado; *P*, el polo boreal; *FNGM*, el paralelo que anda el sol al tiempo del crepúsculo mínimo, y cuya declinacion ó distancia *PM* al polo hemos de determinar; *MN*, el arço del mismo paralelo que corresponde al ángulo horario *NPM*, y mide la duracion del crepúsculo mínimo. Se tirará otro círculo *TR* paralelo al equador, infinitamente próximo al paralelo *MN*, y por la naturaleza del mínimo estos dos arcos serán iguales (III. 404). Tendremos, pues, *TR* = *NM*; pero *TR* = *FG*, por razon del paralelismo de los dos arcos *FG* y *TR*, *FT* y *GR*; luego *FN* = *GM*. A mas de esto, *FT* = *GR* por razon del paralelismo de los dos círculos *FG*, *TR*; luego los triángulos rectángulos *FTN*, *GRM* son iguales, luego el ángulo *RMG* es igual al ángulo *TNF*. El ángulo *ZMR* y el ángulo *PMG* son rectos, luego el ángulo *RMG* es igual al ángulo *PMZ*. Por la misma razon *TNF* = *PNZ*; luego el ángulo *PNZ* es igual al ángulo *PMZ*. Si hacemos *MQ* = 90°, y tiramos el arco *PQ*, resultará el triángulo esférico *PQM* igual al triángulo *ZNP*, pues *ZN* = *MQ*, *PN* = *PM*, y el ángulo *N* = el ángulo *M*; luego tendremos *PQ* = *PZ*.

283 El triángulo *ZQP* nos dá (III. 769). cos *ZQP* =

$= \frac{\cos ZP - \cos PQ . \cos ZQ}{\text{sen } QP . \text{sen } ZQ} = \frac{\cos ZP (1 - \cos ZQ)}{\text{sen } ZP . \text{sen } ZQ}$ (porque ZP Fig. $= QP) = \frac{\cot ZP (1 - \cos ZQ)}{\text{sen } ZQ}$; luego para su suplemento, cuyo coseno es negativo (14), tendremos $\frac{-\cot ZP (1 - \cos ZQ)}{\text{sen } ZQ} = \cos PQM$.

En el triángulo PQM tenemos (III. 772) $\cos PM = \text{sen } PQ . \text{sen } QM . \cos Q + \cos PQ . \cos QM$; pero el segundo término es nulo, porque $QM = 90^\circ$; y á mas de esto $\text{sen } QM = 1$; luego $\cos PM = \text{sen } PQ . \cos PQM$ $= \frac{-\cot ZP (1 - \cos ZQ) \text{sen } ZP}{\text{sen } ZQ} = \frac{-\cos ZP (1 - \cos ZQ)}{\text{sen } ZQ}$; y substituyendo en lugar de $\frac{1 - \cos ZQ}{2}$ su valor $\text{sen } \frac{1}{2} . \text{sen } QZ^2$ (II. 397), sacaremos $\frac{1}{2} \cos PM = \frac{-\cos ZP . \text{sen } \frac{1}{2} ZQ . \text{sen } \frac{1}{2} ZQ}{\text{sen } ZQ}$. El denominador $\text{sen } ZQ = 2 \text{ sen } \frac{1}{2} ZQ . \cos \frac{1}{2} ZQ$ (II. 378); substituyendo este valor en el denominador de la espresion antecedente, se transformará en $\frac{-\cos ZP . \text{sen } \frac{1}{2} ZQ}{2 \cos \frac{1}{2} ZQ} = \frac{-\cos ZP . \text{tang } \frac{1}{2} ZQ}{2} = \frac{1}{2} \cos PM$. Luego $- \cos PM = \cos ZP . \text{tang } \frac{1}{2} ZQ$; de donde se infiere esta proporcion: *el seno total es al seno de la latitud del lugar dado* (cos ZP), *como la tangente de* 9° ($\frac{1}{2}$ZQ) *es al seno de declinacion del sol.* El signo *menos* señala una declinacion austral.

284 Para hallar la duracion del crepúsculo mínimo, se considera que los triángulos PQM, ZNP son iguales (282), y el ángulo $QPM = ZPN$; luego $ZPQ = MPN$. Pero en el triángulo ZPQ, cuyos tres lados son dados, tenemos para el ángulo P, $2 \text{ sen } \frac{1}{2} P^2 = \frac{\cos (PQ - PZ) - \cos ZQ}{\text{sen } PQ . \text{sen } PZ}$ (III. 720) $= \frac{1 - \cos ZQ}{\text{sen } PZ^2}$, porque $PQ =$

Fig. *PZ*; luego sen $\frac{1}{2}$ $P^2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos ZQ}{\text{sen } PZ^2} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} ZQ^2}{\text{sen } PZ^2}$; luego sen $\frac{1}{2}$ $P = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} ZQ}{\text{sen } ZP}$; sácase de aquí esta proporcion: *el coseno de la latitud del lugar* (sen PZ), *es al seno de 9°* (sen $\frac{1}{2}$ZQ), *como el radio es al seno de la mitad del ángulo* ZPQ *ó* NPM, la qual convertida en tiempo señala la duracion del mínimo crepúsculo.

De la Paralaxe.

285 La *Paralaxe* es la diferencia entre un lugar donde se vé un astro mirándole desde la superficie de la tierra, y el lugar donde parecería si le mirásemos desde el centro de la tierra. Suele llamarse *Paralaxe diurna* para distinguirla de la Paralaxe anua, de la qual trataremos separadamente mas adelante.

Todos los movimientos celestes se deben referir al centro de la tierra para que parezcan regulares; porque como los diferentes puntos de la superficie de la tierra tienen situaciones distintas unos respecto de otros, han de ver un astro con aspectos diferentes. Es preciso trasladarse al centro, para verlo todo en su verdadero sitio, y averiguar la verdadera ley de los movimientos celestes. Por este motivo se nos hace indispensable calcular á cada paso la paralaxe, para reducir el lugar de un planeta observado al que hubiéramos visto desde el centro de la tierra.

59. 286 Sea *T* el centro de la tierra; *O*, el punto de la superficie donde está el observador; *TOZ*, la linea vertical,

cal, ó la línea que pasa por el zenit *Z*, por el punto *O* del Fig. observador, por el centro *T* de la tierra, y por el nadir. Un planeta P colocado en la linea del zenit, siempre corresponde á un mismo punto del cielo, yá se le mire desde el punto *O*, yá desde el centro *T*; el punto del cielo que corresponde al zenit, señala el lugar del astro en ambos casos. Luego *un astro que parece en el zenit no tiene paralaxe.*

287 Si el planeta en vez de estar en la linea del zenit TOPZ, parece en la linea orizontal *OH*, perpendicular á la primera; como su distancia *TH* al centro de la tierra *es la misma que la distancia TP*, el lugar del planeta *H* visto desde el centro de la tierra está en la linea *TH*, el lugar del planeta visto desde el punto *O*, está sobre la linea *OH*. Estas dos lineas *TH*, *OH* no corresponden á un mismo punto del cielo; porque mas allá del punto *H* donde se cruzan, se ván apartando una de otra, irán á parar *á distintos* puntos del firmamento, y le señalarán al astro puesto en *H* dos situaciones diferentes, cuya diferencia es lo que propiamente llamamos paralaxe.

288 Comparemos estas dos diferentes situaciones, ó estos dos diferentes puntos con el punto del zenit, ó el punto del cielo que está en la linea *TOZ* tirada por el centro y el punto *O* de la superficie. El ángulo *ZOH* que forma la linea vertical *OZ* con la linea *OH*, en la qual se vé el planeta, es la distancia aparente del astro al zenit. Si estuviéramos en el centro *T*, el ángulo *ZTH* sería la verdade-

Fig. ra distancia del astro al zenit, ó espresaría quantos grados la linea *TH*, tirada al astro, discreparía de la linea *TZ* tirada al zenit.

289 La distancia aparente *ZOH* es mayor que la distancia verdadera *ZTH*; porque en el triángulo rectilíneo *HTO*, cuyo lado *TO* es prolongado hasta *Z*, el ángulo esterior *ZOH* es igual á los dos interiores *T* y *H* (I. 394); luego es mayor que el ángulo *T* todo lo que coge el ángulo *H*; por consiguiente la distancia aparente del astro *H* al zenit es mayor que la distancia verdadera *ZTH*. El ángulo *OHT* es la diferencia de estas dos distancias, y esta diferencia se llama la *paralaxe orizontal*, quando la linea *OH* es orizontal, qual la hemos supuesto, esto es, quando el lugar aparente del astro que se observa está en el *orizonte aparente OH*, quiero decir, en la tangente tirada por el punto *O* de la superficie terrestre. En el triángulo *TOH* rectángulo en *O*, tenemos esta proporcion, tomando la unidad por radio ó seno total; $1 : \text{sen}\,OHT :: TH : OT$; luego el seno de la paralaxe orizontal es igual á $\frac{OT}{TH}$; quiero decir, que el radio de la tierra dividido por la distancia del astro, dá una fraccion (17) que en las tablas de los senos espresa la paralaxe.

290 Es, pues, la paralaxe de un astro el ángulo que forman en el centro del astro dos rayos, de los quales el uno vá al centro de la tierra, y el otro al punto de la superficie donde está el observador; es tambien el ángulo en el qual se vé el radio de la tierra, ó la distancia á que el observador

dor está del centro de la tierra, quando se supone que dicho *radio*, ó dicha distancia es vista desde el centro del planeta. Fig.

291 El triángulo *TOH* se llama *Triángulo paraláctico*; siempre está en situacion vertical, porque como el radio *OT* es una linea vertical, el plano del triángulo formado sobre *OT* no puede estar inclinado. Luego la paralaxe obra todo su efecto de arriba abajo en el plano de un círculo vertical, haciendo que los astros parezcan mas bajos de lo que están, sin hacer que parezcan, ni mas á la derecha, ni mas á la izquierda. 59.

292 *Hasta aquí no* hemos hablado mas que de la paralaxe de los astros, que están en el orizonte, esto es, en los casos que el ángulo *ZOH* es un ángulo recto, y la paralaxe que corresponde á este caso la hemos llamado paralaxe orizontal. Pero quando el planeta *L* está mas cerca del zenit, de modo que el ángulo *ZOL*, distancia del planeta al zenit, sea agudo, el ángulo de la paralaxe *OLT* será menor, entonces se le llama *paralaxe de altura.*

293 *El seno total es al seno de la paralaxe orizontal, como el seno de la distancia al zenit es al seno de la paralaxe de altura*; en el supuesto de estar el planeta en ambos casos á la misma distancia del centro de la tierra, y que la tierra sea esférica.

El triángulo rectángulo *HOT* nos dá esta proporcion, *HT* es á *TO*, como el seno del ángulo recto *O* es al seno del ángulo *THO* (I. 671). El triángulo *TOL* tambien nos dá

Fig. $TL : TO :: \text{sen } LOT : \text{sen } TLO$. En esta última proporcion podemos substituir en lugar de TL su igual HT, una vez que por el supuesto el planeta siempre está á la misma distancia del centro de la tierra. Tenemos, pues, las dos proporciones siguientes con llamar R el seno del ángulo recto, $HT : TO :: R : \text{sen } H$, $HT : TO :: \text{sen } LOT : \text{sen } L$; luego $R : \text{sen } LOT :: \text{sen } H : \text{sen } L$. Pero el seno del ángulo obtuso LOT es el mismo que el del ángulo LOZ, ó de la distancia del planeta al zenit; luego el radio es al seno de la distancia al zenit, como el seno de la paralaxe orizontal H es al seno de la paralaxe de altura L.

El seno de la distancia aparente al zenit es lo mismo que el coseno de la altura aparente, y siempre suponemos que el radio es la unidad; luego 1 : cos alt. :: sen paral. oriz.: sen paral. de alt.; luego el *seno de la paralaxe de altura es igual al seno de la paralaxe orizontal multiplicada por el coseno de la altura aparente.*

294 La paralaxe orizontal de la luna que es la mayor de todas las paralaxes de los planetas, no es mas que de un grado ó allá se vá; pero la diferencia entre el seno de un grado, y el arco de un grado es apenas de un quarto de segundo; luego se puede tomar uno por otro, y decir en general que *la paralaxe de altura es igual á la paralaxe orizontal multiplicada por el coseno de la altura aparente.* Por consiguiente si llamamos p la paralaxe orizontal, y h la altura aparente, supondremos que la paralaxe de altura $= p \cdot \cos h$.

Del

295 Del valor hallado se infiere lo que digimos antes (286), es á saber que es nula la paralaxe quando el astro parece en el zenit; porque quando la distancia al zenit es nula, su seno = o, y como la paralaxe de altura será entonces el producto de cero por la paralaxe orizontal, tambien será cero. Al contrario, la paralaxe es mayor en el orizonte, que en otra elevacion qualquiera; porque el coseno de la altura no puede ser mayor que el seno de 90°, ó el coseno de cero; luego el producto de la paralaxe orizontal por el coseno de la altura aparente, que compone la paralaxe de altura, no puede ser mayor que quando el planeta *está en el orizonte.* Aun en el caso de hallarse en el orizonte real, esto es, de ser el ángulo *OTH* recto, siendo agudo el ángulo *TOH*, el coseno de *TOH* sería menor que el radio, y la paralaxe sería menor que quando el ángulo *TOH* era recto, esto es, quando la linea *OH* del lugar aparente visto desde la superficie de la tierra estaba en el orizonte. Por otra parte se echa de ver que la perpendicular que fuese igual á *TH*, siendo en el último caso mas larga que *HO*, el radio *TO* se vería en un ángulo menor que quando el ángulo *O* es recto, y menor la distancia perpendicular. Tambien se hallaría que quando el triángulo *HOT* es isósceles, el ángulo *H* es siempre menor que la paralaxe orizontal, por ser la perpendicular mas larga que *HO*. Fig.

296 La variacion de la paralaxe de altura en un corto espacio de tiempo es facil de calcular por las fórmulas diferenciales; porque la paralaxe de altura es *p*.

Fig. cos b (294), la diferencial de cos b ès (III. 355) db . sen b ; luego la variacion de p. cos b será $p . db .$ sen b. Pero p suele ser valuado en segundos ; luego para que pdb. sen b valga tambien segundos, es preciso que db sea un quebrado, así como lo es sen b ; quiero decir, que se debe espresar en decimales del radio, dividiéndole por el arco de 57° (46) ; luego respecto de un grado de variacion en la altura, la variacion de la paralaxe será $\frac{p . \text{sen } h . 1^{\circ}}{57^{\circ}}$.

Supongamos que la paralaxe sea de $60'$, y la altura de 30° ; se hallará que respecto de un grado de variacion en la altura, la variacion de la paralaxe $= \frac{3600'' . \text{sen } 30^{\circ} . 3600''}{57^{\circ} 17' 44'' 8}$ $= 31'' 4$.

297 La paralaxe orizontal de un astro es tanto me-
59. nor, quanto mayor es su distancia; porque quanto mas el punto H se acercare al punto O, tanto mas el ángulo THO crecerá. En el triángulo THO tenemos esta proporcion TH: TO :: R :: sen THO ; si el astro estuviere en N, el triángulo TNO dará esta proporcion TN : TO :: R : sen TNO. De la primera proporcion se saca esta equacion TH . sen THO $= R . TO$, de la segunda proporcion se saca TN . sen TNO $= R . TO$; luego TH . sen $THO = TN$. sen TNO ; luego TH: TN :: sen TNO : sen THO. Luego la distancia TH en el primer caso es á la distancia TN en el segundo, como el seno de la paralaxe en el segundo caso es al seno de la paralaxe en el primero.

Lo mismo demostraríamos y del mismo modo, aun quando fuese otro qualquiera el ángulo TOH, con tal que los

pun-

puntos *N* y *H* estuviesen en una misma linea *ONH*; luego quando se supone que la altura aparente es una misma, los senos de las paralaxes de altura están en razon inversa de las distancias. Fig.

298 La paralaxe de un astro crece en la misma razon que su diámetro aparente.

Porque quando un astro se aleja mengua su magnitud aparente en la proporcion inversa de su distancia, conforme se verá mas adelante; pero su paralaxe orizontal mengua del mismo modo y en la misma razon (297); luego la paralaxe de un astro siempre es como su diámetro. Si el diámetro aparente llegára á ser la mitad menor por haberse apartado mas el planeta, tambien será la paralaxe la mitad menor, y permanecerá la misma razon entre el diámetro aparente y la paralaxe orizontal de un astro, sea la que fuere su distancia.

Por egemplo, el dia 6 de Junio de 1761 se halló de unos 30″ la paralaxe de Venus, y su diámetro aparente era entonces de 60, podemos, pues, afirmar que el diámetro de Venus es duplo de su paralaxe; por consiguiente quando el diámetro pareciere de 40″, la paralaxe será de 20,″ y en todos tiempos bastará observar el diámetro para inferir la paralaxe.

299 En conociendo la paralaxe orizontal de un astro es facil de determinar su distancia.

Porque en el triángulo rectángulo *THO*, es conocido el semidiámetro de la tierra *TO*, que segun probaremos en otro

lu-

Fig. lugar es de 1432 leguas de 2283 toesas cada una, y el ángulo *HOT* que es de 90°, porque se supone que el planeta está en el orizonte. Si además de esto fuere conocido el ángulo *THO* que es la paralaxe orizontal, será facil de resolver el triángulo *TOH*; y quedará averiguada la distancia *TH*.

DE

DE LAS ESTRELLAS FIJAS. Fig.

300 UNA vez que las estrellas son fijas ó inmóbiles, es esencial hacer de ellas una descripcion cabal, y determinar la situacion en que están unas respecto de otras; con esto sirven para apreciar, y comparar unos con otros los movimientos de los Planetas. Porque como desde un mismo sitio no se pueden medir los movimientos, sino con los ángulos que forman en el ojo del observador los espacios andados, hemos de valernos para esto de las estrellas, considerándolas como término de comparacion, y puntos luminosos fijados en la concavidad de una esfera, cuyo radío es indefinito, y el centro está en el ojo del observador; no puede originarse error alguno de este supuesto, porque la longitud de los lados de un ángulo ningun influjo tiene para alterar su cantidad.

301 Este destino de las estrellas manifiesta quan necesario es apuntarlas en un catálogo completo donde sus posiciones respectivas estén determinadas con la mayor exactitud posible, y este catálogo es uno de los puntos mas fundamentales de toda la Astronomía.

302 Por esta razon las han distribuido los Astrónomos en varias clases, segun la viveza de su luz. Llaman á las mas resplandecientes, estrellas de primera magnitud; á las que son menos brillantes, las califican de estrellas de segunda magnitud &c. por manera que á las que cuesta algun trabajo distinguirlas con la vista sola, las gradúan de es-

Fig. estrellas de sexta magnitud; las que no se pueden ver sin el auxilio de los anteojos, se llaman estrellas de séptima, octava &c. magnitud. Es estilo constante señalar cada estrella con una letra griega, conforme se verá dentro de poco.

303 Con la mira de escusar confusion, y poder señalar una estrella qualquiera, se la ha dado á cada una un nombre particular, se ha dividido el cielo en muchos grupos ó montones de estrellas, y en cada uno se ha dibujado una figura; pongo por caso, un Ariete ó Morueco, un Tauro ó Toro, un Dragon, un Hércules, &c. de modo que todas las estrellas que componen un monton determinado están comprendidas en la figura dibujada, y corresponden á sus diferentes partes, cuyos nombres llevan.

304 Por egemplo, se ha dibujado un Toro en un monton de estrellas; la que corresponde al ojo, se llama *la estrella del ojo del Toro*; otra que corresponde á la punta de un cuerno, se llama *el cuerno de Tauro*, y así de las demás. En virtud de esto, si se descubriere una estrella nueva entre estas dos, se señalaría sobre la marcha en que region del cielo se halla con decir que está en el cuerno ó ácia la punta de la cabeza de Tauro. Un monton de estrellas comprendidas en una figura dibujada conforme acabamos de decir, se llama *Constelacion*.

305 Finalmente, así como en la Geometría Práctica, quando se quiere levantar el plan exacto de un terreno, nos figuramos que tres lineas tiradas desde uno de los obgetos que contiene forman un triángulo, cuyos lados medimos con al-

algun instrumento, y enlazámos todos estos triángulos unos Fig. con otros por medio de un lado comun, segun se hará patente quando tratemos de la figura de la tierra; del mismo modo nos figuramos que cada estrella forma con otras dos á arbitrio un triángulo esférico, cuyos lados son arcos de la bóveda celeste, comprendidos entre dichas estrellas; y como el centro de estos arcos está en nuestro ojo, los medimos con el quadrante, procurando sea tan grande su radio, que se puedan señalar en su arco los minutos y segundos.

306 Despues de determinados por este método los arcos de las distancias de cada estrella á otras dos ó tres, se *han colocado en un globo*, dibujando en él las figuras de las constelaciones, y se han hecho mapas celestes generales y particulares.

La obra mas perfecta que se ha hecho para representar las constelaciones, y las estrellas de que se componen, es el *Atlas celeste* grabado en Londres el año de 1728 en 28 hojas. Esta obra se puede suplir con dos mapas celestes grabados en Londres por *Senex*, que constan de dos hojas cada uno. Acerca de esto, hay una gran diferencia entre los mapas celestes de los modernos, y los de los antiguos; estos solian pintar el cielo conforme le veríamos si le miráramos desde mas allá de su convexidad; pero los modernos le pintan en sus mapas conforme le vemos mirándole desde la tierra, esto es, su concavidad; resulta de aquí que para enterarse de las constelaciones, son mas acomodados los mapas que los globos celestes, porque como los globos pintan la

con-

Fig. convexidad del cielo, es preciso que nos figuremos que estamos en una situacion opuesta á la en que estamos quando miramos el cielo.

307 Entre todos los mapas celestes el que mas usan los Astrónomos es el mapa que representa el zodiaco, y en el qual se vé toda la banda celeste que abraza la eclíptica con ocho grados de cada lado de la misma eclíptica. Los mejores zodiacos que se conocen son el que gravó Juan Senex de la Real Sociedad de Londres, á fines del siglo pasado en dos grandes hojas; y el que publicó en París el año de 1755 Mr. Le Monier de aquella Real Academia de las Ciencias. Este último no tiene mas que una hoja, porque se ha formado con una escala menor que la que usó Senex.

308 Las constelaciones están divididas en tres clases; la primera se compone de las constelaciones del zodiaco; la segunda, de las que están en la parte boreal del firmamento; y la tercera, de las constelaciones que están en la parte austral. Todas están en la Tabla siguiente.

TA-

TABLA DE LAS CIEN CONSTELACIONES, que se figuran en los globos celestes.

12 Constelaciones del zodiaco.

Aries.
Tauro.
Geminis.
Cancer.
Leo.
Virgo.
Libra.
Escorpion.
Sagitario.
Capricornio.
Aquario.
Piscis.

23 Constelaciones boreales de los antiguos.

La Osa mayor.
La Osa menor.
El Dragon.
Cepheo.
Casiopeya.
Andrómeda.
Perseo.
Pegaso.
El Caballo menor.
El Triángulo boreal.
El Cochero.
La Cabellera de Berénice.
El Boyero.
La Corona boreal.
El Serpentario ú Ophiuco.
La Serpiente.
Hércules.
El Aguila.
Antinoo.

Siguen las 23 Constelaciones boreales.

La Flecha.
La Lira.
El Cisne.
El Delfin.

15 Constelaciones australes de los antiguos.

Orion.
La Ballena.
El Erídano.
La Liebre.
El Can mayor.
El Can menor.
La Hydra hembra.
La Copa.
El Cuervo.
El Centauro.
El Lobo.
El Altar.
El Pez austral.
El Navio.
La Corona austral.

22 Constelaciones que añadieron Hevelio, el P. Antelmo, Halley &c.

Cameleopardo.
El Rio Jordan.
El Rio Tigris.
El Cetro, y la Flor de Lis.
La Paloma.
El Unicornio ó Monoceronte.

Siguen las 22 Constelaciones que añadieron Hevelio, el P. Antelmo, Halley &c.

La Cruz.
El Sextante de Urania.
El Romboyde.
Los Perros de caza.
El Leon menor.
El Lince.
La Zorra.
El Ganso.
El Escudo de Sobieski.
El Triángulo menor.
El Can cerbero.
Rameau.
El Lagarto.
El Monte Ménalo.
El Corazon de Carlos II.
La Encina de Carlos II.

14 Constelaciones australes de Teodori, Bayer.

El Indio.
La Grulla.
El Fenix.
La Abeja ó la Mosca.
El Triángulo austral.
El Ave del Paraiso.

Siguen las 14 Constelaciones australes.

El Pabo Real.
El Tucan.
La Hydra macho.
La Dorada.
El Pez volador.
El Camaleon.
Tambien hay la Nube *grande, y la* Nube *chica.*

14 Constelaciones australes del Abate de la Caille.

El Taller del Escultor.
El Horno de Chímica.
El Relox Astronómico.
La Retícula romboid.
El Buril del Gravador.
El Caballete del Pintor.
La Brújula.
La Máquina Pneumática.
El Octante de reflexion.
El Compas.
La Esquadra, y la Regla.
El Telescopio.
El Microscopio.
La Montaña de la mesa.

Pe-

Fig. 309 Pero el que no tuviere á su disposicion ni mapa, ni globos, podrá conocer las constelaciones por medio de un catálogo y con un poco de paciencia. Calculará el paso de la estrella por el meridiano con su altura; plantará un quadrante de círculo sobre una meridiana, poniéndole á la altura calculada; el quadrante de círculo indicará la estrella que se buscare, y la verá parecer el observador al estremo del radio, ó en el anteojo del quadrante, á la hora que dicha estrella pasare por el meridiano.

310 Con la mira de facilitar el conocimiento de las estrellas á los que no quisiesen hacer cálculo ninguno, vá señalada en la Tabla siguiente la hora, y el minuto del paso por el meridiano de las estrellas principales para el dia primero de cada mes, y su altura respecto de París.

Ho-

Horas á que pasan por el meridiano las principales estrellas el primer dia de cada mes, con su altura meridiana para París.

Meses	Aldebaran		La Cabra		α de Orion		Sirio		Procion		Régulo	
	Altura		Altura		Altura		Altura		Altura		Altura	
	57°	12′	86°	54′	39°	46′	24°	45′	47°	3′	54°	15′
Enero	9h	32′	10h	9′	10h	34′	11h	44′	12h	36′	15h	4′
Febrero	7	20	7	57	8	22	9	32	10	25	12	53
Marzo	5	32	6	9	6	34	7	44	8	36	11	4
Abril	3	39	4	16	4	41	5	51	6	43	9	11
Mayo	1	48	2	25	2	50	4	0	4	52	7	20
Junio	23	41	0	22	0	47	1	57	2	50	5	18
Julio	21	37	22	14	22	39	23	49	0	46	3	14
Agosto	19	33	20	10	20	35	21	45	22	37	1	10
Septiemb.	17	37	18	15	18	39	19	50	20	43	23	10
Octubre	15	50	16	27	16	51	18	2	18	54	21	22
Noviemb.	13	54	14	30	14	55	16	5	16	58	19	26
Diciemb.	11	50	12	27	12	51	14	2	14	54	17	22

Meses	La Espiga		Arcturo		Antares		La Lira		Fohamante		Paso del equinoccio por el meridiano.	
	Altura		Altura		Altura		Altura		Altura			
	31°	13′	61°	34′	15°	16′	79°	45′	10°	22′		
Enero	18h	21′	19h	13′	21h	23′	23h	36′	3h	55′	5h	11′
Febrero	16	9	17	1	19	11	21	24	1	43	2	59
Marzo	14	21	15	13	17	23	19	36	23	51	1	10
Abril	12	28	13	20	15	30	17	43	21	58	23	17
Mayo	10	37	11	29	13	39	15	52	20	7	21	25
Junio	8	34	9	26	11	36	13	50	18	5	19	23
Julio	6	30	7	22	9	32	11	46	16	1	17	18
Agosto	4	26	5	18	7	28	9	41	13	56	15	14
Septiemb.	2	30	3	22	5	32	7	46	12	1	13	18
Octubre	0	42	1	34	3	44	5	58	10	13	11	30
Noviemb.	22	43	23	34	1	48	4	2	8	17	9	33
Diciemb.	20	38	21	30	23	40	1	58	6	13	7	29

Fig. La última columna de esta tabla señala la hora del paso del equinoccio por el meridiano, á la qual se ha de añadir la distancia á que estuviese del equinoccio la estrella propuesta, convertida en tiempo, para hallar á qué hora pasa la estrella por el meridiano. La altura meridiana de cada estrella vá apuntada en la parte superior de la columna, y debajo está el nombre de la estrella.

311 Supongamos, por egemplo, que el dia primero de Octubre queramos conocer en el cielo la estrella llamada *Sirio*. Segun la tabla pasa esta estrella por el meridiano el dia espresado á $18^h\ 2'$, esto es, el dia 2 de Octubre á $6^h\ 2'$ de la mañana, y su altura meridiana es para París, por la misma tabla, de $24^o\ 45'$; plantaremos un quadrante de círculo en el plano del meridiano á $6^h\ 2'$ de la mañana, poniéndole á la altura de $24^o \frac{3}{4}$; y al instante echaremos de ver que el quadrante estará dirigido ácia una estrella muy brillante, y esta será Sirio.

Hemos escogido un año medio entre dos bisiestos, de modo que no puede haber dos minutos de diferencia entre la observacion y la tabla, aun en años diferentes. Tambien servirá esta tabla para hallar qué hora es en sabiendo conocer las estrellas, y de qué lado está el meridiano.

Las alturas que ván señaladas encima del nombre de cada estrella menguan respecto de los que ván ácia el norte, y crecen respecto de los que se ván acercando al mediodia. Podrá, pues, reducirlas el observador á la latitud del lugar donde estuviere, añadiendo ó restando la diferencia que hubie-

bie-

biere entre dicha latitud y la de París que es de 48° 50.′ Así, respecto de Marsella, cuya latitud es de 43° 18′, la altura de Aldebaran en vez de ser de 57° 12′, es de 62° 44.′ Fig.

312 Prevenimos que los tiempos espresados en la tabla antecedente son tiempos contados astronómicamente, esto es, desde un mediodia hasta el mediodia siguiente. Así, quando se lee en la segunda columna que la estrella *Aldebaran* pasa por el meridiano el dia primero de Junio á 23^h $41'$, esto quiere decir en el uso comun á las 11^h $41'$ de la mañana el dia 2 de Junio, porque el dia primero de Junio no empieza segun los Astrónomos hasta mediodia de aquel dia, y no acaba hasta mediodia del dia siguiente, quando por el estilo comun ván yá contadas doce horas del dia 2 de Junio.

313 El método que acabamos de proponer para conocer las estrellas de primera magnitud, es largo y penoso, particularmente en invierno, por este motivo daremos otro, que será de mucho recurso para los aficionados que carecieren de globos, planisferios é instrumentos. Llámase este método *el Método de las Alineaciones*; y bien se deja conocer que estas alineaciones no pueden ser rigurosamente exactas; bastan no obstante para distinguir la forma de una constelacion.

Método de las Alineaciones para distinguir las constelaciones.

314 Supongamos que á eso de las siete ú las ocho de una noche de invierno, por el mes de Enero ó Febrero, se halle un curioso en un sitio despejado; verá del lado del medio-

 dia,

Fig. dia, en Europa por lo menos, la gran constelacion de *Orion*, que se compone de tres estrellas de segunda magnitud, muy inmediatas unas á otras, en una linea recta, y en medio de un gran quadrilátero.

315 Estas tres estrellas, llámadas la *Vandolera de Orion*, y comunmente los *tres Reyes*, indican con su direccion de un lado á *Sirio*, y del otro *las Pleyadas*. Sirio, que es la estrella mas resplandeciente de todo el firmamento, es muy reparable por su resplandor; está respecto de Orion al lado del oriente ó del sudeste.

316 Las *Pleyadas* están del lado del occidente ácia el norte; forman un grupo de estrellas facil de conocer, y está en la prolongacion de la linea tirada desde Sirio por medio de las estrellas de la vandolera de Orion; y la direccion de estas tres estrellas, que casi se encaminan ácia las Pleyadas, ó un poco mas al mediodia, las dará á conocer con facilidad; están sobre la espalda de Tauro ó del Toro.

317 *Aldebaran* que forma el ojo del Toro, es una estrella de primera magnitud, está muy cerca de las Pleyadas, en la linea tirada desde el hombro occidental de Orion y á las Pleyadas. *Procyon* ó el *Can menor*, es una estrella de primera magnitud, está al norte de Sirio, y es mas oriental que Orion; forma con Sirio y la vandolera de Orion, un triángulo casi equilátero, y bastan estas señas para distinguirle.

318 *Arcturo*, que es la estrella principal del *Boyero*, es una estrella de primera magnitud, y la está señalando la cola de la Osa mayor, de la qual dista 31° no mas; forman-

mando las dos últimas estrellas ζ y η de la Osa mayor una Fig.
linea que se dirige ácia Arcturo.

319 *Géminis* ó los *Mellizos* son dos estrellas de segunda magnitud, bastante inmediatas una á otra, que ocupan casi el medio del espacio que hay entre Orion y la Osa mayor. Tambien se pueden conocer por medio de Orion, porque si se tira una linea desde *Rigel* ó β de Orion, que es la mas occidental y mas meridional de su gran quadrilátero, por la estrella ζ, que es la tercera ó mas oriental de las tres de la vandolera, esta linea tambien se dirige ácia las cabezas de Géminis. Finalmente, las dos primeras estrellas ζ y ε *de la cola de la Osa mayor*, con la diagonal del quadrado tirada por *A* y *B*, forman una linea que tambien se dirige ácia las dos cabezas de los Mellizos ó Géminis, pasando por una de las patas de la Osa mayor.

320 Esta misma linea prolongada mas allá de las cabezas de los Mellizos, pasa por encima de los pies del mismo *Géminis*, que son quatro estrellas sobre una linea recta perpendicular á la primera. Finalmente, la misma linea tirada desde la Osa mayor á Géminis, prolongada mas allá de los pies de Géminis, vá á dar con el hombro oriental de Orion, esto es, con la estrella α que es la mas oriental y mas boreal del gran quadrilátero de Orion (314).

321 La linea tirada desde Rigel por el hombro occidental de Orion γ, vá á encontrar ácia el norte el cuerno austral del Toro ζ, de tercera magnitud, á igual distancia de γ de Orion, que esta lo está de Rigel, y es de unos

Fig. 14.° El cuerno boreal del Toro β es de segunda magnitud; está sobre la linea tirada por el hombro oriental α, y el cuerno austral ζ, á 8° de esta. La eclíptica pasa por entre los dos cuernos de Tauro.

322 La constelacion del *Leon* ó *Leo* se puede señalar por medio de las dos estrellas antecedentes α y β del quadrado de la Osa mayor; porque estas dos estrellas, de las quales nos valimos (96) para hallar la estrella polar del lado del norte, señalan con su alineacion á Leo del lado del mediodia á 45° de la Osa mayor. Leo es un gran trapecio, en el qual se repara particularmente una estrella de primera magnitud, llamada *Régulo* ó el corazon del Leon.

323 El corazon del Leon está sobre la linea tirada desde Rigel á Procyon, distante 37° de este último. La cola del Leon β es una estrella de segunda magnitud, que está algo al mediodia de la linea que vá desde Régulo á Arcturo; estando de Régulo á la distancia de unos 15° ácia el oriente.

324 *Cancer* ó el *Cangrejo* es una constelacion formada de estrellas chicas dificiles de percibir. La Nebulosa de Cancer es un monton de estrellas, menos reparable que el de las Pleyadas; está ó poco falta en la linea tirada desde el medio de Géminis al corazon del Leon, ó desde Procyon á la cola de la Osa mayor.

325 Al mediodia de las tres estrellas de la vandolera de Orion, hay un reguero de estrellas que forma lo que llaman *el Espadin* y la Nebulosa de Orion. La direccion de estas estrellas prolongada por encima de la estrella ε, en me-

medio de la vandolera, vá á pasar por el cuerno austral ζ Fig. del *Toro*, y despues por medio de la constelacion del *Cochero*. Esta constelacion es un gran pentágono irregular, en cuya parte mas septentrional hay una estrella de primera magnitud, llamada *la Cabra*. Tambien vá á parar á la Cabra una linea tirada por encima de las dos estrellas δ y α que son las mas boreales del quadrado de la Osa mayor.

326 *Aries*, que es la primera de las doce constelaciones del zodiaco, se compone principalmente de dos estrellas de tercera magnitud, bastante inmediatas una á otra, de las quales la mas occidental β vá acompañada de una estrellita de quarta magnitud, llamada γ, ó *la primera estrella de Aries*, porque en otros tiempos era la mas inmediata al punto equinoccial. Esta constelacion se conoce por medio de una linea tirada desde Procyon á Aldebaran, que vá á dar con Aries, 36° mas lejos que Aldebaran.

327 *El Ceñidor de Perseo* se compone de tres estrellas, pasando la una de ellas, que es de segunda magnitud, por el zenit de París, con corta diferencia. Forman estas estrellas como un arco curvo ácia la Osa mayor; la linea tirada desde la estrella polar á las Pleyadas, pasa por encima del Ceñidor de Perseo, y basta para darle á conocer. Para lo mismo puede servir otra alineacion, es á saber, la de Géminis y la Cabra, cuya linea se dirige ácia el Ceñidor de Perseo. La línea tirada desde la vandolera de Orion por Aldebaran, vá á parar á la cabeza de Medusa β, que Perseo tiene en su mano.

Fig. 328 El *Cisne* es una constelacion muy reparable, en la qual hay una estrella de segunda magnitud; tiene esta constelacion la figura de una cruz grande; la linea tirada desde Géminis á la estrella polar, vá á dar con el Cisne al otro lado, y á igual distancia de la estrella polar. Esta alineacion solo sirve para los tiempos del año en que se vén ambas constelaciones sobre el orizonte, por cuyo motivo daremos mas abajo otra alineacion para el Cisne.

329 El Quadrado de Pegaso le forman quatro estrellas de segunda magnitud, formando la mas boreal de las quatro de dicho quadrado la *Cabeza de Andrómeda.* La linea tirada desde las dos precedentes de la Osa mayor β y α, por la estrella polar, vá á dar mas allá del polo, en medio del quadrado de Pegaso. La linea tirada desde la vandolera de Orion por Aries vá á parar encima de la cabeza de Andrómeda; la linea tirada desde las Pleyadas por Aries vá á dar en el ala de Pegaso γ, ó *Algenib*, que es una de las quatro del quadrado; las otras dos están al occidente; la mas boreal de las dos occidentales es β, *Scheat*; la mas meridional α ó *Markab.*

330 *Casiopeya* es una constelacion directamente opuesta á la Osa mayor respecto de la estrella polar, de modo que la linea ó el círculo que vá desde el medio de la Osa mayor ó de la estrella ε, por la estrella polar, vá á dar en medio de Casiopeya al otro lado del polo. Compónese esta constelacion de seis ó siete estrellas que forman una *y*, ó tienen la figura de una silla trastornada. Esta forma no deja

de

de ser algo equívoca, pero las estrellas de Casiopeya son bastante reparables, por ser muchas de ellas de segunda magnitud. Fig.

331 *Cefeo* es una constelacion situada entre la estrella polar, Casiopeya, y el Cisne. La linea tirada desde la estrella polar á la cola del Cisne α, pasa cerca de las estrellas β y α de Cefeo, la una sobre el vientre y la otra sobre el hombro, dejándolas un poco del lado de Casiopeya. Antes de llegar á β, deja mas lejos del mismo lado la estrella γ, que está sobre la linea tirada desde los Guardias de la Osa menor por medio de Casiopeya.

332 La *Osa menor* tiene casi la misma figura que la Osa mayor, y la es paralela, pero están las estrellas que la componen en una colocacion opuesta á las de la Osa mayor. La estrella polar, que es de tercera magnitud, forma el estremo del rabo; las quatro estrellas que la siguen son mas chicas, pues no son mas que de quarta magnitud. Las dos últimas del quadrado son de tercera magnitud, se llaman *los Guardas de la Osa menor*, y están sobre la linea tirada por el centro del quadrado de la Osa mayor, perpendicularmente á sus dos lados mayores.

333 El *Dragon* está en parte entre la Lira, y la Osa menor, donde las quatro estrellas de su cabeza forman un losange bastante visible; su cola está entre la estrella polar, y el quadrado de la Osa mayor. La linea tirada por los dos guardias de la Osa menor β y γ se encamina á la estrella η del Dragon, cuya estrella está señalada ε por equívocacion en el planisferio de Senex. Esta estrella está entre

Fig. tre θ, mas meridional que ella, y ζ mas boreal, sobre una misma linea que casi se encamina al polo de la eclíptica, y algo mas lejos ácia δ y ε del Dragon, para atravesar despues la constelacion de Cefeo, entre β y γ.

334 La una de las diagonales del quadrado de Pegaso se encamina al norueste ácia la cola del Cisne α; la otra diagonal del quadrado de Pegaso se encamina al norueste ácia el Ceñidor de Perseo, pasa primero cerca de la estrella β del Ceñidor de Andrómeda, y despues cerca de la estrella γ del pie de Andrómeda. Estas dos estrellas β y γ, de segunda magnitud, dividen en tres partes iguales el espacio que hay entre la cabeza de Andrómeda, y la cintura de Perseo; la linea que vá de una á otra pasa por entre Casiopeya y Aries.

335 Las *Constelaciones* que se vén de noche en verano no tienen señas tan reparables como las de invierno, pero se pueden conocer por medio de las antecedentes. Quando el medio de la cola de la Osa mayor, ó la estrella ζ está en el meridiano mas arriba de la estrella polar, y en la parte mas alta del cielo, conforme sucede á las 9^h de la noche á fines de Mayo, se vé la ***Espiga de la Virgen*** ó ***Virgo*** en el meridiano del lado del mediodia, á 31° de altura en París; esta es una estrella de primera magnitud. La diagonal del quadrado de la Osa mayor tirada por α y γ, vá tambien á encontrar ó muy poco falta la misma estrella, bien que á la distancia de unos $68.^\circ$ Finalmente, esta estrella forma casi un triángulo equilátero con Arcturo y la co-

cola del Leon, de la qual está á unos 33° de distancia. Fig.

336 Entonces se vé un poco á la derecha y mas abajo de la espiga de la Virgen, un trapecio formado por las quatro principales estrellas del *Cuervo*, que tambien están sobre la linea tirada por la Lira y la espiga de Virgo.

337 La linea tirada por las últimas estrellas del quadrado de la Osa mayor δ y γ, y por el corazon del Leon, *Régulo*, vá á encontrar 22° mas al mediodia el *Corazon de la Hydra hembra*. Su cabeza está al mediodia del Cangrejo, Cancer, entre Procyon y Régulo, ó algo mas meridional. La Hydra coge desde el Can menor hasta debajo de la espiga de Virgo.

338 *La Copa está* entre la Hydra y el Cuervo, al occidente de este; el trapecio que forman las quatro principales estrellas de la Copa es bastante reparable.

339 La *Lira* es una estrella de primera magnitud, una de las mas brillantes de todo el firmamento, y forma casi un triángulo rectángulo con Arcturo y la estrella polar, estando el ángulo recto ácia el oriente en la Lira.

340 La *Corona* es una constelacion pequeña, que está cerca de Arcturo, sobre la linea que vá desde Arcturo á la Lira. Es facil de conocerla por medio de las siete estrellas en forma de semicírculo de que se compone, entre las quales hay una de segunda magnitud. Las dos primeras estrellas de la cola de la Osa mayor ε y ζ están en una direccion que tambien vá á dar con la Corona.

341 En *el Aguila* hay una hermosa estrella de segunda magnitud, que está al mediodia de la Lira y del Cisne; es

fa-

Fig. facil de dar con ella, porque está entre dos estrellas β y γ, de tercera magnitud, que forman una linea recta con la estrella hermosa, á la qual están muy inmediatas.

342 *Antinoo* es una pequeña constelacion que está debajo del Aguila.

343 La linea ó círculo máximo que pasa por Régulo y la espiga de la Virgen (cuya linea viene á ser la eclíptica) vá á encontrar algo mas al oriente la constelacion del *Escorpion*, que es muy reparable. Compónese de tres estrellas en la frente del Escorpion, habiendo entre ellas una de segunda magnitud, que forman un arco grande del norte al sur, y de una estrella mas oriental, que viene á ser como el centro del arco. Esta estrella es de primera magnitud, y se llama *Antares*, ó el corazon del Escorpion. Las estrellas de la frente, empezando desde el norte son β, δ, π, ρ.

344 En *Libra* ó las *Balanzas* hay dos estrellas de segunda magnitud, que forman los dos platillos. La linea que forman estas dos estrellas es perpendicular, con poca diferencia, al medio de la linea que vá desde Arcturo á la frente del Escorpion, quiero decir, que están en medio del intervalo que coge dicha linea, bien que un poco al occidente. El platillo austral está entre la espiga de la Virgen y Antares, hallándose estas tres estrellas muy inmediatas á la eclíptica; desde el platillo austral á la espiga hay $21^\circ \frac{1}{4}$, y $24^\circ \frac{2}{3}$ entre el mismo platillo, y Antares.

345 El *Sagitario* se sigue despues de Escorpion; quiero decir que está un poco mas adelantado ácia el oriente en

la

la linea tirada por la espiga de Virgo y Antares, que sigue, Fig.
ó poco falta, la direccion de la eclíptica. En el Sagitario hay muchas estrellas de tercera magnitud, que forman un trapecio grande, formando dos estrellas de este trapecio otro chico con otras dos estrellas; pero este segundo trapecio está en una direccion perpendicular al primero.

346 Esta constelacion tambien se puede encontrar tirando una linea desde el medio del Cisne al medio del Aguila, porque el Sagitario está como unos 35° al mediodia del Aguila, así como el Cisne está al norte del Aguila. Tambien se hallará el Sagitario tirando una diagonal en el quadrado de Pegaso *desde la cabeza* de Andrómeda por α de Pegaso, y prolongándola del lado del mediodia; esta diagonal, prolongada del lado del norte, vá á dar con el Ceñidor de Perseo (334).

347 El círculo tirado desde Antares hasta la estrella polar, atraviesa primero la constelacion de *Ofiuco* ó del *Serpentario*, y mas arriba encuentra la de *Hércules*. Como estas dos constelaciones son algo dificultosas de distinguir, las señalaremos con alguna individualidad. La linea tirada desde Antares á la Lira, pasa por entre las cabezas de Hércules y Ofiuco, que son dos estrellas de segunda magnitud, muy próximas una á otra, dirigiéndose la misma linea ácia la Corona. La cabeza de Ofiuco es la mas meridional y mas oriental de las dos.

348 La linea tirada por la cabeza de Ofiuco, y la de Hércules vá á encontrar γ de Hércules 13° mas allá, y la estrella β de Hércules está 3° al norueste de γ. La linea si-

Fig. tirada desde γ á β de Hércules, vá á dar con ϵ de Hércules ácia el norte, y con α de la Serpiente ácia el mediodia, ó ácia el sudueste, por mejor decir. Esta tambien forma un triángulo equilátero con la cabeza de Hércules y la Corona. La linea tirada desde la cabeza de Ofiuco al platillo austral de Libra, pasa por las estrellas ϵ y δ, la una de quarta magnitud, la otra de tercera, que están $1^\circ \frac{1}{3}$ una de otra, en una direccion perpendicular al *medio* de dicha linea; la estrella δ es la mas septentrional y mas occidental. Estas estrellas se dirigen al sudueste ácia ζ de la rodilla occidental de Hércules, que está á $7^\circ \frac{1}{2}$ de ϵ, y casi ácia η de la rodilla oriental, que está $9^\circ \frac{1}{2}$ mas lejos que ζ, del lado del norueste. La direccion de estas estrellas δ y ϵ pasa un poco por debajo de α de la Serpiente; el grupo de estas dos estrellas δ y ϵ de Ofiuco, forma, ó poco falta, un triángulo equilátero con β de Libra ó el platillo boreal, y α de la Serpiente. Cerca de esta se halla δ de la Serpiente $4^\circ \frac{1}{2}$ al norueste, y ϵ que está 2° *al sudueste.* La direccion de estas tres estrellas tambien señala δ y ϵ de Ofiuco, que están á 10° de ϵ de la Serpiente.

349 Las estrellas β y γ del hombro oriental de Ofiuco, están sobre la linea tirada desde la cabeza de Hércules á la de Sagitario (345), *en un mismo meridiano* con la cabeza de Ofiuco; β está 8°, y γ 10° mas al mediodia que la cabeza de Ofiuco; su direccion pasa por entre la cabeza de Ofiuco y la de Hércules.

350 La linea tirada desde la cabeza de Hércules á la

de

de Ofiuco se dirige ácia θ, estremo de la cola de la Serpiente, que dista 21° de la cabeza de Ofiuco, ácia el occidente; es una estrella mudable. Fig.

351 La linea tirada desde las estrellas mas orientales de la Corona, que están enfrente de la Lira, hasta α de la Serpiente, pasa por encima de la cabeza de la Serpiente entre γ y β de tercera magnitud, siendo la última la mas occidental de las dos. El pie occidental de Ofiuco está entre Antares y β, ó la boreal de la frente del Escorpion; su pie oriental está entre Antares y μ, que es la superior y occidental ó precedente del arco de Sagitario; sus dos pies están sobre la misma eclíptica.

352 *Capricornio* está en la prolongacion de la linea que pasa por la Lira y el Aguila. Hay en esta constelacion dos estrellas de tercera magnitud α y β á 2° una de otra, que están en la prolongacion de la espresada linea, y señalan la cabeza de Capricornio; 20° mas allá, del lado del oriente, hay otras dos estrellas γ y δ, colocadas de oriente á poniente á 2° una de otra, que señalan la cola de Capricornio.

353 *Fomabante* ó la boca del pez austral, estrella de primera magnitud, está en la linea tirada desde el Aguila á la cola de Capricornio, prolongada 20° mas allá.

354 El *Delfin* es una pequeña constelacion que está 15° al oriente del Aguila, y la forman en figura de losange quatro estrellas de tercera magnitud. La linea tirada desde el Delfin por medio de las tres estrellas del Aguila, per-

Fig. perpendicularmente á la linea que forman dichas estrellas, vá á parar ácia θ, estremo de la cola de la Serpiente, del lado del occidente (350).

355 *Aquario* se halla tirando una linea desde la Lira al Delfin, y prolongándola ácia el mediodia á una distancia del Delfin igual á la que hay entre el Delfin y el Aguila, esto es unos 30°; Aquario está un poco al oriente de esta linea. La linea tirada desde el Delfin á Fohamante atraviesa en toda su longitud la constelacion de Aquario, pasando primero por entre los dos hombros α y β, que son dos estrellas de tercera magnitud, distantes 10° una de otra, y las mas visibles de toda la constelacion.

356 La *Ballena* es una gran constelacion, situada al mediodia de Aries, debajo del espacio que hay entre las Pleyadas y el quadrado de Pegaso. La linea tirada desde el Ceñidor de Andrómeda por entre las dos estrellas de Aries, vá á pasar por encima de la estrella α de la quijada de la Ballena, que es una estrella de segunda magnitud, á 25° de los dos cuernos de Aries; la linea tirada desde la Cabra por las Pleyadas, pasa tambien ácia α de la Ballena. La linea tirada por Aldebaran y la quijada de la Ballena, vá á pasar por la cola β de la Ballena, otra estrella de segunda magnitud, que está 42° mas lejos, muy inmediata al agua de Aquario.

357 *Piscis* ó los dos peces es la duodécima constelacion del zodíaco, y es poco reparable; el uno de los peces está á lo largo del lado meridional del quadrado de Pegaso (329) de-

debajo de α y γ de Pegaso; el otro pez está al oriente del quadrado de Pegaso, entre la cabeza de Andrómeda y la cabeza de Aries. La estrella α del nudo del lazo de Piscis, que es de tercera magnitud, está sobre la linea tirada desde el pie de Andrómeda por la cabeza de Aries, y sobre la linea tirada desde los pies de Géminis por Aldebaran, 40° al occidente de este; tambien forma un triángulo rectángulo con α de la Ballena, y β ó γ de Aries, al mediodia de estas; es la estrella mas notable de la constelacion de Piscis. Fig.

358 No proseguiremos mas esta descripcion de las constelaciones; las demas no se pueden distinguir sin el socorro *de los mapas celestes*, por ser muy pequeñas y menos visibles.

359 Ahora podemos señalar el polo de la eclíptica, que tambien es uno de los puntos mas notables del cielo. El polo boreal de la eclíptica está en la constelacion del Dragon, en la linea tirada por las dos estrellas γ y δ de la Osa mayor, y forma un triángulo casi equilátero con la Lira y α del Cisne. Tambien está sobre la linea tirada por las precedentes del quadrado de la Osa mayor, y por los Guardias de la Osa menor (332), 3° mas allá de la estrella ε del Dragon, que está con corta diferencia sobre la misma linea en que están las estrellas θ, η, ζ, ε, φ del Dragon, cuya linea coge desde Arcturo hasta Cefeo y Casiopeya. La estrella η es aquella ácia la qual se dirigen las guardias de la Osa menor. Finalmente, el polo de la eclíptica forma un triángulo rectángulo é isósceles con la estrella polar

Fig. y β de la Osa menor, que es la mas septentrional de las dos últimas de la Osa menor, estando el ángulo recto en la estrella β.

De las Estrellas nuevas y variables, de la Via Lactea, de la Luz zodiacal &c.

360 Además de las estrellas que componen las constelaciones de que hemos hecho memoria, suelen parecer algunas estrellas *nuevas*, y otras que varían, y se llaman *variables*. Las nuevas se dejan ver algun tiempo, y despues desaparecen totalmente. Las mudables se dejan ver muy brillantes al principio, despues vá menguando su resplandor, desaparecen por último, y al cabo de algun tiempo vuelven á parecer. En la Ballena hay una variable, y en el Cisne hay tres &c.

361 La *Via lactea*, que tambien se llama el *Camino de Santiago*, es una blancura irregular que dá la vuelta al cielo en forma de faja. Es constante que parte del resplandor y blancura de la via lactea proviene de la luz de las estrellas que en ella hay á millones. Sin embargo, ni aun con el socorro de los mejores telescopios se vén bastantes, ni bastante cerca unas de otras, para que atribuyamos á las que se vén la blancura de la via lactea, tan reparable con la vista sola. Parece, pues, que no son las estrellas la sola causa de la blancura de la via lactea, bien que no sabemos como esplicarla.

362 Así como la via lactea forma una blancura al re-

rededor del cielo, se hallan tambien en otras partes donde Fig.
no llega la via lactea trechos blancos, que mirados con la vista sola parecen estrellas poco luminosas, y en el telescopio forman una blancura ancha é irregular, en la qual no se distinguen estrellas, ni espacios sembrados de manchas blancas ó estrellitas. Estas apariencias se llaman *Estrellas Nebulosas*, pareciendo algunas de ellas con el telescopio muchas estrellas amontonadas.

363 Cerca del polo austral se vén dos blancuras reparables, llamadas *las Nubes Grande* y *Chica*, ó las *Nubes de Magallanes*; pero los Holandeses y Dinamarqueses las llaman las *Nubes del Cabo*, porque los primeros que las vieron fueron navegantes, que se acercaban al Estrecho de Magallanes, ó al Cabo de Buena-Esperanza.

364 Tambien se repara en el cielo en algunos tiempos del año despues de puesto el sol, ó antes que nazca, una luz ó blancura bastante parecida á la via lactea, y se llama *Luz zodiacal*. Esta luz se parece á una lanza ó pirámide, cuya base está del lado del sol, y su ege, inclinado al orizonte, está todo en el zodiaco, cuya direccion sigue la espresada luz.

365 La luz zodiacal no es mas que la atmósfera del sol; es un fluido ó materia tenue luminosa por sí, ó alumbrada de la luz del sol no mas, que rodea este astro, estando sin embargo en mayor cantidad, y mas dilatada al rededor de su equador, que en las demás partes.

366 La figura de la luz zodiacal se parece á la de

M 2 un

Fig. un huso ó de una lente mirada de perfil; la punta remata en dos lineas rectas que á veces forman una con otra un ángulo de 26°, á veces un ángulo de 10°; quando el ayre está cargado se la suele ver truncada ó torcida á manera de guadaña; pero su figura la mas comun es la de un huso, de una lanza, ó de una pirámide.

367 Esta luz zodiacal, desde el sol que es su base, hasta su vértice coge á veces 45° de largo, en otras ocasiones coge 100° ó 120°; su ancho en su parte visible sobre el orizonte es de 8° hasta 30°, segun las circunstancias.

De la construccion de los Globos, y Mapas celestes.

368 Para la construccion de los Mapas y Globos celestes, que, segun hemos dado á entender, señalan la situacion de las constelaciones y de las estrellas que las componen, es preciso determinar la posicion de los astros respecto de los círculos fijos de la esfera celeste. Esta determinacion se consigue averiguando la longitud y latitud de los astros.

60. 369 Para dar á conocer la longitud de un astro, supongamos que sea ♈*Q* el equador; ♈*C*, la eclíptica inclinada al equador $23^\circ \frac{1}{2}$; *S*, una estrella que corresponde perpendicularmente al punto *M* del equador. Si se tira un arco de círculo *SEB* perpendicularmente á la eclíptica, el punto *B* señalará el punto de la eclíptica al qual corresponde la estrella *S*, y el arco de la eclíptica ♈*B* será al

lon-

longitud de la estrella. Por consiguiente *la longitud de una* Fig.
estrella es el arco ó la distancia que hay entre el equinoccio y el punto de la eclíptica al qual dicha estrella ó astro corresponde perpendicularmente.

370 Entre muchos astros que corresponden perpendicularmente á un mismo punto de la eclíptica, los unos están mas cerca de ella que los demás; quiero decir, que están á diferentes distancias de la eclíptica, y tienen diferentes latitudes, porque la *latitud de un astro qualquiera es la distancia perpendicular á que está de la eclíptica.* Si el astro puesto en *S* distáre de la eclíptica ♈*BC* la cantidad *SB*, medida perpendicularmente, su latitud será *SB*; si estuviera en *E*, tendria la misma longitud que antes, pero su latitud *EB* sería menor.

371 Los círculos trazados en el globo celeste perpendicularmente á la eclíptica, como *SB*, se llaman *Círculos de latitud*, porque sirven con efecto para medir las latitudes de los astros.

372 Como la longitud y latitud de los astros se buscan por medio de la eclíptica, que no es un círculo tan conocido, ni constante, ni tan facil de hallar como el meridiano y el equador, á estos dos círculos suelen referir los Astrónomos el movimiento de los astros, para cuyo fin buscan su ascension recta y su declinacion que son mas fáciles de averiguar. Pero despues reducen estos dos elementos á longitud y latitud; quiero decir, que los refieren á la eclíptica en la construccion de sus tablas astronómicas. Prac-

Fig. tícanlo así, porque el sol parece que se mueve en la eclíptica, y le acompañan todos los planetas, cuyas orbitas están muy cerca de la eclíptica, y de esto resulta mayor facilidad y uniformidad. Veamos, pues, cómo se halla la ascension recta de una estrella.

Método exacto para hallar la ascension recta de un astro.

373 Supongamos que hayamos reparado en el cielo una estrella que esté cerca del equinoccio ó del punto donde se cortan el equador y la eclíptica, y que queramos valernos de la espresada estrella para determinar las posiciones de las demás; el método mas sencillo para conseguirlo será seguir al equador al rededor del cielo á medida que los astros pasan unos tras de otros en virtud del movimiento diurno; los intervalos de uno á otro se llaman *Diferencias de ascension recta.* Llámanse así, porque si estuviéramos en la esfera recta ó debajo de la linea, veríamos los astros subir recta y no oblicuamente (178); entonces las estrellas que están 15° mas al oriente que la primera estrella desde la qual empezamos á contar, nacen una hora mas tarde; y se dice entonces que su diferencia de ascension recta es de 15° ó una hora.

374 En la esfera oblicua, donde el equador está inclinado al orizonte, como en Europa, no se debe considerar el nacer de las estrellas, sino su paso por el meridiano. Como este círculo es siempre perpendicular al equador, todas las estrellas que corresponden directamente al mismo

pun-

punto del equador, pasan juntas por el meridiano, y deci- Fig.
mos que su ascension recta es la misma, porque todas nacerian á un tiempo, si estuviéramos debajo del equador.

375 Sea EQ una porcion del equador; *ZM*, el me- 61.
ridiano; como las estrellas *A*, *B* pasan por el meridiano con el punto *M* del equador, el punto *M* señala su ascension recta; y si el espresado punto del equador pasare por el meridiano una hora mas tarde que el punto equinoccial, diríamos que dichas estrellas tenian todas 15° ó una hora de ascension recta; las que pasaren dos horas mas tarde que la primera estrella de Aries, tendrán respecto de ella 30° de diferencia de ascension recta. Por consiguiente la *Ascension recta* de un astro es su distancia al equinoccio contada sobre el equador.

376 En conociendo la ascension recta de una estrella, ó su distancia al equinoccio, contándola en la circunferencia del equador, será facil de hallar la de todas las demás, observando quanto mas tarde que la primera pasaren por el meridiano. Los intervalos de tiempo convertidos en grados, dando 15° á cada hora, darán sus diferencias de ascension recta, y añadiendo estas á la de la primera estrella que yá estará determinada, las sumas respectivas darán las ascensiones rectas de todas las demás. Muy en breve declararemos cómo se determina la ascension recta de la primera estrella.

377 Quando vemos pasar muchas estrellas á un tiempo por el meridiano, aunque tengan todas una misma ascension

Fig. recta, están mas altas unas que otras; la una se vé en *A*, la otra en *B*, y su distancia al equador *EMQ*, se llama *Declinacion*. Así, *BM* es la declinacion de la estrella *B*; *AM* es la declinacion de la estrella *A*. Si se observa la estrella *A* pasando por el meridiano á 51° de altura (110), y se sabe que la altura del equador es de 41° (137), se inferirá que la estrella está 10° mas alta que el equador, ó que tiene 10° de declinacion. Quando la estrella está mas arriba del equador, ó del lado del norte, se dice que su declinacion es *boreal* ó septentrional; pero si estuviera mas baja que el equador, ó del lado del mediodia, diríamos que su declinacion es *austral* ó meridional.

378 Esta es la razon por que llamamos *Círculos de Declinacion* todos los círculos que pasando por ambos polos del mundo son perpendiculares al equador. Estos círculos, considerándolos en la superficie de la tierra, son verdaderos meridianos; son *Círculos horarios* quando no se atiende mas que á su distancia al meridiano, porque señalan qué hora es.

379 Sentado esto, veamos cómo se halla la ascension recta de una estrella, declarando primero cómo se averigua la del sol.

62. Sea ♈*DB*♎ el equador; ♈*SH*♎, la eclíptica; *E*, una estrella, y *S* el sol quando pasa por el mismo paralelo que la estrella *E*, esto es, quando su declinacion *SD* es igual á declinacion *EC* de la estrella. Suponemos que aquel mismo dia se haya observado la diferencia de ascension recta *DC* entre el sol y la estrella (376); pasando despues el

sol

sol por el solsticio *H*, volverá al cabo de algunos meses al Fig. mismo punto *G* de la eclíptica, que tambien tiene la misma declinacion *GB* que la estrella; su distancia *B*♎ al equinoccio de otoño será entonces igual á la distancia ♈*D*, donde se hallaba al tiempo de la primera observacion respecto del equinoccio de la primavera. Suponemos que se vuelva á observar la diferencia *BC* de ascension recta entre el sol y la misma estrella, se sumarán una con otra estas dos diferencias observadas *DC* y *CB*, y saldrá *DB* movimiento total en ascension recta del sol en el intervalo de una observacion á otra; la mitad *DK* de este movimiento será la distancia al coluro de los solsticios, porque el sol se halló cada vez á igual distancia de los equinoccios que de los solsticios. Finalmente, el complemento de *DK* será ♈*D*, ascension recta del sol en la primera observacion.

380 Si la estrella *E* se hubiese movido un poco en ascension recta, en el intervalo de las dos observaciones, ácia la misma direccion que el sol, de modo que con esto saliese menor la segunda diferencia de ascension recta *BC*, se debería añadir este movimiento á la diferencia de ascension recta observada, para sacar esta diferencia de ascension recta la misma que hubiera sido, si la estrella se hubiese mantenido á la misma distancia de los equinoccios en ambas observaciones. Porque si la estrella ha caminado en la misma direccion que el sol, y suponemos que pase por el meridiano antes que el sol, saldrá la diferencia de sus pasos, menor que si la estrella se hubiese mantenido constantemente en los mismos pun-

Fig. puntos del cielo ; será, pues, preciso añadirla algo á dicha diferencia para sacar la que se hubiera observado si la estrella no hubiese mudado de sitio. Si al contrario el movimiento de la estrella fuese tal que se hubiese apartado del sol, y la diferencia de ascension recta saliese con esto mayor en la segunda observacion, se debería rebajar el movimiento de la estrella para reducirlo todo al estado de inmobilidad, que este método supone en los equinoccios y la estrella.

381 Las observaciones del sol siempre se hacen quando pasa por el meridiano ; y nunca se halla el sol al tiempo de la segunda observacion á mediodia exactamente á una distancia *GB* del equador igual á la primera *SD*. Si, pongo por caso, faltaren $10''$, y fuere mayor la declinacion al tiempo de la segunda observacion, se buscará por el cálculo quanto la ascension recta ♈*B* deberá haber crecido para que mengue $10''$ la declinacion *BG*. Si se hallaren $23''$, estos se deberán añadir á la diferencia de ascension recta observada, para sacar la diferencia *CB* que se hubiera observado en el instante preciso que el sol habia llegado al mismo paralelo *SG*, donde se hallaba al tiempo de la primera observacion.

382 En vez de valerse de una estrella *E* que se halle dos veces al año en un mismo paralelo *SG* con el sol, tambien podria servir otra estrella qualquiera *L*, cuyo paralelo distase del paralelo del sol 20 ó 30° &c. la operacion siempre sería la misma ; bastaría observar el sol en *S* y *G* siempre á la misma declinacion, ó á distancias iguales del pa-

paralelo que pasare por la estrella, y sacar cada vez la diferencia de ascension recta entre el sol y la estrella, en el instante que el sol se hallase en el mismo paralelo, ó á igual distancia del equador y de los equinoccios. Fig.

383 Aplicaremos este método á un egemplo. Refiere Mr. de la Caille en sus Lecciones de Astronomía, que el dia 12 de Abril de 1749, observó en París la altura meridiana del centro del sol, de 49° 58′ 33″; averiguó por medio de muchas observaciones, que aquel mismo dia la diferencia de ascension recta entre el sol y la lira, ó el arco del equador contándole desde la estrella y ácia el sol de occidente á oriente, era de 103° 50′ 54″, ó contando desde el sol ácia la estrella, siempre de occidente á oriente, de 256° 9′ 6″ (esto era lo que faltaba para los 360°); estando, pues, el sol en *S*, y la estrella en *M*, el arco *DN* del equador era de 256° 9′ 6.″ El dia 30 de Agosto del mismo año, habiéndose restituido el sol con corta diferencia al mismo paralelo ácia el punto *G*, se observó su altura meridiana de 50° 3′ 8″, esto es, 4′ 35″ mayor que el dia 12 de Abril antecedente; y la diferencia de ascension recta entre la lira y el sol se halló ser de 241° 43′ 26″ á mediodia; quiero decir, que el arco *BN* era de 118° 16′ 34″, que eran el complemento para 360° de la misma diferencia de ascension recta. El movimiento del sol en ascension recta de un dia para otro, que era facil de observar, comparándole dos dias consecutivos con la estrella, era entonces de 55′ 10″4 (este 4 significa décimas de segundo),

y.

Fig. y su movimiento en declinacion averiguado por las alturas meridianas era de 21′ 45″ 4. Se hará, pues, esta proporcion: 21′ 45″ 4 son á 55′ 10″ 4, como 4′ 35″, diferencia de las declinaciones observadas, son á 11′ 37″, y esto manifiesta, que si el dia 12 de Abril la declinacion del sol hubiera sido 4′ 35″ mayor, esto es, igual á la del dia 30 de Agosto, su ascension recta hubiera tambien sido el dia 12 de Abril 11′ 37″ mayor, porque creciendo la declinacion habia de crecer la diferencia de ascension recta, conforme se verá mas adelante. Por consiguiente si la altura meridiana de 12 de Abril hubiera sido 50° 3′ 8″, el arco *DN* en vez de ser de 256° 9′ 6″, hubiera sido entonces de 255° 57′ 29″, ó la diferencia de ascension recta 104° 2′ 31.″ Si se resta el arco *BN* igual por observacion á 118° 16′ 34″ del arco *DN* corregido è igual á 255° 57′ 29″, restará el arco *DB*, ó el movimiento del sol en ascension recta en el tiempo que gastó en restituirse al mismo paralelo, 137° 40′ 55″; pero este movimiento es respecto de la estrella no mas; fue 18″ mayor respecto del equinoccio, porque la estrella habia andado 18″ respecto del equinoccio, en el intervalo que hubo desde 12 de Abril á 30 de Agosto, por manera que el sol estaba menos distante de la estrella en la segunda observacion, que si se hubiera mantenido la estrella en una misma posicion respecto del equinoccio. Añadiendo, pues, 18″ al movimiento de ascension recta, saldrá de 137° 41′ 13″, y este es el valor del arco *DB*. El coluro de los solsticios *HK* pasa por en medio de este arco *DB*, pues se hallaba el sol con

una

una misma declinacion en B y en D; por lo mismo el arco BK ó el arco KD es de $68° 50' 36'' 5$, y esta es la porcion del equador comprendida entre el coluro de los solsticios, y el punto al qual correspondia el sol el dia 12 de Abril en el instante que pasaba por el paralelo, dónde se halló el dia 30 de Agosto á mediodia. El complemento del arco KD es el arco $♈D$, $21° 9' 23'' 5$, y esta es la ascension recta verdadera del sol para el mismo tiempo; pero la lira M seguia al sol, quiero decir, que estaba mas al oriente del sol $255° 57' 29''$ que componen el arco DN, y sumando uno con otro estos dos arcos $♈D$, DN, sacaremos $♈N$ que espresa quanto mas tarde que el equinoccio pasaba la lira por el meridiano, ó su ascension recta aparente el dia 12 de Abril, $277° 6' 52'' 5$. Fig.

384 El método declarado (379), y otros muchos de que nos valdremos en este tratado, se funda en el principio de que quando un astro anda la parte superior de un círculo $♈SHG♎$, y sus elevaciones SD y GB son las mismas, es indispensable que sus distancias SH y GH al vértice H del semicírculo, sean tambien iguales, porque las dos partes $♈H$ y $H♎$ son semejantes en todas sus partes.

385 Una vez averiguadas la ascension recta y la declinacion de una estrella, es facil señalar su longitud y latitud por medio de las proporciones siguientes. Pero el uso de los senos requiere que en lugar de la ascension recta dada se haga uso de la distancia al equinoccio mas próximo; quiero decir, que si la ascension recta pasare de $90°$, se de-

Fig. deberá tomar su suplemento para 180.° Si pasare de 180°, se restarán y servirá la resta. Si pasare de 270°, se tomará lo que faltare para 360° con poca diferencia.

63. Sea *EA* la ascension recta de un astro qualquiera, ó su distancia al equinoccio mas inmediato, contándola sobre el equador, y menor que 90°; *AS*, la declinacion del mismo astro, ó su distancia al equador; *EC*, la eclíptica; *SB*, la latitud que buscamos del astro *S*, y *EB* su longitud, ó por mejor decir su distancia al equinoccio mas próximo, contándola sobre la eclíptica. Imaginaremos un círculo máximo *ES* que vaya desde el punto equinoccial á la estrella, para formar un triángulo esférico *SEA* rectángulo en *A*, con la ascension recta, y la declinacion del astro, y otro triángulo esférico *SBE* rectángulo en *B*, con la longitud y latitud del mismo astro. Se resolverá primero el triángulo *SAE*, rectángulo en *A*, cuyos lados son conocidos, y quedará determinado el ángulo *SEA*, y la hypotenusa *SE*. Por medio del ángulo *SEA* y del ángulo *BEA*, que es la oblicuidad de la eclíptica (128), se formará el ángulo *SEB* que será su diferencia, si el punto *S*, y el punto *B* estuviesen ambos mas arriba ó debajo del equador; al contrario, el ángulo *SEB* será la suma del ángulo *SEA* y de la oblicuidad de la eclíptica *AEB*, si el astro *S* y el punto *B* de la eclíptica que le corresponde estuvieren el uno al norte y el otro al sur del equador. Despues de formado el ángulo *SEB*, este y la hypotenusa *SE* determinada por la segunda analogía, servirán para determinar la longitud *EB* y la latitud *BS*.

L

I. *El radio* Fig.

es al seno de la ascension recta AE,

como la cotangente de la declinacion SA

es á la cotangente del ángulo SEA (III. 709 *E*).

La suma ó la diferencia de la oblicuidad de la eclíptica, y este ángulo, dará el ángulo de la hypotenusa *SEB*.

II. *El radio*

es al coseno de la ascension recta AE,

como el coseno de la declinacion SA

es al coseno de la hypotenusa SE (III. 709 *E*).

III. *El radio*

es al coseno del ángulo SEB,

como la tangente de la hypotenusa SE

es á la tangente de la Longitud EB (III. 709 *D*).

IV. *El radio*

es al seno de la hypotenusa SE,

como el seno del ángulo SEB

es al seno de la Latitud SB (III. 709 *D*).

386 Despues de la primera analogía, para determinar el ángulo *SEB*, se ha de tomar la suma del ángulo *SEA*, y de la oblicuidad de la eclíptica, si el astro estuviere en los seis primeros signos, ó signos septentrionales, con una declinacion austral, ó en los seis últimos con una declinacion boreal. Pero se deberá tomar su diferencia si el astro estuviere en los signos septentrionales con una declinacion septentrional, ó en los seis últimos signos, que son los signos meridionales, con una declinacion meridional. Se resta

in-

Fig. indistintamente el menor del mayor, pero es preciso saber con certeza quál es el menor.

387 La tercera anología dá, en lugar de la longitud verdaderamente tal, la distancia al equinoccio inmediato contándola en la eclíptica. Y así se inferirá la longitud contada desde el equinoccio de la primavera, prácticando lo contrario de lo egecutado (385), esto es, tomando el suplemento de la cantidad hallada en la tercera analogía, si se hubiese tomado el de la ascension recta, ó añadiendo 180° si se hubiesen restado de la ascension recta, ó tomando finalmente lo que faltare para 360° si se hubiese practicado antes lo mismo respecto de la ascension recta.

388 Despues de la quarta analogía, se sabrá que la látitud es boreal ú austral, si estando el astro en los seis primeros signos tuviere una declinacion boreal, y al mismo tiempo el ángulo de la hypotenusa hallado por la primera analogía, fuese mayor por la oblicuidad de la eclíptica; ó si estando el astro en los seis últimos signos, tubiere una declinacion meridional, y al mismo tiempo el ángulo de la hypotenusa hubiere salido menor que la oblicuidad de la eclíptica. Pero la latitud será austral quando en los seis primeros signos la declinacion fuere austral, ó quando siendo boreal la declinacion, el ángulo de la hypotenusa fuere menor que la oblicuidad de la eclíptica. La latitud tambien será austral si en los seis últimos signos la declinacion fuere austral, y al mismo tiempo el ángulo de la hypotenusa fuere mayor que la oblicuidad de la eclíptica.

Si

389 Si el ángulo de la hypotenusa añadido en algunos casos, conforme hemos dicho, á la oblicuidad de la eclíptica, formare una suma mayor que 90°, será señal de que la perpendicular *SB* cae del otro lado del equinoccio mas inmediato; entonces no se puede practicar lo prevenido (387), y en su lugar se practicará lo siguiente. En el primer quadrante de ascension recta, se deberá tomar lo que faltare en el resultado de la tercera analogía para los 360°; en el segundo quadrante, se deberán añadir 180°; en el tercero, se tomará el suplemento para 180°; y en el último quadrante de ascension recta, la misma cantidad hallada será la longitud que se busca. Fig.

390 Quando son dadas la longitud y la latitud de un astro, las mismas analogías sirven para hallar la ascension recta y la declinacion, escribiendo longitud en lugar de ascension recta, y latitud en lugar de declinacion. Esta operacion se hace por las reglas siguientes.

Desde luego, para hallar la distancia al equinoccio mas inmediato, se tomará el suplemento ó el exceso respecto de 180°, ó el complemento para 360° de la longitud dada, segun estuviere en el segundo, tercero ó quarto quadrante de la eclíptica, y se harán las proporciones siguientes.

I. *El radio* 63.
es al seno de la longitud EB, 64.
como la cotangente de la latitud SB
es á la cotangente de SEB (III. 709 E).

Fig. La suma ó la diferencia de este ángulo y de la oblicuidad de la eclíptica dará el ángulo de la hypotenusa.

II. *El radio*
es al coseno de la longitud,
como el coseno de la latitud
es al coseno de la hypotenusa (III. 709 *E*).

III. *El radio*
es al coseno del ángulo de la hypotenusa,
como la tangente de la hypotenusa
es á la tangente de la ascension recta (III. 709 *D*).

IV. *El radio*
es al seno del ángulo de la hypotenusa,
como el seno de la hypotenusa
es al seno de la declinacion (III. 709 *D*).

391 Despues de la primera analogía, si el astro estuviere en los seis primeros signos con una latitud boreal, ó en los seis últimos con una latitud austral, se tomará la suma del ángulo hallado y de la oblicuidad actual de la eclíptica. Pero si en los seis primeros signos la latitud fuere austral, ó fuere boreal estando el astro en los seis últimos, se tomará la diferencia para sacar el ángulo de la hypotenusa.

Si despues de añadido el ángulo *SEB* á 23° saliesen mas de 90°, se tomará su complemento; y en el primer quadrante de longitud, se tomará lo que la faltare para 360° á la cantidad hallada por la tercera analogía; en el segundo quadrante, se añadirán 180°, y en el tercero, se tomará el suplemento para 180°; en el quarto, no habrá nada que

Tha-

hacer, y el número que diese la tercera analogía será la ascension recta que se busca. Fig.

Despues de la quarta analogía se sabrá si la declinacion es austral ó boreal, considerando (388) que es de la misma denominacion que la latitud dada, á no ser que se haya restado de $23^{\circ}\frac{1}{2}$ el ángulo de la primera analogía.

392 Si la longitud dada fuese la del sol, la cuestion sería mucho mas facil. En el triángulo *SEA* conoceríamos la hypotenusa *ES* y el ángulo *E*, que es igual á la oblicuidad de la eclíptica; hallaríamos la ascension recta *EA*, la declinacion *AS*, y el ángulo *ASE* de la eclíptica con el círculo de declinacion por medio de las tres analogías siguientes. 65.

I. *El radio*

es al coseno de la oblicuidad de la eclíptica,

como la tangente de la longitud del sol

es á la tangente de la ascension recta (III. 709 *D*).

II. *El radio*

es al seno de la oblicuidad de la eclíptica,

como el seno de la longitud del sol

es al seno de su declinacion (III. 709 *D*).

III. *El radio*

es al coseno de la longitud del sol,

como la tangente de la oblicuidad de la eclíptica

es á la cotangente del ángulo de la eclíptica con el círculo de declinacion (III. 709 *D*).

Fig. 393 Las cantidades que se sacan de las tres últimas analogías se hallan calculadas en algunas tablas respecto de cada grado de la longitud del sol. En las tablas del sol que publicaremos, se hallará una tabla muy puntual que señala la diferencia entre la ascension recta del sol y su longitud hasta las décimas de segundo para cada longitud de 10 en 10 minutos. Llámase la espresada tabla *Reduccion de la Eclíptica al Equador*, supone la oblicuidad de la eclíptica de 23° 28′ 20″; pero la acompaña una tabla de correccion que señala quanto se debe rebajar por cada segundo que puede tener de menos la oblicuidad de la eclíptica.

Variacion de la longitud de las estrellas, ó Precesion de los equinoccios.

394 Comparando las determinaciones que hizo Hyparco 140 años antes de Christo de las longitudes de las estrellas, con las que han sacado los modernos, se ha averiguado que han caminado en longitud 26° 26′ en el discurso de 1878 años, de modo que corresponden $50''\frac{2}{3}$ de aumento cada año en la longitud de las estrellas. Pero Copérnic y Tycho-Brahe, con los demás Astrónomos modernos, no dán mas que 50″ 20‴ de aumento á la espresada longitud. Una vez que la longitud de las estrellas tiene 50″ 20‴ de aumento cada año, es indispensable que el punto del equinoccio desde el qual se cuentan estas longitudes, retroceda la misma cantidad; sucederá, pues, que el sol cada año llegará á dicho punto antes que el año ante-

ce-

cedente, y esta es la razon de llamarse este fenómeno la *Precesion de los equinoccios.* Fig.

395 El movimiento general de la precesion se hace al rededor de los polos de la eclíptica, de modo que no ocasiona variacion alguna en la latitud de las estrellas, conforme lo atestigua la observacion. Resulta de este movimiento de la longitud de las estrellas, que varían su ascension recta y su declinacion; pero como esta variacion no es la misma respecto de todas las estrellas, hemos de declarar como se averigua la precesion en ascension recta y en declinacion, que es un punto muy esencial.

En conociendo la longitud y la latitud de un astro, es muy facil de hallar (390) por las reglas de la Trigonometría esférica su ascension recta y declinacion, y de averiguar por consiguiente la variacion de la una despues de averiguada la variacion de la otra. Pero es mucho mas facil de determinar la precesion correspondiente á un corto espacio de tiempo, considerando arcos que se suponen infinitamente pequeños; vamos á declarar cómo se egecuta esta determinacion.

396 Sea *P* el polo del equador; *E*, el polo de la eclíptica; *S*, una estrella, cuya precesion en ascension recta hemos de determinar; *PSI*, el círculo de declinacion; *ESL*, el círculo de latitud; *HI*, una porcion del equador; *KL*, una porcion de la eclíptica; *FS*, un arco chico paralelo al equador; *DS*, paralelo á la eclíptica. Suponemos el arco *KL* ó el ángulo *KEL* igual á la precesion en longi- 66.

Fig. tud, y el arco HI, ó el ángulo HPI igual á la precesion en ascension recta; el empeño está en determinar HI por medio de KL.

El ángulo DSF es igual al ángulo de posicion PSE: porque el ángulo PSF es recto, y eslo tambien el ángulo ESD; si de cada uno se resta el ángulo comun ESF, quedará $PSE = DSF$. Por ser sensiblemente rectilineo el triángulillo DSF, si hacemos el radio $= 1$, tendremos (20) $DS : SF :: 1 : \cos DSF$ ó PSE, esto es, $\frac{DS}{SF} = \frac{1}{\cos PSE}$. Yá que EL es un quadrante de círculo, tenemos $\frac{KL}{DS} = \frac{1}{\text{sen } ES}$ (54); por la misma razon tambien será $\frac{SF}{HI} = \frac{\text{sen } PS}{1}$. La fraccion $\frac{KL}{HI}$ se puede espresar de este modo $\frac{KL \, . \, DS \, . \, SF}{DS \, . \, SF \, . \, HI}$; substituyendo en esta espresion los valores que acabamos de hallar, sacaremos $\frac{\text{sen } PS}{\text{sen } ES \, . \, \cos PSE}$; pero $\frac{1}{\cos PSE} = \frac{\text{tang } PSE}{\text{sen } PSE}$; luego la espresion viene á ser $\frac{\text{tang } PSE \, . \, \text{sen } PS}{\text{sen } ES \, . \, \text{sen } PSE}$; pero (III. 713) sen PSE : sen PE :: sen EPS : sen ES; luego sen ES . sen $PSE =$ sen PE . sen EPS; luego $\frac{KL}{HI} = \frac{\text{tang } PSE \, . \, \text{sen } PS}{\text{sen } PE \, . \, \text{sen } EPS}$.

397 En esta espresion hemos de eliminar *tang* PSE, pues podemos espresar el ángulo S con el ángulo P, y los lados PS, PE, por medio de la ascension recta, de la declinacion de la estrella, y de la oblicuidad de la eclíptica, que son los datos de la cuestion. Despues de bajar un arco perpendicular EX, sacaremos (III. 714 3.°) tang $S = \frac{\text{tang } P \, . \, \text{sen } PX}{\text{sen } SX}$; pero sen $SX =$ sen $(PS - PX) =$ sen PS. cos $PX -$ sen PX . cos PS (I. 655); luego $\frac{\text{sen } SX}{\text{sen } PX} = \frac{\text{sen } PS}{\text{tang } PX} - \cos PS$; pero $\frac{1}{\text{tang } PX} = \frac{1}{\cos P \, . \, \text{tang } PE}$ (III. 699); luego $\frac{\text{sen } SX}{\text{sen } PX} = \frac{\text{sen } PS}{\cos P \, . \, \text{tang } PE} - \cos PS = \frac{\text{sen } PS - \cos PS . \cos P . \text{tang } PE}{\cos P \, . \, \text{tang } PE}$.

Lue-

luego $\frac{\text{sen } PX}{\text{sen } SX}$. tang P, esto es, tang $S = \frac{\cos P . \text{tang } P . \text{tang } PE}{\text{sen } PS - \cos PS . \cos P . \text{tang } PE}$; Fig.
substituyendo en lugar de tang P. cos P su valor sen P, y dividiéndolo todo por tang PE, sacamos finalmente $\frac{\text{sen } P}{\text{sen } PS . \cot PE - \cos P . \cos PS}$, y este es el valor de tang S, el qual substituido en la expresion de $\frac{KL}{HI}$, que es $\frac{\text{tang } PSE . \text{sen } PS}{\text{sen } PE . \text{sen } EPS}$ (396), se reducirá á $\frac{\text{sen } P . \text{sen } PS}{\text{sen } PE . \cot PE . \text{sen } P . \text{sen } PS - \text{sen } PE . \text{sen } P . \cos P . \cot PS}$, dividiendo el numerador y el denominador por sen P. sen PS, y substituyendo cos PE en lugar de sen PE. cot PE, sacaremos $\frac{KL}{HI} = \frac{1}{\cos PE - \text{sen } PE . \cos P . \cot PS}$; pero el ángulo P es el complemento de la ascension recta, luego la precesion en ascension recta HI es igual á la precesion en longitud multiplicada por (cos $23° \frac{1}{2}$ — sen $23° \frac{1}{2}$. sen asc. rect. tang. declin.)

398 Si llamamos L la precesion en longitud, la precesion en ascension recta se compondrá de dos partes; la una será L. cos $23° \frac{1}{2}$, la otra $= L$ sen $23° \frac{1}{2}$ sen asc. rect. tang decl. Si llamamos M la primera parte L. cos $23° \frac{1}{2}$, y substituimos en la segunda en lugar de L la cantidad $\frac{M}{\cos 23° \frac{1}{2}}$; esta segunda parte será M. tang $23° \frac{1}{2}$. sen asc. rect. tang decl. Será, pues, constante la primera parte de la precesion en ascension recta, y la segunda será igual al producto de la primera por la tangente de $23° \frac{1}{2}$, por el seno de la ascension recta de la estrella, y por la tangente de su declinacion. Supongo que la precesion en longitud L para diez años sea $= 8' 23'' 36$, cuya cantidad multiplicada por coseno $23° \frac{1}{2}$, dá $7' 4'' 4$ que es la primera parte M de la precesion en ascension recta, comun á todas las estrellas. Si se

 mul-

Fig. multiplica esta primera parte por tang oblic.eclip. por sen asc. rec. y por tang. declin. saldrá la segunda parte en forma de equacion que se puede aplicar á cada estrella.

66. 399 En la figura se supone que la estrella S esté en los seis últimos signos de ascension recta, pues el punto S está mas cerca del polo de la eclíptica que el equador; por consiguiente la cantidad — cos P de la fórmula (397) es positiva quando la ascension recta no llega á seis signos, y por lo mismo la equacion se deberá añadir en los seis primeros signos de ascension recta; pero en los otros seis, se la deberá restar, porque el seno será negativo. Tambien prevenimos que como respecto de las estrellas cuya declinacion es austral, la tangente de la declinacion llega á ser negativa, mudará por lo mismo los signos de las equaciones (15).

400 La espresion de la precesion en declinacion es DF; pero del triángulo DFS sacamos $\frac{DF}{DS} = \text{sen}\, S$ (21), y si en lugar de DS substituimos $KL \,.\, \text{sen}\, ES$, sacaremos $DF = KL \,.\, \text{sen}\, ES \,.\, \text{sen}\, S$; pero $\text{sen}\, ES \,.\, \text{sen}\, S = \text{sen}\, PE \,.\, \text{sen}\, P$ (III. 713); luego $DF = KL \,.\, \text{sen}\, PE \,.\, \text{sen}\, P$; luego la *precesion en declinacion es igual á la precesion en longitud multiplicada por el seno de la oblicuidad de la eclíptica, y por el coseno de la ascension recta de la estrella*; esto es, $L \,.\, \text{sen}\, 23^\circ \frac{1}{2}$. cos asc. rec.; y substituyendo en lugar de L como antes, $\frac{M}{\cos 23^\circ \frac{1}{2}}$, la precesion en declinacion será $M \,.\, \text{tang}\, 23^\circ \frac{1}{2}$. cos asc. rec.

401 Respecto de las estrellas cuyo ángulo de posicion es igual á 90°, esto es, cuyo círculo de declinacion y el cír-

círculo de latitud se cortan á ángulos rectos ; la primera parte de la ascension recta destruye la segunda, por manera que la precesion en ascension recta es nula. Todos estos puntos están en la curva que forman la interseccion de un cono oblicuo, cuyos dos lados pasan por los polos de la eclíptica y del equador, y cuya base es tangente de la esfera en el uno de los polos, esto es, perpendicular al uno de los lados del cono. La tabla adjunta señala respecto de cada longitud por qué grado de latitud pasa dicha curva ; determina las estrellas que tienen la mayor paralaxe en declinacion, y dentro de ella están las estrellas cuya precesion es negativa, esto es, decreciente mientras crece la longitud. Fig.

Longitud	Latitud	
0	90°	0′
10	85	41
20	81	34
30	77	44
50	71	36
70	67	47
90	66	32

402 La precesion en ascension recta y declinacion, conforme la hemos hallado, es sensiblemente uniforme en el discurso de diez años ; pero en los diez años siguientes puede sobrevenirla un incremento ó decremento de medio segundo.

Quan-

Fig. Quando se quisiere determinar la precesion en ascension recta para mucho tiempo, será preciso calcular la longitud, y despues la ascension recta que la corresponde, ó si no, se calculará por medio de las fórmulas antecedentes el movimiento de 10 en 10 años, mudando cada vez la ascension recta, y la declinacion.

66. 403 La precesion es tambien causa de que varie el ángulo de posicion; porque el ángulo *EDP* es mayor ó menor que el ángulo *ESP*; y su variacion es igual al ángulo *DES* multiplicado por el seno de *PE*, y el coseno del ángulo *P*; dividiendo el producto por el seno de *PS* (III. 848). Así la variacion anual del ángulo de posicion es $\frac{50.'' \text{sen } 23°. \text{ sen asc.rec.}}{\text{cos declin.}}$, Es de $20''05$ respecto de las estrellas que están en el equador, y al mismo tiempo cerca del coluro de los solsticios; pero las estrellas que están en el coluro de los equinoccios, cuya ascension recta es 0 ó 180°, no esperimentan variacion alguna en su ángulo de posicion. Este ángulo vá creciendo en el primero y tercer quadrante de ascension recta.

Diminucion de la oblicuidad de la eclíptica.

404 Bastarian las fórmulas halladas (398) para determinar la variacion de las estrellas en ascension recta y longitud, si fuera invariable su latitud, y no tuviese la espresada variacion mas causa que el movimiento de los puntos equinocciales. Pero como parece que la oblicuidad de la eclíptica vá menguando, es forzoso que varíe la latitud de las estrellas; porque el ángulo que la eclíptica forma con el

equa-

equador no puede menguar, sin que la eclíptica se arrime Fig.
al equador, y se aparte por lo mismo de la estrella, cuya latitud crecerá, pues la latitud de un astro es su distancia á la eclíptica. Por lo que mira á la esplicacion de esta diminucion, la dejaremos para mas adelante.

Esta diminucion de la oblicuidad de la eclíptica la sacamos de los diferentes valores que de ella se hallan en los Autores que la han observado; porque cotejando unas con otras las determinaciones que de ella conocemos desde los Astrónomos Griegos hasta los del dia de hoy, se vé patentemente que esta inclinacion ha ido menguando como unos 44″ por siglo, y lo mismo prueban las latitudes de las estrellas de que nos dá noticia Ptolomeo.

Otros usos de las ascensiones rectas.

405 Las ascensiones rectas por cuyo medio hemos determinado la longitud de las estrellas, y la medida del tiempo sirven tambien para hallar los ángulos horarios, los pasos de las estrellas por el meridiano &c. Dejamos declarado (373) como la diferencia de los pasos por el meridiano determina la diferencia de ascension recta; y acerca de esto hemos de recordar que si una estrella tiene 15° de ascension recta mas que el sol, pasará por el meridiano una hora mas tarde que él; quiero decir, que culminará una hora mas tarde que el sol; quando dicha estrella estuviere en el meridiano, habrá una hora que el sol pasó, adelantándose ácia el poniente, será la una de

la

Fig. la tarde, ó la estrella pasará por el meridiano á la una.

406 Por consiguiente para hallar la hora del paso de una estrella por el meridiano, basta saber quánto tiempo pasó despues del sol, ó quánto su ascension recta es mayor que la de este astro; si esta diferencia fuese de 15°, sabremos de cierto que la estrella pasará por el meridiano á la una. Por consiguiente si despues de convertidas en tiempo todas las ascensiones rectas que hay en los *catálogos* de las estrellas, restamos de ellas las ascensiones rectas del *sol*, tambien convertidas en tiempo para un dia dado, sabremos la hora del paso de una estrella por el meridiano para el mismo dia. Yá digimos (153) que los grados se convierten en tiempo dando 15° á cada hora, y 4′ de tiempo á cada grado.

67. 407 Sea ♈ el equinoccio de la primavera; *M*, una estrella en el meridiano; ♈*M*, la ascension recta de la estrella en *M*, contándola de poniente á oriente, ó de derecha á izquierda quando estamos de cara al *mediodia*; ♈☉, la ascension recta del sol; *M*☉, la diferencia de las dos ascensiones rectas, ó la ascension recta de la estrella menos la del sol; esta diferencia *M*☉ del sol al meridiano siempre señala (153) la hora ó el tiempo verdadero, y es de 15° en una hora, de 30° en dos horas. Manifiesta, pues, la figura que para hallar la hora del paso por el meridiano, basta restar la ascension recta del sol de la de la estrella, la diferencia *M*☉, que es la distancia del sol al meridiano, es la hora que se busca quando se la convierte en tiempo.

Co-

408 Como el sol y la estrella mudan continuamente de situacion en virtud del movimiento diurno, así la estrella como el sol se apartarán muy en breve del meridiano; pero no por esto varía la diferencia de ascension recta *M*☉, sensiblemente por lo menos. Esta es la razon por qué la diferencia de ascension recta *M*☉, á qualquiera hora que se observe, *siempre* será, con corta diferencia, la misma cantidad *M*☉, pongo por caso de 30° ó dos horas, sea al mediodia ó á las quatro de la tarde. Pero no señalará el tiempo verdadero, ó la hora que es, sino para el instante que la estrella pasó por *M*, quiero decir para el instante de su paso por el *meridiano*. Fig.

409 Hay, pues, en esto dos cosas que distinguír una de otra, 1.° la diferencia de ascension recta entre el sol y la estrella, que en sí, é independientemente del paso de la estrella por el meridiano es de 30° ó dos horas todo el dia, con corta diferencia. 2.° la misma diferencia, la qual considerada en el instante que la estrella pasa por el meridiano, es igual á la distancia del sol al meridiano, ó á la hora que es. La cantidad *M*☉ de 30° ó dos horas será todo el dia la diferencia de ascension recta de los dos astros, pero á mas de esto será la distancia del sol al meridiano, ó el tiempo verdadero, quando la estrella estuviere en el meridiano. Así, quando se quisiere determinar en un dia dado, con corta diferencia, la hora del paso de un astro por el meridiano, se deberá averiguar su diferencia de ascension recta con el sol para el mismo dia; poco importa que se tome esta diferen-

Fig. rencia á la hora que se quisiere por lo poco que varía en el discurso de un dia.

410 Los Astrónomos suelen disponer sus cálculos para mediodia; por lo mismo toman la ascension recta de un astro para mediodia, restan de ella la del sol á mediodia, la diferencia señala la hora del paso de la estrella por el meridiano aquel dia. Hemos visto (405) con efecto que quando el astro pasa por el meridiano, el *sol dista* del mismo círculo la cantidad de dicha diferencia; y como la distancia del sol al meridiano señala la hora ó el tiempo verdadero que se busca, síguese que para hallar al poco mas ó menos el tiempo verdadero del paso de un astro por el meridiano, ***basta restar la ascension recta del sol de la del astro para el dia dado á mediodia, y convertir esta diferencia en tiempo.***

Hemos dicho que ***importa poco*** tomar á la hora que se quiera la espresada diferencia de ascension recta, por lo poco que varía en el discurso de un dia. *Sin embargo*, si se quisiese hacer esta determinacion con toda la puntualidad que cabe, despues de averiguada al poco mas ó menos la hora del paso por el meridiano, se buscará la diferencia de ascension recta para la misma hora, y esta segunda diferencia (que será algo menor que la primera si se tratase de una estrella) será con mas puntualidad la hora del paso por el meridiano.

La ventaja y comodidad que se halla en el *cómputo* de la hora del paso por el meridiano, estrivan en que la dife-

ferencia de ascension recta es casi la misma todo el dia, ó varía poco. Esta variacion es la mayor de todas quando se trata de la luna, la diferencia de ascension recta entre la luna y el sol varía en algunos tiempos una hora en el discurso de un dia. Por consiguiente en el primer cálculo, en el qual se supone que la diferencia es la misma todo el dia, podrá dar entonces un resultado que discrepe una hora del verdadero; pero en conociendo con diferencia de una hora por lo menos el tiempo del paso, se calculará la diferencia de las ascensiones rectas para aquel tiempo, y se determinará el tiempo verdadero con una puntualidad 24 veces mayor, porque en lugar de 24 horas no habrá mas que una hora de duda para el tiempo respecto del qual se debia calcular la diferencia de ascension recta. Suponiendo que en el primer cálculo se cometiese con efecto una equivocacion de una hora, no pasará de $2' \frac{1}{2}$ la equivocacion en el segundo. Fig.

411 En lugar de restar perpetuamente la ascension recta del sol de la de la estrella, se la añade el complemento para 24 horas de la ascension recta del sol, cuyo complemento se llama *la distancia del equinoccio al sol*; quiero decir, por egemplo, que en vez de restar dos horas, se la añaden 22 horas; y esto viene á ser de todo punto lo mismo, porque si la suma pasa de 24 horas, se restan sin llevarlas en cuenta. Supongamos con efecto que la ascension recta de la estrella sea de 14 horas, y la del sol de 2 horas; si resto esto, restarán 12 horas; si añado su complemento para las 24 horas, esto es, 22 horas, sacaré 36 ho-

Fig. horas; y como siempre resto 24, porque el dia no tiene mas de 24 horas, quedan 12 horas como antes. A algunos podrá figurárseles que dichas 36 horas señalan el paso por el meridiano para el dia siguiente; lo acertarian si las 22 horas que hemos tomado para la distancia del equinoccio, significasen que el equinoccio ha de pasar por el meridiano 22 horas despues de mediodia. Pero no es así, porque 22 horas no significan otra cosa sino que la ascension recta del sol es de 2 horas á mediodia, y estas 2 horas son las que se habian de restar. Luego lo mismo se egecuta con añadir 22 horas, y restar despues de la suma las 24.

412 Hemos de prevenir que en el estilo comun de los Astrónomos no es lo mismo la distancia del equinoccio al sol, que la distancia del sol al equinoccio. Esta es la distancia del uno al otro á lo largo del equador, contando desde el equinoccio ácia el sol por el orden de los signos, *in consequentia*, ó de occidente á oriente; es la ascension recta del sol. Pero la distancia del equinoccio al sol es su distancia empezando desde el sol, y contando tambien de occidente á oriente; esta es el complemento de la primera distancia para 360.°

413 Quando el equinoccio ó el primer punto de Aries en el instante de mediodia, está todavia á 30° de distancia del meridiano ácia el oriente, se señalan 2 horas para la distancia del equinoccio al meridiano, ó la distancia del equinoccio al sol. Pero hablando con propiedad, esto no significa que el equinoccio llegará al meridiano á las 2 horas despues

el

del mediodia; llegará indispensablemente antes, y lo probarémos. Al cabo de 2 horas el sol estará 30° mas allá del meridiano ácia el occidente; pero como en el discurso de 2 horas el sol se habrá acercado al equinoccio en virtud de su movimiento propio y anuo como unos 4′ 56″ de grado, á razon de 59′ 8″ por dia, el equinoccio estará menos distante del sol que el meridiano; luego el equinoccio habrá pasado yá el meridiano como unos 20″ de tiempo, que corresponden á 4′ 56″ de grado. Si al contrario en el instante de mediodia estuviese yá el equinoccio 30° al occidente, señalarémos 22 horas para su distancia al sol ó al meridiano, porque le quedarán 330° que andar para llegar á él el dia siguiente ácia las 10 de la mañana, y 330° valen 22^h, á razon de 15° por hora. Pero en el discurso de estas 22^h el sol se acercará á dicho equinoccio, y el equinoccio llegará al meridiano antes de las 22^h despues de mediodia, ó las 10 de la mañana.

414 Con la mira de hacer alguna aplicacion de lo dicho hasta aquí, propongámonos *determinar el paso de la Lira por el meridiano el dia 1 de Mayo de 1760, contado astronómicamente*, esto es el paso que se verificará despues de mediodia de 1 de Mayo en el discurso de 24 horas.

Supongo que la ascension recta y aparente de la lira aquel dia sea de 277° 12′ 17″, la qual convertida en tiempo es de 18^h 28′ 49″; la distancia del equinoccio al sol, ó el complemento de la ascension recta del sol,

Fig. $21^h\ 23'\ 51''$ el dia 1 de Mayo á mediodía, y $21^h\ 20'\ 2''$ el dia 2 á mediodia, de modo que la variacion diurna sea de $3'\ 49.''$ Como la ascension recta de la lira no varía de un dia para otro, no hay mas variacion en la diferencia de ascension recta entre el sol y la estrella, que la de la ascension recta del sol que varía $3'\ 49''$ de tiempo de un mediodia para otro.

415 *Primera aproximacion.* Sumo la ascension recta de la lira $18^h\ 29'$ con la distancia al equinoccio $21^h\ 24'$; de la suma $39^h\ 53'$ resto (411) 24^h, y la resta $15^h\ 53'$ será la hora que buscamos. Podria haber en esta aproximacion un error de $4'$, si la estrella en lugar de pasar á 15^h pasase á 23^h con corta diferencia, porque la diferencia de ascension recta se tomó para mediodia, y no para 23 horas.

416 *Segunda aproximacion.* De la hora hallada se restará $1'$, si la estrella pasare despues de 3^h; $2'$, si pasare despues de 9^h; $3'$, si despues de 15^h, y $4'$ si pasare despues de $21.^h$ En el caso propuesto, se restarán $3'$, y saldrán $15^h\ 50'$ para la hora, y el minuto del paso de la estrella. Nunca puede llegar á un minuto el error de esta aproximacion, porque la ascension recta del sol, ó su complemento que es la distancia del equinoccio al sol, varía en todos tiempos como unos $4'$ cada dia, estando ceñida la variacion diurna entre $3'\ 35''$ que es su valor á mediados de Septiembre, y $4'\ 27''$ que es su valor tres meses despues.

417 *Tercera aproximacion.* Si no nos bastase sacar

con

con diferencia de menos de un minuto el paso de una estre- Fig.
lla, haríamos esta proporcion: 24^h son á $3' 49''$, variacion diurna del equinoccio aquel dia (414), como $15^h 50'$ son á un quarto término $2' 31.''$ Se restará esta cantidad de $15^h 52' 40''$ que es la suma de la ascension recta de la estrella $18^h 28' 49''$, y de la distancia del equinoccio $21^h 23' 51''$, y sacaremos $15^h 50' 9''$ para la diferencia de ascension recta, ó para la hora que buscamos del paso de la lira por el meridiano el dia 1 de Mayo de 1760, tiempo astronómico (312), que viene á ser el dia 2 de Mayo á $3^h 50' 9''$ de la mañana, tiempo civil. Este resultado no puede ser mas exacto; porque hemos hallado por esta regla de tres la diferencia de ascension recta entre el sol y la lira para $15^h 50'$, y el paso por el meridiano es con efecto $15^h 50' 9.''$ Se echa de ver que todo el artificio de este cálculo consiste en hallar por una falsa posicion la diferencia de las ascensiones rectas en el momento mismo del paso, adivinado ó conocido al poco mas ó menos.

418 *Determinemos el instante del paso de la luna por el meridiano el dia 22 de Abril.*

Supongamos que el dia propuesto en que tenemos 2^h de tiempo ó $30°$ para la ascension recta del sol á mediodia, la ascension recta de la luna á mediodia se halle por el cálculo de $14^h 0.'$ Restarémos de esta la ascension recta del sol $2^h 0'$, ó la añadiremos 22^h, complemento de 2^h que es la distancia del equinoccio al sol (411), y ten-

Fig. dremos 12^h para la diferencia de ascension recta á medio-dia. Esta sería tambien la hora del paso de la luna por el meridiano, si dicha diferencia se mantuviera la misma sin variar desde mediodia hasta el tiempo del paso; pero como la luna camina una hora cada dia en ascension recta, al poco mas ó menos (supondremos una hora cabal para facilitarnos el cálculo), síguese que á 12^h la diferencia de ascension recta en tiempo, en vez de ser 12^h ó *qual* era á mediodia, será $12^h\ 30'$. Por consiguiente $12^h\ 30'$ señalan con mas puntualidad la hora del paso por el meridiano; hemos, pues, de buscar para $12^h\ 30'$ la diferencia de ascension recta. Pero en $30'$ de tiempo la diferencia de ascension recta crece $1'\ 15''$; luego $12^h\ 31'\ 15''$ será la diferencia de ascension recta á $12^h\ 30'$, y por lo mismo la hora del paso con cortísima diferencia. Si buscamos ahora el movimiento para $1'\ 15''$ hallaremos $3''$; será, pues, la diferencia de ascension recta $12^h\ 31'\ 18''$ á $12^h\ 31'\ 15''$ de tiempo verdadero, que se acerca mucho á la hora del paso. Luego el tiempo verdadero del paso de la luna por el meridiano será $12^h\ 31'\ 18''$.

Hallar la hora del paso de un Astro por diferentes meridianos.

419 En los dos egemplos últimamente propuestos hemos hecho uso de las ascensiones rectas del sol y del astro conocidas para el instante del mediodia en París. Si con los mismos datos quisiéramos determinar la hora del paso de una estrella ó planeta por otro meridiano, se viene á los

ojos

ojos que bastará hallar las mismas ascensiones rectas para el mediodia del lugar dado; pues los cálculos son los mismos respecto de un meridiano qualquiera. La hora del paso sería una misma en todos los meridianos, si el astro y el sol al pasar de un meridiano á otro, se mantuviesen á la misma distancia uno de otro, y tuviesen una misma diferencia de ascension recta. Y de hecho, un astro pasa por el meridiano de París á las 2^h, porque tiene 30° de ascension recta mas que el sol, y el sol está 30° ó 2^h mas allá del meridiano en el instante del paso. Si en Mégico adonde el astro llegará 7 horas mas tarde que á París, por ser Mégico 7 horas mas occidental que París, estuviese todavia el sol 30° lejos del meridiano, serán tambien 2 horas en Mégico, quando el astro pasare por el meridiano de aquella Ciudad; pero serán 2^h y $1'$, si el sol estuviere $1'$ de tiempo ó $15'$ de grado mas apartado del astro. Todo está, pues, en hallar esta diferencia de ascension recta entre el astro y el sol para el instante del mediodia en Mégico, esto es, 7 horas mas tarde que en París, ó para París á las 7 de la tarde. Pero el paso por el meridiano que se conoce para París cada dia, es la diferencia misma de ascension recta para París; bastará, pues, hallar esta diferencia á las 7 de la tarde, con hacer esta proporcion: 24 *horas, ó la diferencia de los dos pasos consecutivos para Paris, son á la diferencia de los meridianos, como la anticipacion, ó el atraso del paso de un dia para otro respecto de Paris, es á la diferencia de los pasos en París, y en el lugar propuesto.* Esta diferencia se añadirá al pa-

Fig.

Fig. paso para París, si el lugar propuesto estuviere al occidente de París; se restará, si el lugar estuviere al oriente de París, con tal sin embargo que el paso para París atrase de un dia para otro, conforme siempre sucede respecto de la luna.

Pero si el paso para París adelanta; quiero decir, si el planeta pasa el dia siguiente antes que el dia propuesto, se practicará lo contrario; la diferencia hallada se restará del paso para Paris, si el lugar dado estuviese al *occidente*, y se añadirá, si estuviese al oriente de París.

420 Por egemplo, la luna pasaba por el meridiano de Paris el dia 6 de Noviembre de 1762 á las $3^h\ 44'$, habiendo pasado el dia antes á $2^h\ 44.'$ Se pregunta ¿á qué hora pasaba el dia 6 en Maguncia que está $24'$ de tiempo al oriente de París? Sacaremos la respuesta de esta proporcion: 25 *horas que hay entre los dos pasos son á* $24'$ *que es la diferencia de los meridianos, como* 1 *hora que es el atraso de la luna es á* $58''$; se restará, pues, $1'$ de la hora del paso en París, y la hora del paso por Maguncia será $3^h\ 43.'$

Esta proporcion nos está diciendo que la luna gasta $24'\ 58''$, y no $24'$ para ir desde el meridiano de Maguncia al de París; y que para mayor puntualidad se debería hacer otra vez la misma proporcion, substituyendo $24'\ 58''$ en lugar de $24'0.''$ Pero es de poco momento la diferencia que de aquí puede haber en el resultado.

421 Si Maguncia estuviese al occidente de París, se hubiera tomado el dia siguiente, y no el dia antecedente al

dia

día dado, porque se deben tomar para París dos pasos, tales Fig.
que el que se busca esté en el intervalo que hay entre los dos.

422 La operacion que hemos egecutado para hallar el paso de la luna por el meridiano de Maguncia, supone, segun se echa de ver, que es el tiempo al meridiano de Maguncia. Porque si se preguntára qué hora será al meridiano de París quando la luna pase por el meridiano de Maguncia, se debería restar de la hora hallada la diferencia de los meridianos 24.'

Hallar el Ángulo horario de un astro.

423 El *Ángulo horario* de un astro es el ángulo que forma en el polo el meridiano del lugar donde está el observador, con el círculo de declinacion que pasa por dicho astro; es tambien, si se quiere, el arco del equador comprendido entre el meridiano, y el círculo horario del astro, es la distancia del astro al meridiano. El conocimiento de este ángulo horario es fundamental en muchas operaciones astronómicas.

Sea *QEM* el equador; *MCD*, el meridiano; *M*, el medio del cielo, esto es, el punto del equador que está 68.
en el meridiano; *ME*, el arco del equador que mide el ángulo horario, ó la distancia de una estrella *E* al meridiano, contada desde un paso por el meridiano hasta otro; quiero decir, de oriente á poniente hasta 360.° ♈☉ es la ascension recta del sol; ☉*M* es el ángulo horario del sol medido con el tiempo verdadero dado; se juntarán una con

O 4 otra

Fig. otra estas dos cantidades para sacar *♈M* ascension recta del medio del cielo, de la qual se restará la ascension recta *♈E* de la estrella, y la resta *ME* será el ángulo horario de la estrella. Sácase de aquí la regla siguiente.

El tiempo verdadero convertido en grados, menos la diferencia de las ascensiones rectas, esto es la del astro menos la del sol, será el ángulo horario del astro, contándole hasta 24 horas, y de oriente á poniente.

Si fuesen dadas separadamente las dos ascensiones rectas, se practicará la regla siguiente, que es mas simple que la primera.

La ascension recta del sol añadida al tiempo verdadero convertido en grados, menos la ascension recta del astro, es el ángulo horario del astro.

424 Quando decimos que se reste siempre la ascension recta del astro, sin indagar si será mayor ó menor que la suma de la qual se la debe restar, suponemos que á esta suma se la añadan 360°, si fuese menor de lo que es
69. menester. Así, en la figura en la qual se supone el astro en *T* se debe restar *♈MT* de *♈☉M*, y sin embargo el arco *♈☉M* es menor; pero se le añadirá el círculo entero, y hecho esto, del arco *♈☉MTD♈☉M* se restará *♈☉MT*, quedará *TD♈☉M*, distancia del astro *T* al meridiano contada desde el meridiano yendo ácia el occidente, ó contra el orden de los signos, porque este es el orden del incremento de los ángulos horarios que ván como el movimiento diurno de oriente á poniente.

En

425 En algunas ocasiones es indispensable conocer la ascension recta del medio del cielo, ó del punto del equador que está en el meridiano; para lo qual basta hallar el ángulo horario de un astro cuya ascension recta sea nula. Así, por la regla (423) *la ascension recta del sol añadida al tiempo verdadero convertido en grados, será la ascension recta del medio del cielo.* Fig.

Con efecto, la ascension recta del medio del cielo es la distancia del equinoccio al medio del cielo, ó del equinoccio al meridiano; es, pues, el ángulo horario del equinoccio, ó de un astro que está en el equinoccio mismo, y no tiene ninguna ascension recta. No habrá por consiguiente sustraccion ninguna que hacer en la práctica de la regla (423) propuesta.

426 Si se conociere el ángulo horario del sol para un lugar de la tierra y un instante dado, y al mismo tiempo el ángulo horario para París, se determinará por una simple sustraccion la longitud del mismo lugar. Sea *S* el sol; 70. *P*, París; *SP*, el ángulo horario del sol para París; *M*, el primer meridiano que pasa á 20° al occidente de París; *L*, el lugar del qual se conoce el ángulo horario *LS*, contado ácia el occidente desde un mediodía para otro; *MS*, el ángulo horario para el primer meridiano; este siempre es 20° menor que el ángulo horario para París, porque el primer meridiano está al occidente de París, y el ángulo horario se cuenta ácia el occidente; por manera que es menor para el primer meridiano que para París. Si del ángulo hora-

Fig. rario *LS* del lugar propuesto se resta el ángulo horario para París *PS*, despues de quitarle 20°, ó *PM*, esto es, *MS*, saldrá *ML* distancia al primer meridiano, ó longitud del lugar propuesto; por consiguiente *la longitud geográfica de un lugar es igual á su ángulo horario, menos el de París, mas 20.°*

Del Orto ó Nacimiento, y Ocaso de los astros.

427 Quando un astro está puntualmente en el orizonte, su distancia al meridiano ó su ángulo horario (423) se llama *Arco semidiurno*, y es lo primero que se debe calcular para determinar á qué hora un astro nace ó se pone.

71. Sea *HZO* la mitad del meridiano; *HO*, la mitad del orizonte; *EQ*, la mitad del equador; *P*, el polo; *Z*, el zenit; *L*, un astro en el orizonte quando nace; *ZL*, su distancia al zenit que es de 90°; debe entenderse su distancia aparente, porque su distancia verdadera la aumenta la paralaxe (289 y sig.), y la disminuye la refraccion (249). *PL* es la distancia verdadera del astro al polo boreal del mundo, es el complemento de su distancia al equador, ó de su declinacion *LA*, si fuere esta boreal; pero será la suma de 90°, y de la misma declinacion, si esta fuere austral. El arco *PZ* es la distancia del polo al zenit para el lugar donde está el calculador, esto es, el complemento de la latitud, ó de la altura del polo *PO*. Una vez conocidos los tres lados *PL*, *PZ* y *ZL* del triángulo *PZL*, se sacará el valor del ángulo *P* (III. 724 *E*); y este ángulo *P* ó *ZPL* será el ángulo horario del astro, su distancia al meridiano en

en el instante que nace, ó su arco semidiurno. Fig.

428 Se sumarán los tres lados conocidos del triángulo *PZL*, se tomará la mitad de su suma; de esta semisuma se restarán succesiva y separadamente los dos lados *PZ* y *PL* que abrazan el ángulo *P* que se busca, esto es, el complemento de la latitud, y la distancia del astro al polo boreal del mundo; y con esto tendremos dos diferencias. Súmense uno con otro los logaritmos de los senos de las diferencias procedentes de estas dos sustracciones. Súmense también uno con otro los logaritmos de los senos de los lados *PZ* y *PL*. Réstese la suma de estos dos logaritmos de la de los dos logaritmos de los senos de las diferencias; tómese la mitad de la resta, y saldrá el logaritmo del seno de un número de grados y minutos, cuyo duplo será el ángulo *P*, ó el arco semidiurno que se busca, que será menester convertir en tiempo (153).

Este es en general el método para esta operacion, le aplicaremos á algunos egemplos.

429 Supongamos que un observador de Paris cuya latitud es de $48° 50'$ quiera determinar el arco semidiurno de la luna, el dia 26 de Octubre de 1765, quando su declinacion boreal era de $25° 8'$, y su paralaxe orizontal de $54\frac{1}{2}$ minutos. Al lado *ZL* que al parecer es de $90°$, se le deben añadir $33'\frac{1}{2}$ por razon de la refraccion, que le hace parecer demasiado alto, y se le quitarán $54'\frac{1}{2}$ por causa de la paralaxe, que le hace parecer demasiado bajo; será, pues, la verdadera distancia *ZL* de $89° 39'$; el lado

PL

PL complemento de la declinacion, será de 64° 52′, y el lado *PZ* complemento de la latitud, será de 41° 10.′

PZ	41°	10′
ZL	89	39
PL	64	52
Suma	195	41
Semisum.	97	50½
Log.sen *PZ*	9,81839	
Log.sen *PL*	9,95680	
Suma	9,77519	

Semisum.	97° 50′½	97° 50′½
Réstese *PZ*	41 10	y *PL* 64 52
Difer.	56 40½	32 58½
Log. sen dif. 1.ª		9,92198
Log. sen dif. 2.ª		9,73585
Suma....................................		9,65783
Réstese la suma de los log. de los lados......................		9,77519
Difer.		9,88264

Tómese la mitad de la dif. log. sen 60° 52′ 50″....... 9,94132

El duplo 121° 45′ 40″, arco semidiurno, el qual convertido en tiempo dá 8^h 7′ 3.″

430 Si quisiéramos señalar la hora del nacer del sol para un día dado, bastaría calcular su arco semidiurno para el mismo dia, y tomar lo que le faltase para 12 horas. Así, quando el arco semidiurno del sol es de 8 horas, es cierto que el sol nacerá á las quatro de la mañana. Para hallar á qué hora se pondrá el sol, basta determinar el arco semidiurno de por la tarde, y este será la hora misma del ocaso del sol; porque si el arco semidiurno fuese de 4^h 5′, esta se-

será la hora de ponerse el sol. En esto no puede haber la menor duda, porque estando el sol en el punto L del orizonte, el arco semidiurno EA del equador, ó el arco ML del paralelo medirá el ángulo horario P, y este ángulo P tambien señala el tiempo verdadero (153); luego el arco semidiurno mismo es el tiempo verdadero del ocaso del sol. Por consiguiente, para determinar puntualmente el nacer del sol, basta conocer su declinacion para el instante que nace, y hacer el lado ZL de $90° 33'\frac{1}{2}$, porque la refraccion orizontal dá $33'\frac{1}{2}$ mas de altura al sol. Su paralaxe que, segun veremos despues, es de unos $10''$ se puede omitir en este cómputo. Fig.

431 Por lo que mira á los planetas y las estrellas fijas, es preciso conocer la hora de su paso por el meridiano (410), igualmente que la declinacion del planeta. En una tabla de los arcos semidiurnos, construida por el método declarado (429), se tomarán las horas, minutos y segundos de tiempo que corresponden á la declinacion del planeta, se restarán del paso por el meridiano para sacar el nacer del planeta, se añadirán para sacar su ocaso. Supone esta regla que la diferencia de ascension recta entre el astro y el sol no varíe sensiblemente, en el intervalo que hay entre el nacer y el paso por el meridiano; y esto es sensiblemente verdadero respecto de las estrellas y de los planetas. No se verifica respecto de la luna, pero daremos muy en breve un método particular respecto de este astro.

Se

Fig. Se añadirán 12 horas á la hora del paso del planeta, si el arco semidiurno fuese mayor que el número de las horas del paso por el meridiano. Si este paso fuere, por egemplo, á 4^h $10'$ de la tarde, y el arco semidiurno fuese de 6^h $10'$, se añadirán 12^h al paso; quiero decir, que se le darán 16^h $10'$ al paso por el meridiano, y despues de restar el arco semidiurno, quedan 10^h $0'$ de la mañana para el nacer del planeta. Si se suma la hora del paso con el arco semidiurno, sacaremos 10^h $20'$ de la noche para el ocaso del planeta. Si el paso por el meridiano fuese por la tarde, y despues de egecutada la adicion, salieren mas de 12^h, será señal de ponerse el planeta al otro dia por la mañana. Si el paso por el meridiano fuere por la mañana, y hubiere en la suma mas de 12^h, se restarán las 12^h, y el remanente será el ocaso del planeta para por la tarde. Si se contáre astronómicamente, esto es, hasta 24 horas, y pasare la suma de 24 horas, será señal de que el ocaso será el dia siguiente despues de mediodia.

432 Por egemplo, el dia primero de Septiembre de 1763 Júpiter pasaba por el meridiano á 18^h $11'$, el arco semidiurno de Júpiter (429) es 7^h $53'$. Despues de hecha la adicion, salen 26^h $4'$, esto daría el ocaso para el 2 de Septiembre á 2^h $4'$ de la tarde, pero si queremos el ocaso del dia 1 de Septiembre, y no del dia 2, se ha de tomar el paso por el meridiano de 31 de Agosto, que es 18^h $14'$, ó lo que viene á ser lo mismo, se añadirán $3'$ á la hora hallada, porque el ocaso anticipa en-

ton-

tonces 3′ cada dia, y se sacarán 2^{h} 7′ de la tarde para el ocaso del dia primero de Septiembre. Fig.

El dia primero de Noviembre de 1763 Marte pasaba por el meridiano á 21^{h} 13′, tiempo astronómico; despues de restado el arco semidiurno 6^{h} 18′ de la hora del paso por el meridiano, quedan 14^{h} 55′ para el nacer de Marte; y es el dia 2 á 2^{h} 54′ de la mañana tiempo civil. Si quisiéramos sacar el nacer del dia primero de Noviembre, habríamos de tomar el paso por el meridiano de la víspera, ó de 31 de Octubre, que es á 21^{h} 15′, sacaríamos el arco semidiurno de 6^{h} 19′, y el nacer de Marte á 2^{h} 56′ de la mañana, el dia primero de Noviembre.

433 Hemos supuesto en la operacion antecedente que el arco semidiurno del planeta era el mismo para el orto que para el ocaso, porque hemos añadido y restado al paso por el meridiano un mismo número, para sacar el orto, y despues el ocaso del planeta. Sin embargo, los dos arcos semidiurnos no pueden ser iguales, á no ser que el astro se haya quedado con la misma declinacion, ó á la misma distancia del polo, desde que nació, hasta que se puso, circunstancia que solo se verifica en las estrellas y no en los planetas. En el equinoccio de la primavera el sol tiene un arco semidiurno 54″, ó cerca de un minuto de tiempo mayor por la tarde que por la mañana. Para corregir esta desigualdad, quando se quisiere hacer el cálculo con toda la puntualidad que cabe, se buscará por las tablas astronómicas

Fig. cas la declinacion del astro para el tiempo mismo del nacer (determinado yá con corta diferencia por un primer cálculo), y con esta declinacion correspondiente al instante del nacer del astro, se calculará el arco semidiurno del nacer, que dará el nacer que se busca con mas precision. Se buscará despues la declinacion para la hora del ocaso, y se hallará otro arco semidiurno que dará la hora cabal del ocaso.

434 Tambien hemos supuesto en el método declarado que el arco semidiurno ó el ángulo horario hallado por la Trigonometría esférica, se ha de convertir en tiempo á razon de 15° por hora, y añadir á la hora del paso por el meridiano para sacar la hora del ocaso del astro. Sería exacta esta operacion si en el intervalo que hay desde el paso por el meridiano hasta ponerse el astro, fuese constante su distancia al sol, cuya circunstancia jamás se verifica. Por consiguiente, quando se quiere determinar la hora del ocaso de un astro hasta la precision de los segundos, se han de considerar algunas circunstancias mas, que aplicaremos á la luna, porque son indispensables quando se quiere señalar el orto ó el ocaso de la luna con diferencia de uno ó dos minutos por lo menos.

435 El tiempo verdadero del orto de la luna no es
70. mas que la distancia *MS* del sol al meridiano, ó el ángulo horario del sol en el instante que la luna *L* está en el orizonte. Esta distancia del sol al meridiano es igual á la diferencia *SL* de las ascensiones rectas del sol y de la lu-

na,

na, menos la distancia *ML* de la luna al meridiano (que Fig.
llamamos *el Arco semidiurno*); por consiguiente, despues de hallada la ascension recta de la luna menos la del sol, se restará de esta diferencia el arco semidiurno de la luna para aquel instante, y quedará determinado el instante del orto de la luna. Si quando la luna está en el orizonte del lado del occidente, calculamos tambien su ascension recta menos la del sol para el tiempo de su ocaso conocido con corta diferencia, y se la añade el arco semidiurno de la luna para el mismo instante, quedará determinada puntualmente la hora del ocaso de la luna.

Esta misma regla está diciendo que las aproximaciones especificadas (418) para determinar la hora del paso por el meridiano, son igualmente indispensables quando se ha de determinar con puntualidad el orto y el ocaso de la luna. Porque como el arco horario de la luna quando está en el orizonte, ó su arco semidiurno, añadido á su ascension recta menos la del sol, dá el tiempo verdadero que se busca, es indispensable conocer al poco mas ó menos este tiempo verdadero para calcular la diferencia de ascension recta correspondiente á aquel instante, y añadirla al ángulo horario de la luna hallado por la resolucion del triángulo *PZL*. A mas de esto, para resolver el triángulo *PZL*, es preciso conocer la distancia *PL* de la luna al 71.
polo en el instante que está en el orizonte; por consiguiente es preciso conocer dicho instante, por lo menos con corta diferencia. Tenemos sin embargo para esto el mismo re-

 cur-

Fig. curso á que se apela quando se calcúla el paso de la luna por el meridiano, basta conocer con diferencia de una hora el instante que se busca, para sacarle con diferencia de un minuto por la operacion que egecutaremos en el caso que vamos á proponer.

436 Supongamos que el dia 26 de Febrero de 1765 el paso de la luna por el meridiano fuese á $4^h\ 50'$, y el del dia siguiente á $5^h\ 40'$ de la tarde ¿á qué hora se puso la luna en París el dia 26?

La declinacion de la luna para el dia 26 á mediodia es de $23^\circ\ 35'$ boreal, y para el dia 27 á mediodia es de $26^\circ\ 29'$; quiero decir, que en 24 horas crece la declinacion $2^\circ\ 54'$; supondremos este movimiento uniforme en el discurso de las 24 horas. Una vez que el paso por el meridiano es dado, será tambien conocida la diferencia de ascension recta entre la luna y el sol; pues hemos visto (408) que la hora puntual del paso por el meridiano es la ascension recta de la luna menos la del sol, para el mismo instante del paso. Así, el dia 26 de Febrero á $4^h\ 50'$ de la tarde la diferencia de ascension recta era de $4^h\ 50'$, y el dia 27 á $5^h\ 40'$ de la tarde era de $5^h\ 40'$, luego la diferencia de ascension recta creció $50'$ en el discurso de $24^h\ 50'$.

Con la declinacion de la luna á mediodia, que es de $23^\circ \frac{1}{2}$, sacamos, resolviendo el triángulo *PZL* (429), ó por la tabla de los arcos semidiurnos calculados para París, sacamos, digo, no llevando en cuenta la paralaxe, que el

el arco semidiurno viene á ser de $8^h\ 4'$; añadiremos esta Fig. cantidad al paso de la luna por el meridiano $4^h\ 50'$, y sacaremos $12^h\ 54'$, que es con corta diferencia la hora á que se pondrá la luna la noche del 26 al 27, 54' despues de media noche. Este es el cálculo hecho toscamente, el qual nos ha de encaminar al verdadero resultado por medio de la siguiente aproximacion.

Calcularemos para las $12^h\ 54'$ que acabamos de hallar, la declinacion de la luna ó su ascension recta. Este cálculo será muy facil, porque una vez que la declinacion para el 26 á mediodia es de $23^\circ\ 35'$, y para el 27 á mediodia de $26^\circ\ 29'$, hallaremos por medio de una simple parte proporcional, que en $12^h\ 54'$ habrá crecido $1^\circ\ 33'$, y que por lo mismo será de $25^\circ\ 8'$ á la hora de ponerse la luna. Ya que á $4^h\ 50'$ la diferencia de ascension recta era de $4^h\ 50'$, y en $24^h\ 50'$ de tiempo crece $50'$, deberá crecer $16'\frac{1}{4}$ en $8^h\ 4'$ de tiempo, que es el intervalo entre $4^h\ 50'$, y $12^h\ 54'$; será, pues, de $5^h\ 6'\frac{1}{4}$ á $12^h\ 54'$. Por medio de la declinacion de la luna hallada de $25^\circ\ 8'$ para el instante del ocaso, sacaremos el arco semidiurno de $28^h\ 7'\ 3''$, llevando en cuenta la refraccion de $33'\frac{1}{2}$, y la paralaxe de $54'\frac{1}{2}$ (429). Añadiendo este arco semidiurno á la diferencia de ascension recta $5^h\ 6'\frac{1}{4}$, sacaremos $13^h\ 13'\ 18''$ para la hora del ocaso de la luna, que discrepa $19'$ de la que sacamos en la primera operacion.

437 Si quisiéramos determinar con mas precision

todavia el ocaso de la luna, deberíamos calcular para $13^h\ 13'\ 18''$ la diferencia de ascension recta entre el sol y la luna, como tambien la declinacion de la luna y el arco semidiurno para el mismo tiempo; pero no se sacarian mas que algunos segundos, que poco importa se omitan en los mas de los casos.

438 Pondremos aquí la tabla siguiente, que espresa respecto de distintas latitudes, y distintas declinaciones el efecto total que causa la refraccion en el orto y ocaso de los astros, suponiendo de $33'\ 30''$ la refraccion orizontal.

Cantidad de lo que la refraccion adelanta el nacimiento de los astros, ó atrasa su ocaso.

Declinacion boreal ó austral.

Grados de latitud.

Grados	0°	5°	10°	15°	20°	23° 28′	25°	30°
0	2′ 14″	2′ 15″	2′ 16″	2′ 19″	2′ 22′	2′ 26′	2′ 28″	2′ 35
10	2 16	2 17	2 18	2 21	2 25	2 29	2 30	2 38
20	2 23	2 24	2 25	2 28	2 33	2 38	2 40	2 47
30	2 35	2 36	2 38	2 42	2 48	2 54	2 57	3 10
40	2 55	2 56	3 0	3 6	3 15	3 24	3 30	3 50
48° 50′	3 24	3 25	3 31	3 41	3 58	4 16	4 26	5 13
50	3 28	3 32	3 37	3 48	4 6	4 26	4 36	5 32
52	3 38	3 40	3 47	3 59	4 22	4 45	4 59	6 13
54	3 48	3 50	3 57	4 14	4 40	5 10	5 28	7 14
56	4 0	4 3	4 12	4 30	5 3	5 41	6 5	8 55
58	4 14	4 16	4 28	4 49	5 31	6 23	6 59	12 43
59	4 20	4 24	4 35	5 1	5 49	6 50	7 35	18 5
60	4 28	4 32	4 45	5 13	6 7	7 23	8 2	
61	4 37	4 41	4 56	5 27	6 30	7 54	9 24	
62	4 45	4 50	5 7	5 43	6 57	8 59	10 56	

Por

Por egemplo, manifiesta la tabla, que en la latítud de París 48° 50′, y el dia del solsticio, quando la declinacion es de 23° 28′, la refraccion causa una diferencia de 4′ 16″ de tiempo en el orto y ocaso del sol. Fig.

Hallar la hora que es por medio de la altura del Sol ó de una Estrella.

439 Tambien servirá para esta operacion el triángulo *PZL* (428). Si despues de observar la altura del limbo superior del sol, se rebaja la refraccion menos la paralaxe, y el semidiámetro del sol, y se saca por último que el *sol tiene* 30° de altura verdadera, su distancia *ZS* al zenit será de 60.° Resolveremos, pues, el triángulo *PZS* dándole 60° al lado *ZS* en lugar de 90°, que se le dieron quando se buscaba el nacer del sol, el lado *PZ* siempre es el complemento de la altura del polo, y el lado *PS* es la distancia del sol al polo boreal del mundo, esto es, la suma de 90° y de la declinacion del sol quando es austral, la diferencia entre 90° y la declinacion del sol quando es boreal. El ángulo *P* que se saca con resolver el triángulo *PZS*, convertido en tiempo á razon de 15° por hora, dá la hora que es, si fuere por la tarde; si fuere por la mañana, el ángulo *P* dará lo que falta para mediodia. 71. 72.

440 Si el astro cuya altura se hubiese observado fuese una estrella, tambien se resolverá el triángulo *PZS* para sacar el ángulo *P*; pero será preciso calcular para aquel instante la ascension recta de la estrella, y la del sol para res-

Fig. tarla de la primera. De su diferencia se restará el ángulo horario hallado si la estrella estuviese al oriente del meridiano, y se la añadirá si estuviere al occidente; la diferencia ó la suma convertida en tiempo á razon de 15° por hora, dará la hora verdadera, contando desde mediodia hasta 24 horas.

441 El dia 8 de Julio de 1761 se observó en alta mar la altura de Régulo, y despues de rebajada la refraccion se halló la altura verdadera de 20° 6′ ácia el occidente, á los 32° 12′ de latitud boreal. Suponiendo la declinacion de la espresada estrella de 13° 8.′ ¿Qué hora era en-
72. tonces? Despues de resuelto el triángulo *PZS*, cuyo lado *PZ* es de 57° 48′; *PS*, 76° 52′; y *ZS*, 69° 54′, se hallará el ángulo horario *P* 74° 19′ 46″$\frac{1}{2}$, los quales convertidos en tiempo dán 4^h 57′ 19.″ La diferencia de ascension recta entre el sol y la estrella era entonces de 2° 42′ 52″; sumando esta diferencia de ascension recta con el ángulo horario, porque la estrella *estaba al occidente* del meridiano, se sacará que el tiempo verdadero era 7^h 40′ 11.″

Hallar para una hora dada la altura del Sol ó de una Estrella.

442 La altura del sol ó de un astro qualquiera respecto del orizonte se averigua suponiendo conocidas las cantidades siguientes. 1.° La distancia del polo al zenit, ó el complemento de la latitud del lugar propuesto. 2.° La dis-

distancia del astro al polo, igual á 90° mas ó menos su declinacion. 3.° El ángulo horario formado en el polo del mundo por el meridiano del lugar, y el círculo de declinacion que pasa por el astro; este ángulo horario, quando se trata del sol para despues de mediodia, es igual á la hora dada, convertida en grados, á razon de 15° por hora; pero para por la mañana, es su complemento para 12 horas convertido igualmente en grados. Quando se trata de una estrella es la ascension recta del sol menos la de la estrella, añadida al tiempo verdadero convertido en grados (423). Daremos las dos analogías por las quales se averigua la altura, ó se resuelve el triángulo *PZS*, quando se conocen dos de sus lados, y el ángulo que forman, y se busca el lado *ZS* opuesto al ángulo conocido. Fig. 72.

El radio

es al coseno del ángulo horario P,

como la cotangente de la latitud del lugar, ó tangente de PZ,

es á la tangente del primer segmento PX (III. 724 *C*).

Se tomará la diferencia entre este primer segmento y la distancia al polo *PS*, si el ángulo horario fuese agudo; pero se tomará su suma, si dicho ángulo pasare de 90°; y tendremos el segundo segmento *SX*.

El coseno del primer segmento PX

es al coseno del segundo segmento SX,

como el seno de la latitud, ó cos PZ,

es al seno de la altura que se busca, ó cos ZS (III. 724 *C*).

Fig. Esta altura sería negativa, quiero decir que el astro estaría debajo del orizonte, si el segundo segmento pasára de 90.°

Hallar el Ángulo paraláctico de un Astro para una hora dada.

172. 443 El ángulo que forma el vertical con el círculo de declinacion, ó el círculo horario de un astro, se llama *Ángulo paraláctico*, porque sirve principalmente para el cálculo de las paralaxes; tal es el ángulo *PSZ*. Para determinarle, suponemos que se conozcan las tres cosas especificadas (442), y se haya hecho la primera analogía para determinar los dos segmentos *PX* y *SX*. Hecho esto, se reduce la operacion á esta analogía:

El seno del segundo segmento SX
es al seno del primer segmento PX,
como la tangente del ángulo horario P
es á la tangente del ángulo paraláctico PSZ (III. 724 C).

Este ángulo paraláctico casi siempre es agudo en el cálculo de los eclipses, donde hace mucho papel; sería obtuso, si el primer segmento *PX* fuese mayor que la distancia *PS* al polo elevado.

Hallar el Azimut de un Astro para una hora dada.

444 Despues de conocer en el triángulo *PZS* el ángulo horario *P*, y los dos lados adyacentes *PZ* y *PS* (442), imaginaremos la perpendicular *SY* bajada desde el sol al meridiano, y haremos la siguiente analogía:

El

El radio Fig.

es á la tangente de la distancia al polo PS,

como el coseno del ángulo horario P

es á la tangente del primer segmento PY. (III.724 *C*).

Tomaremos la diferencia que vá de la distancia *PZ* del polo al zenit al primer segmento *PY*, si el ángulo horario *P* fuese agudo; tomaremos su suma si el ángulo *P* fuese obtuso, y tendremos el segundo segmento *ZY*. Despues de esto haremos la segunda analogía:

El seno del segundo segmento ZY

es al seno del primer segmento PY,

como la tangente del ángulo horario P

es á la tangente del azimut PZS (III.724 *C*).

Este ángulo es agudo quando el primer segmento *PY* es menor que *PZ*; pero es obtuso, quando el segmento *PY* es mayor que el lado *PZ*, como en la figura, en el supuesto de ser agudo el ángulo *P*. 72.

445 *La Amplitud* es el arco del orizonte *QL*, comprendido entre el verdadero punto de oriente *Q*, y el punto donde nace un astro *L*. Esta amplitud se averigua del mismo modo que el azimut, porque es la diferencia ó la suma de 90°, y del azimut de un astro que está en el orizonte. Por consiguiente quando resolvimos el triángulo PZL (429), para sacar el ángulo *P*, pudimos sacar tambien por la misma regla el ángulo *Z* que hubiera sido la amplitud. 71.

Ha-

Fig.

Hallar el Ángulo de posicion de un Astro.

446 Es de mucho recurso en el cálculo de los eclípses el ángulo que forma en el centro de un astro el círculo de latitud con el círculo de declinacion; este es el ángulo que llamamos *de Posicion*, por ser un ángulo fijo, que solo pende de la posicion del astro respecto de la eclíptica y del equador, é indica la posicion de los principales círculos que se cortan en el centro de una estrella.

73. Sea *PE* el coluro de los solsticios; *P*, el polo boreal del mundo; *E*, el de la eclíptica; *S*, el astro de que se trata; *PE*, la distancia de los dos polos, igual á la oblicuidad de la eclíptica de $23^{\circ}\ 28'$, medida en el coluro de los solsticios; *E*♈, un círculo de latitud, que vá desde el polo de la eclíptica al punto equinoccial; *PQ*, el coluro de los equinoccios que vá desde el polo *P* al punto equinoccial, y forma un ángulo recto con el coluro de los solsticios *EP*. El ángulo *PES* es el complemento de la longitud de la estrella, porque este ángulo *PES* es el complemento del ángulo que forma el círculo de latitud *ES* que pasa por la estrella, con el círculo de latitud *E*♈, el qual desde el punto *E* vá á pasar por los equinoccios, y desde el qual se cuentan las longitudes. *ES* es el complemento de la latitud del astro, si esta latitud es boreal, ó la suma de 90°, y de dicha latitud, si es austral. El ángulo *EPS* es el complemento de la ascension recta, porque es la distancia del círculo de declinacion *PS* al coluro de los

sols-

solsticios que forma un ángulo recto con el coluro de los equinoccios *PQ*. El arco *PS* es la suma ó la diferencia de 90°, y de la declinacion. El ángulo *S* del triángulo *PES* se puede determinar por medio de *PE*, que es la oblicuidad de la eclíptica, y de la longitud y latitud, ó de la ascension recta y la declinacion, ó de la longitud y la declinacion, ó de la latitud y de la ascension recta. Este último método es mas sencillo que los demás, porque respecto de cada estrella la latitud es constante, y no pide mas que la analogía siguiente para la resolucion del triángulo *PES*, sen *SE* : sen *PE* :: sen *P* : sen *S* (III. 713). Fig.

El coseno de la latitud
es al coseno de la ascension recta,
como el seno de 23° 28′ 20″, *oblicuidad de la eclíptica,*
es al seno del ángulo de posicion.

447 Este ángulo de posicion no es constante, por razon de una variacion que causa en la ascension recta la precesion de los equinoccios, de la qual hemos hablado en otro lugar (400).

De la Aberracion de las Estrellas.

448 La *Aberracion de las estrellas fijas* es un movimiento en virtud del qual parece que trazan elipses de 40″ de diámetro. Esta apariencia que, segun digimos (VI. 294), se llama *Aberracion astronómica*, se descubrió por medio de repetidas observaciones, que se hicieron en

Fig. en Inglaterra con la estrella γ de la cabeza del Dragon.

449 El célebre Astrónomo ***Bradley*** observando esta estrella á mediados de Diciembre del año de 1725 reparó que estaba algo mas al sur que los primeros dias del mismo mes, habiéndose acercado todavía mas al sur el dia 20 de Diciembre. A principios de Marzo de 1726 la vió $20''$ distante del sitio donde estaba tres meses antes, y se mantuvo estacionaria algunos dias. A mediados de Abril pareció que subia ácia el norte, y á principios de Junio pasaba á la misma distancia del zenit que en la primera observacion hecha seis meses antes. Su declinacion crecia entonces $1''$ en tres dias, de lo qual se debia inferir que se iría acercando mas al norte, y así se verificó con efecto. Por el mes de Septiembre estaba la misma estrella $20''$ mas al norte que por Junio, y $39''$ mas que en el mes de Marzo; despues volvió ácia el sur, hallándose por Diciembre de 1726 á la misma distancia del zenit que el año antecedente, sin mas diferencia que la que debia ocasionar la precesion.

450 Para esplicar esta apariencia acudiremos á la re-
74. solucion de las fuerzas (IV.68). Sea E una estrella que arroja ácia nosotros un rayo de luz, considerándole como un corpúsculo que vá desde E á B; sea AB una porcioncita de la orbita terrestre, de $20''$ por egemplo, la que anda la tierra en $8'\ 7''$ de tiempo, y la que debe andar en el supuesto de que ande 1° en 24 horas, conforme se verifica por medio de una regla de tres; CB, el espacio que el rayo ha andado mientras que la tierra andaba AB. Esta-

taba, pues, en *C* el corpúsculo de luz *B* quando la tierra estaba en *A*, y llega á *B* al mismo tiempo que la tierra; luego *CB* y *AB* espresan respectivamente las velocidades de la luz y de la tierra en 20$''$ de tiempo. Fig.

Tiraremos la linea *CD* paralela é igual á *AB*, y concluiremos el paralelogramo *DBA*. Por el principio sentado (IV.68) podemos considerar la velocidad *CB* de la luz como derivada de dos velocidades cuyas direcciones son *CD* y *CA*. Por ser la direccion de la velocidad *CD* la misma que la de la velocidad *AB* de la tierra, é iguales estas dos velocidades, no la podemos percibir, y es nula respecto de *nosotros*; el ojo no puede ver con un rayo impelido en la misma direccion y con la misma velocidad que él. Por consiguiente no subsistirá respecto de nosotros mas que la parte *CA* de la velocidad de la luz, el rayo llegará á nuestros ojos en la direccion *CA*, y veremos la estrella en la linea *AC*, ó ácia *BD* que es paralela á *AC*. El ángulo *CBD* es lo que llamamos *Aberracion*, y es la cantidad ó el ángulo *CBD* que una estrella parece distante de su verdadero lugar, ó de la linea *BCE*, por causa del movimiento de la tierra y de la luz.

451 El plano *ECBA* se llama *el Plano de Aberracion*, porque en este plano se hace la aberracion. El lugar aparente de la estrella, su lugar verdadero, el ojo del observador, y el espacio que este anda en 8$'$ de tiempo todos están en este plano; por manera que no puede ser causa la aberracion de que la estrella parezca en otro plano. Al triángu-

lo

Fig. lo *CBA* se le llama *Triángulo de aberracion*, fórmale el camino de la luz con el de la tierra, siendo el angulillo *C* la medida de la aberracion.

452 Una vez que 20″ son el movimiento medio del sol ó de la tierra en 8′ 7″$\frac{1}{2}$, y sabemos que la luz del sol, quando este astro está en sus distancias medias respecto de nosotros, necesita 8′ 7″ para llegar al ojo del observador, síguese que la velocidad de la tierra es á la de *la luz* como 1 á 10313. Porque siendo (III. 487) la longitud del radio de la orbita terrestre, ó la distancia del sol á la tierra 57° 17′ 44″, ó 206220″ hallaremos que la longitud de un arco de 20″ de la orbita terrestre es igual á $\frac{20}{206220}$, cuya razon es la misma que la de 1 á 10313; y como las velocidades son como los espacios quando los tiempos son iguales (IV. 22), será con efecto la velocidad de la tierra 10313 menor que la de la luz.

453 De lo dicho (450) resulta que una estrella siempre nos parece mas adelantada del lado ácia el qual
74. caminamos, toda la cantidad del ángulo *BCA*. Pende este ángulo de la razon que hay entre la velocidad *AB* de la tierra, y la velocidad *CB* de la luz, cuya razon es (452) la de 1 á 10313, de aquí se saca un ángulo de 20″ quando *CB* es perpendicular á *AB*. Luego la aberracion siempre será de 20″ quando el rumbo del ojo fuere perpen-
75. dicular al rayo de la estrella. Pero quando *CB* está inclinada al rumbo *AB* del ojo, el ángulo *ACB* de aberracion es menor; y como *CB* es á *AB*, como el seno del ángulo

A

A es al seno del ángulo *C*, síguese que el seno del arco de aberracion, ó la aberracion misma, es como el seno de la inclinacion del rayo *CA* al rumbo del ojo, que siempre es un arco pequeño de la orbita terrestre; quiero decir, que es igual á 20″ multiplicados por el seno del ángulo que forma el rumbo del ojo con el rayo de la luz. Finalmente, si la linea *CA* se inclinára hasta confundirse con la linea *ABD*, el ángulo *C* desapareceria, y no habria mas aberracion; esto es evidente de suyo, porque entonces el rayo de la estrella siempre llegaría á nosotros por la misma direccion. Fig.

454 Supongamos ahora que el ojo en vez de caminar de *A* á *B*, camine desde *B* ácia *A*, de modo que el rayo llegue á *A* al mismo tiempo que el ojo. Si resolvemos la velocidad *CA* (450) en las dos *CE* y *CB*, resultará que la velocidad *BA* de la tierra destruirá la velocidad *CE*, y no quedará mas que *CB* ó su paralela *EA*. Parecerá, pues, en este caso que la estrella sube mas arriba de la linea que el ojo anda, siendo así que en el caso antecedente parecia que bajaba. La veremos en *E*, y no en *C*; porque la aberracion siempre lleva una estrella al mismo lado ácia el qual vá caminando la tierra. Quando la tierra se halla en el 76.
punto G de su orbita *GHD*, y despues en el punto *K*, parece que sigue dos rumbos opuestos; en el primer caso la estrella está en oposicion, y parece á la izquierda del lugar medio E. En el segundo caso, caminando la tierra de *D* á *K*, la estrella está en conjuncion con el sol, y parece

20″

Fig. 20″ á la derecha, esto es, al occidente del punto *E* en una linea *DS*.

455 El efecto de la aberracion en una estrella que estuviese en el polo mismo de la eclíptica, es el mas sencillo de todos, y por este motivo le consideraremos el primero, probando que la estrella pareceria andar un circulo de 40″ de diámetro al rededor de su lugar verdadero, esto es,

77. al rededor del polo de la eclíptica. Sea *ABCD* la eclíptica ó la orbita terrestre que suponemos circular, porque para el caso es despreciable la diferencia de sus diámetros; *E*, el polo de dicha orbita, y se le debe concebir levantado perpendicularmente al plano de la figura; al rededor del polo *P* se trazará un círculo cuyo diámetro sea de 40.″ Quando la tierra estuviere en *A*, y caminare de *A* á *B*, la estrella situada en el polo de la eclíptica parecerá 20″ mas adelantada ácia el mismo lado, esto es, en *a* (450); quando la tierra estuviere en *B*, la estrella parecerá en *b*, despues en *c*, *d*, y al cabo de un año habrá andado el circulillo *abcd* al rededor del polo de la eclíptica, estando siempre 90° mas adelantada en su circulillo que la tierra en el suyo, y teniendo siempre 20″ de latitud que en su verdadero lugar.

76. 456 Por lo que mira á las estrellas que están en el plano de la eclíptica, sea *GHK* el plano de la orbita terrestre; *E*, una estrella situada en el mismo plano; *S*, el sol; *G*, el punto donde se halla la tierra quando la estrella está en oposicion; *K*, el punto donde se halla la tierra quando la estrella está en conjuncion con el sol. Como en la oposicion

cion G la tierra camina de B á G, ó de occidente á oriente, la estrella parecerá 20″ mas adelantada ácia el oriente; quiero decir, que su longitud crecerá 20″; pero como en la conjuncion la tierra camina ácia una direccion contraria respecto de la estrella, esto es, desde D ácia K; la longitud de la estrella será 20″ menor. En las quadraturas Q y H la aberracion será nula, porque el rayo HI, que se dirige á la estrella, y es paralelo á SE, por razon de la inmensa distancia de las estrellas, llega á ser la tangente de la orbita que anda el ojo, y se confunde con ella en H, de donde resulta que no hay mas aberracion (453). Fig. 76.

457. *Aunque la tierra* sigue siempre un mismo rumbo, y se mueve de occidente á oriente respecto del sol; sin embargo la figura misma está diciendo que respecto de la estrella E que está mas allá de la grande orbita, la tierra yendo de B á G, y seis meses despues de D á K, parece que sigue distintas direcciones. Parecerá, pues, la estrella en el primer caso muy á la izquierda ó muy oriental, y en el segundo caso muy á la derecha ó muy occidental respecto del rayo KSGE tirado al verdadero lugar de la estrella.

Síguese de aquí que para averiguar qual es el lugar del sol al tiempo que la aberracion de una estrella en longitud es la máxima, y sustractiva de la longitud media, basta tomar la longitud misma de la estrella. Por egemplo, Sirio tiene 3ˢ 10° de longitud, el sol tiene la misma longitud el dia primero de Julio, entonces Sirio está en con-

Fig. juncion con el sol, hallándose la tierra en *K*, y la aberracion hace que su longitud parece menor, por manera que entonces se debe restar la aberracion de la longitud media de la estrella, para sacar su longitud aparente.

458 El *Argumento Anuo de la aberracion*, en general, es el camino que ha andado el sol desde que la estrella parecia menos adelantada, ó la longitud del sol al tiempo que la aberracion es máxima y *sustractiva*, de la qual se ha rebajado el lugar del sol para el dia dado. *Si tomamos la longitud misma de la estrella, sacaremos el lugar del sol para el tiempo en que la longitud aparente de dicha estrella es la menor que pueda ser en el discurso del año, y sirve para sacar el argumento anuo de la aberracion en longitud.*

Para determinar la aberracion en longitud en las situaciones medias entre las oposiciones y las conjunciones, sea *FL* el espacio de 20″ que la tierra anda en 8′ de tiempo, en un punto de su orbita que dista la cantidad *GL* del punto *G* de la oposicion. Sea *MF* el camino de la luz en el mismo tiempo; *FML*, el ángulo de aberracion. Por ser el rayo *MF* de la estrella paralelo á la linea *EGK*, el ángulo *MLF* ó *LFN* (pues aquí se puede tomar uno por otro una vez que su diferencia no llega á 20″) tiene por medida el arco *FH* ó *LH*; por consiguiente el ángulo de aberracion (453) es igual á 20″ sen *F*, ó 20″ sen *LH*, ó 20″ cos *LG*; luego *la aberracion en longitud es proporcional al seno de la distancia á la quadratura*, ó de la distan-

cia

cia al punto donde es nula, ó *proporcional al coseno del argumento de aberracion*. Se la debe añadir á la longitud media desde la quadratura que precede la oposicion, hasta la que se sigue á la oposicion, ó quando la longitud de la estrella menos la del sol, que es el argumento de la aberracion en longitud, es de 3, 4, 5, 6, 7, 8 signos; se la deberá restar de la longitud media, si fuere del lado de la conjuncion, ó quando el argumento fuere de 9, 10, 11, 0, 1, 2 signos. Y de hecho, mientras la tierra camina de Q á G, en el supuesto de contarse las longitudes desde el punto Q, la longitud del sol es entre 6 y 9, y restándola de la de la estrella *E*, que es de 3^s, la diferencia es entre 9 y 6, la aberracion es aditiva entonces.

459 Lo que acabamos de demostrar respecto de la aberracion en longitud de una estrella que está en el plano de la eclíptica, se verifica igualmente respecto de una estrella que esté mas arriba ó mas abajo de la eclíptica, sea la que fuere su latitud. Porque si nos figuramos el punto *M* del triángulo de aberracion *MFL*, levantado sobre el plano de la figura, y dirigido ácia una estrella, quedándose siempre la base *LF* en el plano de la figura, el ángulo de aberracion *M* se quedará el mismo; si era de $10''$ quando las lineas *LM*, *FM* estaban en el plano de la figura, será todavia de $10''$, y siempre podremos decir que la estrella parecerá haberse acercado $10''$ al plano que pasa por *ECK*. Este plano que concebiremos tirado perpendicularmente al plano de la eclíptica, y que pasa por la estre- Fig. 76.

Q 2 lla

Fig. lla *E*; es el círculo de latitud donde parece la estrella, el qual señala su longitud en el cielo, y la de la tierra quando la estrella está en oposicion.

Quando la estrella se hallaba en el plano mismo de la eclíptica, la aberracion era causa de que parecia mas lejos de la linea *EGK*, que tambien estaba en el plano de la eclíptica; si la estrella estuviere á mayor altura, la aberracion la arrimará á otra linea mas alta que *GK*, que esté á la misma altura que la estrella, y en el plano del mismo círculo de latitud que pasa por *ECK*.

460 La aberracion en longitud que acabamos de determinar, se mide en la region donde está la estrella, paralelamente á la eclíptica, con un arco de círculo máximo. Pero si se la refiere á la eclíptica por medio de dos círculos de latitud, tirados desde el polo de la eclíptica por el lugar aparente, y el lugar medio de la estrella, llegará á ser mayor (54), y se la deberá dividir por el coseno de la latitud, para sacar la aberracion en *longitud* en la eclíptica misma. Por consiguiente la aberracion máxima en longitud $= \frac{20''}{\text{cos latit.}}$, y la aberracion para un tiempo dado, $= \frac{20'' \text{ cos argum.}}{\text{cos lat.}}$, esto es, 20″ divididos por el coseno de la latitud de la estrella, y multiplicados por el coseno de la elongacion hallada para el mismo tiempo, ó del argumento de la aberracion (458); es sustractiva en los tres primeros signos del argumento, y en los tres últimos.

461 Es facil formar una tabla de la aberracion máxima en longitud. Una estrella que está á 60° de latitud, tie-

tiene su aberracion máxima de 40″, porque $\frac{20''}{\cos 60^\circ} = 40''$, Fig. 7
y la aberracion de Sirio, que tiene 39° 33′ de latitud, es 25″ 9. Si dada la aberracion máxima, se quisiese sacar la aberracion actual para un tiempo dado, se deberá buscar el lugar del sol para el mismo tiempo, del qual se restará la longitud de la estrella, y la resta será (458) el argumento de la aberracion en longitud; y se multiplicará la aberracion máxima por el coseno del argumento.

La longitud de Sirio en 1750 era 3^s 10° 38′, y supongo que se haya de determinar su aberracion en longitud el dia primero de Mayo de 1750 á mediodia. Se calculará la longitud del sol para el mismo dia, ó se buscará en unas Ephemérides, suponémos que sea 1^s 10° 55′; se restará de la de Sirio; la diferencia 59° 43′ es el argumento anuo de la aberracion en longitud, cuyo coseno multiplicado por 25″ 9, dará 13″ 1, que será la aberracion de Sirio en longitud el dia primero de Mayo del año de 1750. Será sustractiva, porque es en el primer quadrante del argumento, ó del lado de la conjuncion (458).

462 Hasta aquí hemos considerado el efecto de la aberracion paralelamente á la eclíptica; veamos ahora qué efecto causa de arriba abajo, ó de norte á sur, esto es, perpendicularmente á la eclíptica. Quando la tierra se halla ácia el punto *A* de su orbita, á igual distancia de los sizygies *B* y *D*, la porcion *AM* de su orbita, que entonces anda, es paralela á la linea de los sizygies *BD*; por con- 77.

Fig. siguiente el efecto de la aberracion no puede arrimar la estrella á dicha linea, ni mudar por consiguiente su longitud. El paralelogramo de aberracion *CSAM*, es paralelo al plano del círculo de latitud levantado perpendicularmente sobre *B* y *D*. Imaginemos el plano de este paralelogramo levantado perpendicularmente al plano de la figura, en vez de estar echado de lado, conforme es preciso pintarle en la figura; sea *S* la estrella que hemos de imaginar perpendicularmente al punto *N*, de modo que su latitud sea igual al ángulo *SAN*, la estrella en vez de parecer en el rayo *MS* parecerá en el rayo *AS* ó *MC*; y la medida de la aberracion *ASM* ó *CMS* será *MF* $=$ *AM*. sen *MAF* (453), esto es, $20''$. sen lat.

Quando la tierra se halla en *A*, y la estrella parece en quadratura, todo el efecto de la aberracion es de arriba abajo; quiero decir, que la aberracion es toda en latitud, y si la estrella se acerca á la estrella, yendo desde *A* á *M*, tambien la estrella se acerca á la eclíptica, ó al plano en que se mueve la tierra. Porque entonces la latitud aparente, ó el ángulo *CMN* es menor que el ángulo *SMN*, latitud media que se verificaría, si no fuera por la aberracion. Si la tierra se apartára de la estrella yendo desde *M* á *A*, sucedería lo contrario, y la estrella parecería que se habia apartado de la eclíptica por causa de la aberracion. Esto sucede en la segunda quadratura, despues de la oposicion, quando la tierra está en *C*.

463. Esta es la aberracion en latitud al tiempo de las

qua-

quadraturas, esto es, quando es máxima; esta aberracion Fig.
en latitud es nula en la conjuncion y la oposicion. Porque entonces el camino *BG* de la tierra es perpendicular al rayo 76.
CG de la estrella, el triángulo de aberracion *CBG* coge de la derecha á la izquierda, esto es, en longitud, aunque su vértice *C* esté levantado encima del plano de la eclíptica, y no puede alterar la posicion de la estrella de arriba abajo, esto es, en latitud. La tierra no se acerca entonces al rayo *CB* de la estrella, por lo menos en la direccion del círculo de latitud; por manera que no hay aberracion en latitud, porque esta proviene de la cantidad que la tierra se acerca al rayo de la estrella, á lo largo del círculo de latitud; del mismo modo que la aberracion en longitud proviene de la cantidad que la tierra se acerca al rayo de la estrella en la direccion de la eclíptica.

464 Para determinar la aberracion en latitud en las posiciones de la tierra medias entre la oposicion y la quadratura, basta averiguar quánto la tierra se acerca al rayo de la estrella, ó la cantidad *FN* que ocupa el lugar de *QR*; quando se desvanece, conforme sucede en *G*, la aberracion en latitud se desvanece tambien.

Las consideraciones siguientes harán mas perceptible porqué la aberracion en latitud pende de la cantidad *FN*. El triángulo de aberracion cuya base es *RQ* quando la tierra está en *R*, y *BG* quando la tierra está en *G*, no está en la eclíptica, obra parte de su efecto de la derecha á la izquierda, cuya medida es *LN*, y otra parte de arriba abajo

 cu-

Fig. cuya medida es *NF*. Para probarlo, supongamos que la tierra en vez de ir en derechura desde *F* á *L*, haya ido desde *F* á *N*, y de *N* á *L*, en este caso no hubiera esperimentado aberracion alguna en latitud al ir desde *N* á *L*, pues teniendo entonces el triángulo de aberracion por base la linea *NL*, todos sus puntos tienen una misma latitud, y forman un mismo ángulo con el plano de la eclíptica. Pero yendo
77. desde *F* á *N*, toda la aberracion es en latitud, del mismo modo que quando la tierra iba desde *A* á *M*, y directamente á la estrella; es, pues, *FN* la medida de la aberracion en latitud; en quanto al efecto de la aberracion, lo mismo tiene que la tierra haya andado *FNL*, ó *FL* no mas. Se deduce de todo lo dicho hasta aquí, que *NL* no causa aberracion en longitud, sino por razon de estar el punto *L* mas distante de la linea de los sizygies *EGK* que el punto *F*; por la misma razon la linea *FN* no causa aberracion en latitud, sino porque el punto *F* está mas lejos de la linea de las quadraturas *HS*, que el punto *L*. Luego las mismas aberraciones se hubieran verificado aun quando la tierra hubiese andado separada y succesivamente las lineas *FN* y *NL*.

465 Es, pues, la linea *FN* la medida de la aberracion en latitud, y como es menor que *FL* que daba la aberracion máxima, tendremos tambien una aberracion menor que 20.″ El triangulillo *FNL* es semejante al triángulo *SLV*, luego *SL* : *VL* :: *LF* : *FN*, y quiere decir, que el radio es al seno de la distancia á la oposicion, como la

aber-

aberracion máxima en latitud es á la aberracion actual en latitud, andando la tierra *FN*. Fig.

Luego para determinar la aberracion en latitud un dia dado, se ha de multiplicar la aberracion máxima, ó 20″. sen lat. por el seno de la elongacion de la estrella. Esta multiplicacion disminuirá la latitud antes de la oposicion, ó ácia la primera quadratura, y la aumentará despues de la oposicion, sea en las estrellas boreales, sea en aquellas cuya latitud es austral.

466 Para determinar el argumento de aberracion en latitud, se tomará la longitud del sol al tiempo que la aberracion en latitud es máxima y sustractiva, conforme lo hemos propuesto (458) para la aberracion en longitud; bastará añadir tres signos á la longitud de la estrella, porque hallándose en *Q* la tierra en la primera quadratura, está patentemente el sol tres signos mas adelantado que el lugar de la estrella. Así, de la longitud de la estrella despues de añadirla tres signos, se rebajará la longitud del sol para un tiempo dado, y saldrá la distancia de la tierra al punto *Q*, ó el argumento de la aberracion en latitud, cuyo coseno multiplicado por la aberracion máxima, dará la aberracion en latitud; porque el coseno de la distancia de la tierra al punto *Q* es lo mismo que el seno de su distancia al punto G, ó de la elongacion de la estrella. Esta aberracion será sustractiva de la latitud media en los signos 0, 1, 2, 9, 10, 11, y será aditiva en el segundo y tercer quadrante del argumento.

Por

Fig. 467 Por medio de las éspresiones de la aberracion en longitud (460), y latitud (465), se demuestra con facilidad que las estrellas parece que andan elipses por el efecto de la aberracion, que son mas ó menos abiertas, conforme las estrellas distan mas ó menos de la ecliptica.

78. Sea *E* el lugar medio de la estrella, el mismo donde la veríamos si no fuera por las desigualdades de la aberracion; la linea *LEK*, paralela á la eclíptica, y la suponemos de $40''$, la estrella será en *K* lo mas occidental que puede, teniendo la menor longitud posible al tiempo de su conjuncion con el sol (456); en *L* será oriental quanto cabe, y en su mayor longitud, al tiempo de la oposicion. La aberracion en longitud será nula, y la estrella corresponderá al punto *E* al tiempo de las quadraturas. Si trazamos un semicírculo *LCK*, y hacemos el arco *CD* igual á la distancia de la estrella á su quadratura, ó *LD* igual á su elongacion; tirando *DV*, será sin duda alguna *EV* la aberracion en longitud; porque $EV = EL.$ sen $CD = 20''.$ cos elong. y si la referimos á la eclíptica, tendremos (54) $\frac{20''.\text{ cos elong.}}{\text{cos lat.}}$; este es el valor de la aberracion en longitud (460).

Si tomamos igualmente en el círculo de latitud la cantidad *EA*, igual á la aberracion máxima en latitud al tiempo de las quadraturas, trazamos despues el círculo *ABF*, hacemos el arco *AT* igual á la elongacion, ó á la distancia de la estrella á la linea de los sizygies, y tiramos *PTS* que encontrará *VS* en el punto *S*; será *RT* ó *SV* la aberracion en latitud; porque $TR = EA.$ sen elong. $= 20''.$ sen lat.

sen elong. cuya cantidad es (465) la espresion de la Fig.
aberracion en latitud. Luego la estrella parecerá en *S*; pero el punto *S* es patentemente un punto de una elipse; porque *EV* es el seno del arco *CD* en el círculo máximo, y *VS* es el coseno del mismo arco en el círculo menor, cuyas circunstancias determinan la elipse (72).

468 Por consiguiente cada estrella anda en virtud de la aberracion una elipse *ALFK*, cuyo ege mayor es paralelo á la eclíptica, y coge 40″ de largo. El punto *L* que está mas á la izquierda ó es el mas occidental, es el lugar donde parece la estrella quando está en oposicion (456); el punto *K* es el de la conjuncion. El punto *A*, quando la estrella es austral, ó el punto *F* si la estrella es boreal, esto es, el punto de la elipse que está mas inmediato á la eclíptica, señala el lugar aparente de la estrella tres meses despues de la conjuncion. Como la aberracion en longitud siempre es el coseno de la elongacion de la estrella en el círculo *KCDLH*, si señalamos en *K* el lugar del sol que es igual á la longitud de la estrella, y dividimos el círculo en 360°, las perpendiculares bajadas desde cada grado de longitud al ege mayor *LEK*, señalarán en la elipse todos los puntos donde la estrella ha de parecer en los mismos tiempos. Supongamos que esta elipse sea la que parece que traza Arcturo, cuya longitud es de 6^s 21°; señalaremos en *K*, 6^s 21°, este es el lugar del sol, al tiempo que Arcturo parece en *K* el dia 13 de Octubre. Una vez que el círculo *KDLH* está dividido en 360°, se señalarán las lon-

Fig. longitudes del sol desde *K* ácia *H*, *L*, *D*, el punto *D* caerá sobre 1^s 26^o de longitud; bajando, pues, la perpendicular *DSV*, señalará en *S* el lugar aparente de la estrella en su elipse quando el sol tiene 1^s 26^o de longitud, esto es, el dia 16 de Mayo, conforme lo evidencia la construccion antecedente. Tambien se puede dividir el círculo *LDCKH* en 365 dias, empezando desde el punto *K* donde estará el dia de la conjuncion, y bajando una perpendicular *DV* desde el dia señalado en el punto *D* al ege mayor, esta perpendicular determinará el lugar *S* donde la estrella deberá parecer el dia señalado. Por este método se han señalado en la figura los lugares de Arcturo y Sirio en
79. sus elipses de aberracion; Arcturo está en el estremo occidental del ege mayor de su elipse á la derecha, el dia 13 de Octubre, que es el de su conjuncion; está en el estremo inferior ó meridional del ege menor, á 11 de Julio que es el dia de su primera quadratura. Sirio al contrario está en el estremo superior ó boreal del ege menor de su elipse, á 3 de Octubre, dia de su primera quadratura; porque las estrellas siempre parecen lo mas cerca de la eclíptica tres meses despues de su conjuncion, las estrellas boreales están entonces al mediodia, y las estrellas australes están al norte. La elipse de Arcturo está inclinada respecto de la linea orizontal *AB*, que suponemos paralela al equador, la cantidad del ángulo de posicion (446). Los meses que ván señalados dentro de la elipse son para el efecto de la paralaxe, que hacia parecer la estrella en el mismo punto de la

la elipse tres meses antes que la aberracion. Fig.

469 La aberracion en longitud EV que acabamos de determinar en el paralelo de la estrella, suponiendo EL de 20″, se ha de reducir á la eclíptica para los usos astronómicos; quiero decir, que se la debe dividir por el coseno de la latitud de la estrella (54), de aquí proviene que la aberracion en longitud que siempre es de 20″ de círculo máximo, quando se toma en el paralelo de la estrella, llega á ser muy grande para las estrellas inmediatas al polo de la eclíptica, si se la mide en la eclíptica. 78.

470 La elipse de aberracion es tanto mas abierta, quanto mas distan de la eclíptica las estrellas; forma un círculo de 40″ de diámetro para una estrella que está en el polo mismo de la eclíptica, despues el semiege menor vá menguando como el seno de la latitud; finalmente dicha elipse es infinitamente angosta, y se reduce á una linea recta KEL para las estrellas que están en la misma eclíptica. Pero aun en el caso de la linea recta tambien se señalaría en ella el lugar aparente de la estrella, dividiendo el círculo $KCDL$ en 365 dias, y bajando desde cada dia perpendiculares DV, al ege mayor; estas perpendiculares señalarian en la linea recta LEK, la situacion aparente de la estrella para cada dia del año, y sus distancias al punto E del medio siempre serian los cosenos de la elongacion de la estrella.

471 Por medio de la elipse de aberracion, se puede determinar la aberracion en ascension recta y declinacion, y declararemos el método por el qual se consigue, porque los

As-

Fig. Astrónomos se valen á cada paso de la aberracion en ascension recta y declinacion.

472 Lo primero que nos importa averiguar es en qué tiempo del año es nula la aberracion en declinacion, ó
80. el lugar del sol que corresponde á dicho tiempo. Sea *E* el lugar medio de una estrella; *PEG*, el círculo de latitud que pasa por la estrella *E*; *REe*, el círculo de declinacion; *PER*, el ángulo de posicion (446); *ANGML*, la elipse que parece que anda la estrella cada año en virtud de la aberracion, y cuyo ege mayor *LK* es indispensablemente perpendicular á *PEG* (468). Tiraremos la *MN* perpendicular al círculo de declinacion *REe*, y bien se echa de ver que quando la estrella esté en *M* y *N*, la aberracion en declinacion será nula. Supongamos circunscripto al rededor de la elipse un círculo *LFYK* dividido en signos y grados, señalemos en el punto *K* la longitud misma de la estrella, una vez que la estrella está en el punto *K* de su elipse, quando la longitud del sol es igual á la de la estrella; los puntos *B* é *Y* del círculo circunscripto determinados por las ordenadas *BC*, *YW* representarán los lugares del sol al tiempo que la estrella parece en *M* y *N* (468). Para determinar la situacion del punto *Y*, ó el ángulo *YEW*, tendremos presente (64) que por la propiedad de la elipse, *WN* es á *WY*, como el ege menor de la elipse es al mayor, ó como el seno de la latitud de la estrella es al radio (462); pero *WN* es á *WY* como la tangente de *WEN*, es á la tangente de *WEY*; luego por ser *WEN* igual á *PER*, ó al ángu-

lo

lo de posicion, el *seno de la latitud de la estrella es al radio, como la tangente del ángulo de posicion, es á la tangente de un ángulo*; que es la distancia entre el lugar del sol al tiempo de la conjuncion, esto es, el lugar mismo de la estrella que suponemos señalado en *K*, y el lugar del sol quando la aberracion en declinacion es nula. Fig.

473 Tambien hemos de determinar el lugar del sol para quando la aberracion en declinacion es máxima. Supongamos que á la elipse *LQA* se la haya tirado una tangente *QI* paralela á *MN*; el punto de contacto *Q* señala el punto donde la aberracion en declinacion *QH* ó *IE* es máxima. En virtud de esta construccion *EQ* es un diámetro conjugado al diámetro *EM*, una vez que la tangente *QI* es paralela á *MN* (III. 98). Tiraremos la ordenada *DQF* al círculo, el punto *F* será el lugar del sol al tiempo que la aberracion en declinacion es máxima; si se tira el radio *EF* del círculo, el ángulo *FEB* será un ángulo recto (69), y esto prueba que el lugar del sol al tiempo de la aberracion máxima en declinacion, ó el punto *F*, dista tres signos del lugar del sol *B* ó ♈ al tiempo que la aberracion en declinacion es nula (472).

474 Para hallar el valor de la aberracion máxima en declinacion *QH*, respecto de la máxima aberracion absoluta *EL* que es de 20″, se debe considerar que por ser *EQ*, *EM* diámetros conjugados, la propiedad de la elipse (70) dará $QH \times EM = EG \times EL$; $\frac{QH}{EL} = \frac{EG}{EM} = \frac{EG.BE}{EM.BE} = \frac{CM.BE}{EM.BC}$ (substituyendo $\frac{CM}{BC}$ en lugar de $\frac{EG}{BE}$); pero $\frac{CM.BE}{EM.BC}$ es

Fig. es igual á $\frac{CM}{EM}$ dividido por $\frac{BC}{BE}$, esto es, al seno del ángulo *MEC* dividido por el seno del ángulo *BEC*; luego *QH*: *EL* :: sen *MEC* : sen *BEC*, y sen *BEC* ó cos *FEL* : sen *MEC* ó *PER* :: *EL* ó 20″: *QH*. Luego el coseno de la elongacion de la estrella al tiempo de la aberracion máxima en declinacion es al seno del ángulo de posicion, como 20″ son á la aberracion máxima en declinacion.

475 La aberracion en declinacion *en otro tiempo* qualquiera del año, es como el seno de la distancia del sol á los puntos *B* ó *Y* donde era nula. Sea *S* el lugar aparente de la estrella para un tiempo dado; *X*, el lugar del sol que le corresponde; *ST*, la aberracion en declinacion. Si tiramos una ordenada *SV* al diámetro *EN*, siempre estará *ST* con *SV* en razon constante, porque todas las ordenadas como *SV* forman el mismo ángulo con el diámetro *EN*, y con las lineas como *ST*, que le son perpendiculares. Fuera de esto, la linea *SV* ordenada al diámetro *NEM* de la elipse tiene una razon constante con *XZ*, perpendicular á *EY*, y seno del arco *XY*. Con efecto, basta considerar la elipse *ANK* como proyeccion del círculo circunscripto (65) imaginando que este círculo está levantado, y gira al rededor del ege *LK*, lo que es menester para que el punto *Y* corresponda perpendicularmente á *N*, el diámetro *EN* de la elipse será la proyeccion del radio *EY* del círculo; el diámetro *EQ* será la proyeccion de *EF*; toda linea paralela á *EF*, qual es *XZ*, tendrá su proyeccion paralela á *EQ*, porque dos lineas paralelas proyectadas per-

pen-

pendicularmente sobre un plano, no pueden formar sino proyecciones paralelas; luego *SV* proyeccion de *XZ* tiene una razon constante con *XZ*. Pero *SV* tambien tiene una razon constante con *ST*; luego *XZ* tambien tendrá una razon constante con *ST*; pero la línea *XZ* es el seno del arco *XY*, distancia entre el lugar *Y* del sol quando la aberracion era nula, y el lugar actual *X* del sol, y la aberracion en declinacion es *ST*. Fig.

476 Por consiguiente en conociendo el lugar del sol al tiempo de la aberracion máxima en declinacion (473), y restando el lugar actual del sol, se sacará el argumento anuo de aberracion (458), cuyo coseno multiplicado por la aberracion máxima, dá la aberracion actual en declinacion.

477 Daremos reglas generales para la aberracion en declinacion, que ahorrarán á los calculadores la molestia de considerar la situacion respectiva de los círculos de que nos hemos valido, y se podrán practicar en todos los casos. Sea P el polo del mundo; *O*, el polo de la eclíptica; *EQ*, 81.
el equador; *EC*, la eclíptica; *S*, una estrella; *PSAM*, el círculo de declinacion; *OSL*, el círculo de latitud. Por tener el punto *L* la misma longitud que la estrella, señala el lugar del sol al tiempo que la aberracion en latitud es nula. Si tiramos el círculo *STR* perpendicular al círculo de declinacion *PSA*, el punto *T* señalará el lugar del sol quando la aberracion en declinacion es nula, pues en el triángulo esférico *STL* tenemos (III. 702) sen *SL* : *R* :: cot *TSL* :

Fig. cot TL, cuya proporcion viene á ser la de antes (471).

478 En conociendo el punto A del equador que señala la ascension recta de la estrella S, se hallará con facilidad, conforme declararemos mas adelante, el punto M de la eclíptica, y su declinacion AM. Con tomar la suma de AM, y de la declinacion AS de la estrella, si fueren de distintas denominaciones, ó su diferencia, si ambas fueren australes ó boreales, se determinará el arco SM. En el triángulo EAM rectángulo en A, sen $M = \frac{\cos E}{\cos AM}$ (III. 701); del triángulo STM rectángulo en S, se saca $\cos T = \text{sen}\, M . \cos SM$; luego $\cos T = \frac{\cos SM . \cos E}{\cos AM}$. Así, para hallar el ángulo STM, haremos esta proporcion: el coseno de la declinacion AM del punto del equador, es al coseno de la oblicuidad de la eclíptica $23^\circ 28'$, como el coseno del arco SM es al coseno del ángulo STM, ó de su suplemento ETR, que llamaremos Y. El ángulo R que mide la declinacion AS de la estrella es conocido, porque el punto R es el polo del arco SA (III. 677), tambien es conocido el lado RE que es el complemento de la ascension recta EA de la estrella; haremos, pues, esta proporcion: sen ETR : sen ER :: sen R : sen ET; á este arco ET, que en algunos casos es la longitud misma que se busca, le llamaremos Z.

479 La última proporcion viene á ser la misma que estotra: el seno del arco Y es al coseno de la ascension recta de la estrella, como el seno de la declinacion de la estrella es al seno del arco Z. Este arco nunca llega á 90°, mientras que la estrella está entre los trópicos, y quando

la

la ascension recta de una estrella $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\ \text{austral}\end{matrix}\right\}$ está entre $\left\{\begin{matrix}180^\circ \text{ y } 360^\circ\\ 0^\circ \text{ y } 180^\circ\end{matrix}\right\}$. En los demás casos se hace esta proporcion: el radio es á la tangente de $23^\circ\ 28'$, como la cotangente de la declinacion de la estrella es al seno de un arco *A*. El arco *Z* pasará de 90° quando la ascension recta de la estrella $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\ \text{austral}\end{matrix}\right\}$ fuere entre $\left\{\begin{matrix}0^\circ + A \text{ y } 180^\circ - A\\ 180^\circ + A \text{ y } 360^\circ - A\end{matrix}\right\}$. El arco *Z* $\left\{\begin{matrix}\text{se añade á } 0^s\\ \text{se resta de } 6^s\end{matrix}\right\}$ para las estrellas $\left\{\begin{matrix}\text{boreales}\\ \text{australes}\end{matrix}\right\}$, quando su ascension recta está en el primero y último quadrante del equador, y $\left\{\begin{matrix}\text{se resta de } 12^s\\ \text{se añade á } 6^s\end{matrix}\right\}$ para las estrellas $\left\{\begin{matrix}\text{boreales}\\ \text{australes}\end{matrix}\right\}$, quando la ascension recta está en el segundo y el tercer quadrante del equador; de este modo se halla el lugar del sol al tiempo de la aberracion máxima en declinacion.

Fig.

480 Para hacer patente la razon de la última operacion, imaginaremos un arco *TX* bajado perpendicularmente desde el punto *T* al equador *ER*. El triángulo esférico *ETR* cortado por la perpendicular *TX* dá (III. 714. 3°) cot *E* : sen *EX* :: cot *R* : sen *XR*; y por ser el ángulo *R* igual á la declinacion de la estrella, tendremos para el caso en que *EX* fuere de 90°, la siguiente proporcion *R* : tang *E* :: cotang declin. : sen *XR*, ó *R* : tang $23^\circ \frac{1}{2}$ :: cotang declin. : sen *A*. Despues de hallado el valor de *A* ó del arco *XR* para el caso en que *EX* es de 90°, repararemos que en este caso el arco *ET* que buscamos tambien es de 90°; tambien tenemos $RA = 90^\circ$, luego $EA = RX$, quiero decir, que entonces la ascension recta de la estrella es igual al segmento *XR*, ó al valor de *A*. El que considerare en un globo la situacion de estos arcos en diferen- 81.

 tes

Fig. tes casos, echará de ver que el arco *Z* ó *ET* es obtuso si la ascension recta de una estrella boreal fuere mayor que *XR* que es el valor de *A*, y fuere menor que el suplemento de *XR*, esto es, que $180^\circ - A$. Lo propio se verificará si la ascension recta de una estrella austral fuere entre $180^\circ + A$, y $360^\circ - A$; con esto se sabe si el arco *Z* ó *ET* ha de ser agudo ú obtuso, quiero decir, si se ha de hacer uso del arco hallado por la segunda analogía, ó si su suplemento para 180° es el verdadero valor de *ET*. Tambien manifestará el globo que este arco *ET* ó el valor de *Z*, hallado por las reglas antecedentes, solo sirve para las estrellas boreales, cuyas ascensiones rectas están en el primero y último quadrante del equador, y que se deberá tomar el suplemento para 12 signos, en los otros dos quadrantes. Por lo que mira á las estrellas cuya declinacion es austral, se ha de tomar el suplemento del valor de *Z*, en el primero y último quadrante, y añadir 6^s en los otros dos, para hallar el lugar del sol al tiempo de la aberracion *máxima*.

481 Propongámonos hallar, por egemplo, el punto de la aberracion máxima en declinacion para una estrella que tuviese 60° de ascension recta, y 66° de declinacion boreal. Como la longitud del punto de la eclíptica correspondiente á 60° de ascension recta, es $2^s\ 2^\circ\ 6'$, y la declinacion del mismo punto es $20^\circ\ 37'$ boreal; la diferencia entre 66° y $20^\circ.\ 37'$ es $45^\circ\ 23'$, este es el arco *SM*. Despues haremos esta proporcion: el coseno de la declinacion del punto de la eclíptica $20^\circ\ 37'$, es al coseno de la

obli-

oblicuidad de la eclíptica 23° 28′, como el coseno de la diferencia hallada es al coseno de un arco que llamamos Y, y se halla ser de 46° 30.′ Despues diremos: el seno de este mismo arco Y, ó 46° 30′, es al coseno de la ascension recta de la estrella 60°, como el seno de la declinacion de la estrella 66° 0′ es al seno de 39° 2′; este es el arco Z de la eclíptica. Resta saber si habremos de usar el complemento ó el suplemento de este arco hallado; si esta estrella que tiene una declinacion boreal estuviese en el último quadrante de ascension recta, el mismo número hallado sería, sin quitar ni poner, la longitud que buscamos; pero porque no está en el último quadrante, y está al contrario en un caso que pide verificacion, haremos esta proporcion: el radio es á la tang. de 23° 28′, como la cotang. de la declinacion de la estrella 66° 0′, es al seno de un arco $A =$ 11° 9.′ Porque la ascension recta de la estrella propuesta está entre 11° 9′, y 168° 51′, esto es, entre A, y 180° $- A$, se debe tomar el suplemento del arco Z que hallamos de 39° 2′, y tendremos 4ˢ 20° 58′, longitud del sol al tiempo que la aberracion en declinacion es máxima en menos ó sustractiva, para dicha estrella.

482. La aberracion máxima en declinacion que se verifica quando el sol está en el punto T, es $\frac{20''. \operatorname{sen} MSL}{\cos LT}$ (474); pero del triángulo SLT rectángulo en L, sacamos $\cos TSL$ ó $\operatorname{sen} MSL = \operatorname{sen} LTS . \cos LT$ (III. 701); luego finalmente la aberracion máxima llega á ser $20''. \operatorname{sen} LTS$, ó $20''. \operatorname{sen} Y$.

Fig.

Fig. 483 Para determinar el lugar del sol al tiempo de la máxima aberracion en ascension recta, y la misma aberracion máxima, consideraremos primero los diámetros de la
82. elipse, y despues los círculos de la esfera. Sea *OHE* el círculo de latitud que pasa por el lugar medio *E* de la estrella; *AEB*, el círculo de declinacion; *LK*, el ege mayor de la elipse de aberracion que siempre es paralelo á la eclíptica, serán *A* y *B* los puntos donde la aberracion en ascension recta es nula. Si suponemos como antes que el círculo *KOL* esté dividido como la eclíptica (472), la ordenada *DAV* tirada por el punto *A* perpendicularmente al ege mayor *LDK* determinará el punto *V* donde está el sol quando la aberracion en ascension recta es nula. Las lineas *DV* y *DA* son como las tangentes de los ángulos *DEV*, *DEA*, y al mismo tiempo como el ege mayor de la elipse es al menor, esto es, como el radio es al seno de la latitud de la estrella (462); luego el seno de la latitud de la estrella es al radio, como la cotangente del ángulo en la estrella, es á la tangente del ángulo *DEV* ó del arco *LV* ó *KV*; esta es la distancia entre el lugar de la estrella señalado en *K* (472), y el lugar del sol al tiempo que la aberracion en ascension recta es nula.

Si al diámetro *AB* tiramos un diámetro conjugado *MN*, los puntos *M* y *N* serán los puntos donde la aberracion en ascension recta es máxima; porque la tangente en *N* es paralela á *AB*; por consiguiente el punto *N* de la elipse es de todos los puntos de esta curva el que mas dis-

ta

ta de la línea *AB* ó del círculo de declinacion que pasa por Fig.
el lugar medio *E* de la estrella. Si se tira la ordenada *CNF*, el punto *C* indicará el lugar del sol quando la aberracion en ascension recta es máxima, y como por la propiedad (69) de la elipse el ángulo *VEC* es recto, síguese que el lugar *C* del sol al tiempo de la aberracion máxima en ascension recta dista 90° del punto *V* que es el lugar del sol al tiempo que era nula.

484 La perpendicular *NG* tirada desde el punto *N* á la linea *AG* es la aberracion máxima en ascension recta, medida en la region de la estrella. $NG \times AE = LE \times EH$ (70), ó $AE : LE$ ó $EV :: EH : NG$; luego $\frac{AD}{EV} : \frac{AD}{AE} :: EH : NG$; pero $AD : EH :: DV : EO$; luego $\frac{DV}{EV} : \frac{AD}{AE} :: EO : NG$; esto es, el seno del arco *LV* es al coseno del ángulo de posicion *OEA*, como $20''$ son á la aberracion máxima en ascension recta. El arco *OV* es la distancia del punto *O*, donde la aberracion en longitud es nula, al punto *V* donde está el sol quando la aberracion en ascension recta es nula.

Si la estrella estuviere en otro punto de su elipse, qual es *S*, *SP* perpendicular á *AEB* será la aberracion de ascension recta. Se tirará una ordenada *SR* al diámetro *AB*, de modo que sea paralela á *MN*, la razon entre *SR* y *SP* es constánte, y la ordenada *SR* de la elipse es la proyeccion de una ordenada *QT* al círculo (475); luego yá que *SR* tiene una razon constante con *SP* y *QT*, tambien será constante la razon entre *SP* y *QT* que es el seno del arco *QV*; luego la aberracion en ascension recta *SP* es

Fig. como el seno de la distancia *QV* del sol al lugar donde se hallaba quando la aberracion en declinacion era nula; y la aberracion máxima multiplicada por el seno del argumento anuo (458), dará la aberracion actual en ascension recta.

485 Se puede sacar una espresion mas sencilla de la aberracion máxima en ascension recta con hacer uso del ángulo *M* que forma la eclíptica con el meridiano
81. que pasa por la estrella. El punto *M* es el lugar donde se halla el sol quando la aberracion en ascension recta es máxima; porque del triángulo *SLM* rectángulo en *L*, se saca esta proporcion : *R* : sen *SL* :: tang *MSL* : tang *ML* (III.702), que viene á ser la misma de antes (483). *L* es el lugar del sol quando la estrella está en conjuncion, y la aberracion en longitud es máxima; así, *ML* es igual á la diferencia de los puntos donde estas dos aberraciones son nulas; por consiguiente hallaremos la aberracion máxima en ascension recta (484) $= \frac{20''. \cos MSL}{\cos ML}$ en la region de la estrella, y $\frac{20''. \cos MSL}{\cos ML . \cos SA}$ sobre el equador (54). Pero del triángulo *MSL* rectángulo en *L*, sacamos $\cos MSL = \text{sen } M . \cos ML$ (III.701); luego con substituir este valor sacaremos $\frac{20''. \text{sen } M}{\cos SA}$ que será la espresion de la aberracion máxima en ascension recta. El ángulo *M* es facil de hallar, porque en todas las tablas astronómicas se encuentra el ángulo que la eclíptica forma con el meridiano respecto de cada punto *M*.

486. Finalmente, el que quisiere determinar la mis-

ma

ma cantidad sin valerse del ángulo *M*, deberá considerar que del triángulo esférico *EAM* rectángulo en *A*, se saca (III.701) *R* : sen *M* :: cos *AM* : cos *E*; luego en lugar de sen *M* se puede substituir $\frac{\cos E}{\cos AM}$ ó $\frac{\cos 23°}{\cos \text{decl.} M}$, y con esto sacará que la aberracion máxima en ascension recta es $\frac{20''. \cos 23°}{\cos \text{decl.} S . \cos \text{decl.} M}$. Esta aberracion máxima multiplicada, como todas las demás, por el coseno del argumento anuo de aberracion en ascension recta (458), será la aberracion actual para un instante dado. Fig.

487. El lugar del sol al tiempo de la aberracion máxima en ascension recta (483) tambien se puede hallar sin cálculo alguno por la tabla XVIII de las Tablas Astronómicas que publicaremos en el Tomo X de este Curso, cuya tabla señala la diferencia entre la longitud y la ascension recta del sol para cada punto de la eclíptica, de donde se puede inferir respecto de cada punto del equador. El punto *A* señala la ascension recta de la estrella *S*, el punto *M* señala el lugar de la eclíptica donde se halla el sol quando la aberracion en ascension recta es máxima. Así, para determinar este punto *M* basta tomar la diferencia entre *EA* y *EM*; se añade á la ascension recta en el primer y tercer quadrante de ascension recta, se resta en el segundo y quarto quadrante, y queda determinada la longitud del punto *M* donde está el sol quando la aberracion en ascension recta es máxima; esta cantidad que se ha de añadir á la ascension recta de la estrella nunca pasa de $2° 28' 25''$.

Con

488 Con la mira de dar un egemplo de las reglas antecedentes, añadiremos aquí una tabla en que vá señalado respecto de las diez principales estrellas del cielo, el lugar del sol al tiempo que las aberraciones sustractivas son máximas, y las cantidades de las máximas aberraciones para el año de 1750.

Nombres de las estrellas.	Lugar del sol al tiempo de la aberracion máxima en ascension recta para 1750.			La aberracion máxima en ascension recta.		Lugar del sol al tiempo de la aberracion máxima en declinacion.			La aberracion máxima en declinacion.
Estrella polar.	0^s	11°	38′	8′	38″ 4	3^s	8°	48′	19″ 9
Aldebaran.	2	7	10	0	20, 6	1	6	46	3, 8
La Cabra.	2	15	43		28, 5	5	1	36	8, 1
Sirio.	3	7	48		20, 8	6	3	45	12, 8
Régulo.	4	26	28		19, 3	10	25	3	6, 8
La Espiga de Virgo.	6	19	30		18, 6	6	25	14	7, 6
Arcturo.	7	33	15		20, 1	5	0	55	12, 4
Antares.	8	5	24		21, 8	8	29	40	3, 9
La Lira.	9	6	33		25, 5	0	5	1	17, 6
El Aguila.	9	22	48		19, 9	0	6	37	10, 3

489 Quando se quisiere averiguar la aberracion actual para un dia dado, se buscará el lugar del sol, se restará del lugar de la aberracion máxima, para inferir el argumento anuo; el coseno de este argumento multiplicado por la aberracion máxima, qual vá señalada en la tabla antecedente, dará la aberracion que se buscare. Será sustractiva siempre que el argumento anuo estuviere entre 0^s y 3^s, ó entre 9^s y 12^s, será aditiva entre 3 y 9 signos (458).

De

Fig.

De la Nutacion.

490 La *Nutacion* ó *Deviacion* es un movimiento aparente de 9'' observado en las estrellas fijas, cuyo período es de 18 años.

491 Para que se entienda mejor lo que acerca de este punto llevamos ánimo de declarar, prevenimos, y lo probaremos á su tiempo, que todos los planetas se atrahen unos á otros, siendo mayor el efecto de esta atraccion, con tal que no varien las demás circunstancias, quando el planeta atrahido está á menor distancia del planeta atrayente.

492 El influxo que, segun consta de las observaciones, tiene la proximidad de la luna respecto de la tierra en la deviacion, nos obliga tambien á prevenir, conforme lo declararemos muy por menor mas adelante, que la orbita en que se mueve la luna al rededor de la tierra corta la eclíptica en dos puntos, y forma con ella un ángulo de 5.° Los dos puntos de esta interseccion se llaman *los Nudos de la luna*, llamándose *Nudo ascendiente* el punto donde la luna atraviesa la eclíptica para acercarse al norte. Muévense los nudos de la luna al rededor de la eclíptica con un movimiento retrogado que dura 19 años, hallándose al cabo de este tiempo el nudo ascendiente en el mismo punto de la eclíptica donde estaba quando se empezó este período.

493 Una vez que la orbita lunar forma con la eclíptica un ángulo de 5°, la mayor latitud de la luna no puede

pa-

Fig. pasar de 5.° Por consiguiente, como la mayor distancia de la eclíptica al equador es de 23° $\frac{1}{2}$, quando el nudo ascendiente de la luna estuviere en el equinoccio de la primavera, la luna se apartará del equador en su mayor digresion, 28° $\frac{1}{2}$. Pero quando el nudo ascendiente estuviere en el equinoccio del otoño, la luna en su mayor latitud estará entre la eclíptica, y el equador á 5° del primer círculo, y por consiguiente á la distancia de 18° $\frac{1}{2}$ *del equador.*

494 Observó Bradley quando indagaba los fenómenos y la causa de la aberracion, que la variacion anua en declinacion de las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios era mayor de lo que prometia la precesion de los equinoccios suponiendola de 50,″ y calculada por el método comun (400); la estrella η de la Osa mayor se hallaba en el mes de Septiembre de 1728, 20″ mas al sur que el año antes, siendo así que no debia estar mas que unos 18.″ Y en general, la declinacion de las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios habia variado unos 2″ mas de lo que correspondia á la precesion media de los equinoccios, que está muy bien averiguada, y la de las estrellas inmediatas al coluro de los solsticios, habia variado menos de lo que debiera.

495 En el año de 1727 el nudo ascendiente de la luna se confundia con el equinoccio de la primavera, de modo que la luna se apartaba del equador en sus latitudes máximas 28° $\frac{1}{2}$; en el año de 1736 el nudo ascendiente se halló en el equinoccio de Libra, y la luna no podia apar-

tar-

társe del equador mas que $18^\circ \frac{1}{2}$, por manera que su orbita distaba del equador 10° mas en 1727 que en 1736. Fig.

Observó Bradley en el año de 1727, por medio de la variacion de la declinacion de las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios, que la precesion de los equinoccios (494) era mayor que la media, y sin embargo de esto las estrellas inmediatas al coluro de los solsticios parecia que se movian de un modo contrario á los efectos de este incremento. En las estrellas opuestas en ascension recta se esperimentaba lo mismo; γ del Dragon, y la 35^a del Camaleopardo habian padecido la misma variacion de declinacion, la una ácia el norte, la otra ácia el sur. Estos fenómenos se componian grandemente con una nutacion del ege de la tierra, que debe causar la misma diferencia en las estrellas opuestas en ascension recta.

496 Por el año de 1732, el nudo de la luna habia retrocedido hasta el solsticio de invierno, entonces las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios variaron en su declinacion lo que pedia la precesion de $50''$. En los años siguientes, esta variacion menguó hasta el de 1736, hallándose otra vez el nudo ascendiente en el equinoccio de Libra.

La declinacion de las estrellas inmediatas al coluro de los solsticios varió desde 1727 hasta 1736, $18''$ menos de lo que correspondia á la precesion de $50''$; por manera que el ege de la tierra ó el polo del mundo habia esperimentado una nutacion de $18''$ en el discurso de una media re-

Fig. revolucion de los nudos de la luna. En el año de 1745, al cabo de 18 años, vueltos los nudos á su primera situacion, las estrellas volvieron á parecer en los mismos puntos, atendiendo á la precesion de los equinoccios; observáronse los mismos fenómenos que en 1727, y se confirmó Bradley en que todas las apariencias referidas procedian de una nutacion en el ege terrestre.

497 Para esplicar así la nutacion como *la variacion* de la precesion, discurrió Machin, Secretario de la Real Sociedad de Londres, que bastaba suponer que el polo de la tierra traza en el intervalo de una revolucion de los nudos de la luna, un circulillo de 18″ de diámetro; esta hypótesi esplica con efecto la variacion de la precesion anua, qual la manifestaban las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios, y la nutacion del ege de la tierra, conforme la manifiestan las estrellas inmediatas al coluro de los solsticios.

83. Sea *E* el polo de la eclíptica; *P*, el polo del equador que dista del primero 23° $\frac{1}{2}$, y al rededor del punto P un circulillo, cuyo radio *PB* sea de 9.″ En lugar del punto *P* que es el lugar medio del polo, se supone que el verdadero polo esté en *A* quando el nudo está en el equinoccio de la primavera sobre el coluro de los equinoccios *P*♈, y que prosigue moviéndose desde *A* ácia *B* del mismo modo que el nudo; de suerte que quando el polo está en *O* el arco *AO* sea igual á la longitud del nudo de la luna. El lugar del polo verdadero siempre estará 3 signos mas adelan-

lantado *en* ascension recta en el círculo *ABC* que el lugar del *nudo* de la luna en la eclíptica, y el polo estará en *D* quando el nudo estuviere en ♋. Una vez que el polo retrocede de *A* á *B* es preciso se acerque á las estrellas que están en el coluro *PB*♈ de los equinoccios; por manera que la precesion parecerá mayor, causando en las estrellas que están en el coluro de los equinoccios, una variacion de declinacion 9″ mayor de lo que debiera, y la ocasionará en el intervalo de 4 años 8 meses que gastará el nudo para venir desde Aries á Capricornio, y el polo en venir de *A* á *B*; al mismo tiempo parecerá que el polo se habrá acercado á las estrellas que están ácia el solsticio de invierno ó del lado de *E*; y estas son con efecto las circunstancias que Bradley observó. Fig.

498 El primer efecto general de la nutacion, el mas facil de percibir, es la variacion de la oblicuidad de la eclíptica; este ángulo crece 9″ quando el nudo ascendiente de la luna está en Aries, porque entonces el polo está en *A*, y la distancia de los polos *EA* es 9″ mayor que quando el nudo está en Libra.

Quando el polo de la tierra ha llegado desde *A* á *O* la oblicuidad de la eclíptica es *EO* ú *EH*, y la nutacion es igual á *PH*; el arco *AO* ó el ángulo *APG* es igual á la longitud del nudo; y *PH* es su coseno. Pero $PH = 9''$. sen *OB*, ó $9''$. cos *AO*; luego la nutacion $PH = + 9''$. cos nudo, ó 9″ multiplicados por el coseno de la longitud del nudo de la luna. Esta nutacion se debe restar de la oblicui-

Fig. cuidad media ó uniforme, quando el nudo de la luna está entre 3 y 9 signos; se añade en el primero y último quadrante de la longitud del nudo.

499 La nutacion tambien muda las longitudes, las ascensiones rectas y las declinaciones de los astros; pero no altera las latitudes, por estar inmobil la eclíptica en la teórica de la nutacion. El cálculo de todas estas variaciones se puede esplicar de dos modos. Empezaremos dando un método nuevo, y mas sencillo que el del circulillo de que se valía Bradley.

83. Sea *MLQ* la eclíptica inmobil; *Q*, el punto del solsticio; *QZ*, la oblicuidad de la eclíptica; *MRN*, el equador; *M*, el punto equinoccial; *K*, un astro cuya declinacion es *KT*, y la ascension recta *MT*. Supongamos que por efecto de la nutacion el equador *MN* se ponga en la situacion *LN*, de manera que el punto equinoccial esté en *L*, y *ML* sea la variacion de la precesion en longitud, á lo largo de la eclíptica; la estrella *K*, en vez de corresponder perpendicularmente al punto *T* del equador, corresponderá á otro punto *V* en donde vendrá á caer el arco perpendicular *KV* del círculo de declinacion, *LV* será la ascension recta aparente, y *KV* la declinacion aparente de la estrella.

La oblicuidad de la eclíptica *QZ* llega á ser igual con *QI*, quando el equador se pone en la posicion *LNI*; conforme á las observaciones, la oblicuidad de la eclíptica es la máxima quando el nudo ascendiente de la luna está en el equinoccio de primavera (498), la equacion es nu-

nula quando el nudo está en los solsticios, ó el punto *N* Fig. está en *Z* (la ascension recta del punto *N* es igual con la longitud del nudo de la luna) la nutacion *IZ*, ó la variacion de la oblicuidad de la eclíptica, medida en el coluro de los solsticios *SZI*, es igual á 9″ multiplicados por el coseno de la longitud del nudo de la luna, ó 9″ sen *NZ* (498); esta es la proporcion que Bradley notaba por la variacion de declinacion que las estrellas inmediatas al coluro de los solsticios habian experimentado en el discurso de los 19 años. Caminando en este supuesto hemos de hallar el efecto que de él resulta en las longitudes, las ascensiones rectas y las declinaciones.

500 Una vez que $IZ = 9''$ sen *NZ*, el ángulo *N* es de 9″, el arco *LR* será 9″ sen *NR* (54); el triangulillo *MLR* dá $R : LM ::$ sen $M : LR$ ó $LM = \frac{LR}{\text{sen } M}$ $= \frac{9''. \text{ sen } NR}{\text{sen } M}$; quiero decir, que la variacion del punto equinoccial á lo largo de la eclíptica, ó la nutacion en longitud es de 9″ multiplicados por el seno de la longitud del nudo de la luna, y divididos por el seno de la oblicuidad de la eclíptica; pero $\frac{9''}{\text{sen } 23^\circ} = 23''$; luego tambien es igual á 23″ sen. long. ☊. Esta nutacion alcanza tambien á los puntos equinocciales, desde los quales se cuentan las longitudes, y por esta razon se debe llevar en cuenta en los cálculos de todos los planetas, quando se quieren hacer con alguna exactitud. En el tomo X de este Curso daremos una tabla de esta nutacion, que será la VII de las del sol, bien que no es mas que de 16″ 8.

Fig. 501 La nutacion en ascension recta, ó la diferencia entre la ascension recta media *MT*, y la ascension recta aparente *LV* proviene de dos causas, y se debe componer de dos partes, *MR* y *VX* ó *TY*; la primera parte *MR* es lo que sale de su lugar el equador ó la variacion del punto equinoccial contada en el mismo equador; pero $MR = LR \text{ tang } MLR = \frac{LR}{\text{tang } M} = \frac{9''.\ \text{sen } NR}{\text{tang } M}$, esto es, $9''$ multiplicados por el seno de la longitud media *del nudo, y* divididos por la tangente de la oblicuidad de la eclíptica. Esta primera parte de la nutacion es comun entre todos los astros, pues alcanza al mismo punto equinoccial, esto es, al punto desde donde se cuentan todas las ascensiones rectas.

502 La segunda parte *VX* ó *TY* de la nutacion en
83. ascension recta proviene de la situacion del astro *K* ó del punto *T*, porque dicha nutacion sería nula si el arco *VX* fuera paralelo al arco *YT*, conforme sucede á 90° de la interseccion *N*, ó á 90° del nudo, por confundirse en este caso los arcos perpendiculares *KT* y *KY* uno con otro. Si concebimos tiradas en los puntos *T* é *Y* dos tangentes á los arcos *TK* y *TY*, y en los puntos *V* é *Y* otras dos tangentes á los arcos *VN* é *YN*, las dos primeras formarán una con otra el mismo ángulo que las dos últimas, por ser perpendiculares una á otra en *V* y en *T*, y las dos primeras tangentes formarán con su concurso al encontrar la secante ó la prolongacion del radio de la esfera tirado por el punto *K*, un triángulo semejante al de las otras dos tangentes, en el punto donde encuentran el radio que pasa

por

por el punto N; luego por tener los triángulos semejantes Fig.
proporcionales sus lados, sacaremos esta proporcion: TX es á la tangente del arco TN, como TY es á la tangente del arco TK, luego $TY = \frac{TX.\text{tang}\,TK}{\text{tang}\,TN} = \frac{9''.\,\text{sen}\,TN.\text{tang}\,TK}{\text{tang}\,TN} = 9''.\,\text{tang}\,TK.\cos TN$, esto es, $9''$ multiplicados por la tangente de la declinacion del astro de que se trata, y por el coseno de su distancia al punto N que corresponde al nudo de la luna, ó de la ascension recta del astro menos la longitud del nudo de la luna.

503 La nutacion en declinacion es TX, porque TX es la diferencia entre la declinacion media KT, y la declinacion actual y aparente KV ó KX. Pero esta nutacion $TX = N.\,\text{sen}\,TN$ (54), esto es, $9''$ multiplicados por el seno de la diferencia entre la ascension recta del astro y la longitud del nudo.

504 Estas mismas fórmulas se encuentran tambien con el circulillo de Bradley. El coluro de los solsticios ó el círculo EPA puede tambien servir para contar las 83.
longitudes, del mismo modo que el coluro de los equinoccios, pues siempre está de este á la distancia de 90°, y las longitudes contadas desde los solsticios solo se diferencian de las que se cuentan desde el equinoccio, en que las primeras son 3 signos menores que las segundas; por consiguiente quanto diremos acerca de las longitudes de los astros contadas desde el coluro de los solsticios E♋, se verifica igualmente respecto del círculo EM que vá ácia el equinoccio, desde el qual

Fig. es costumbre contar las longitudes. Quando el polo del equador está en O, el coluro de los solsticios está sobre EO, pues la situacion de los dos polos E y O es la que determina la posicion del coluro; luego un astro qualquiera S, cuya longitud media contada desde el coluro de los solsticios era el ángulo PES, quando el coluro estaba sobre EPA, tendrá por longitud actual y aparente el ángulo OES menor que el primero la cantidad AEO. Es, pues, el ángulo AEO una equacion que se debe restar de la longitud de todos los astros para determinar su longitud contada desde el verdadero coluro EO; esta es la nutacion en longitud. El arco AO del circulillo de nutacion es igual á la longitud del nudo de la luna (497), cuyo seno es HO; luego $HO = 9''$. sen nudo. Para determinar el ángulo HEO, basta dividir el arco HO por el seno de EH (54); luego el ángulo $AEO = \frac{9''.\ \text{sen nudo}}{\text{sen } 23^\circ \frac{1}{2}}$, esto es, $9''$ multiplicados por el seno de la longitud del nudo, y divididos por el seno de la oblicuidad de la eclíptica. Esta equacion se debe restar de la longitud media de los astros siempre que el nudo de la luna está en los seis primeros signos de su longitud, y se debe añadir en los seis últimos, para sacar la longitud actual y aparente. En las tablas del sol que publicaremos en el Tomo X, hay una tabla de esta equacion, pero al formarla se ha hecho uso del suplemento de la longitud del nudo, y no del nudo mismo para sacar la equacion.

505 Esta equacion de la longitud es la misma para to-

todos los astros; pero la de la ascension recta varía igualmente que la nutacion en declinacion. Sea S una estrella cuya ascension recta media es SPE; la distancia media al polo, igual á PS, complemento de la declinacion media; SOE, la ascension recta aparente, contada desde el coluro de los solsticios OE; SO, el complemento de la declinacion aparente; OPS ú OPF, la diferencia entre la ascension recta de la estrella, y la del polo O, que es igual á la longitud del nudo despues de añadirla 3 signos (497). Si suponemos un arco chico OF perpendicular al círculo de declinacion PFS, tendremos $SF = SO$; será, pues, PF la cantidad que ha crecido la declinacion de la estrella; pero $R : 9'' :: \cos OPF : PF$, luego la equacion de la declinacion será $9''$ multiplicados por el seno de la ascension recta de la estrella, de la qual se ha restado la longitud del nudo; porque dicho ángulo es el complemento del ángulo SPO. Esta nutacion en declinacion se añade á la declinacion media para sacar la declinacion aparente, quando su argumento no pasa de 6 signos; se resta en los 6 últimos. Lo contrario se practica respecto de las estrellas cuya declinacion es austral (503). Fig. 83.

506. Para calcular la nutacion en ascension recta; se ha de sacar la diferencia entre el ángulo SOE y el ángulo SPE. Pero el ángulo SOE que es la ascension recta aparente de la estrella S contada desde el coluro de los solsticios OE se compone de dos porciones, ambas variables; porque la forman dos círculos que mudan ambos de posi-

Fig. cion, referiremos cada uno de estos círculos á círculos fijos, buscaremos separadamente las dos variaciones, y su diferencia dará el ángulo *SOE*. Las dos porciones variables son el ángulo *GOE*, y el ángulo *SOG*; la primera parte *GOE*, que proviene de la mudanza del uno de los círculos variables *OE*, solo pende de la situacion del nudo ó de la del polo *O*; la segunda *SOG* pende del ángulo *SPG* que es la diferencia entre la ascension recta de la estrella y el lugar del polo *O*. Imaginaremos que por el polo de la eclíptica *E* y la estrella *S* pase un círculo de latitud *ESG*, y resultará un triángulo esférico *EPG* que se transforma en *EOG*, siendo unos mismos el lado *EG* y el ángulo *G*, y variable lo demás. Con esto hallaremos que la pequeña variacion *PO* del lado adyacente al ángulo constante *G* es á la pequeña variacion del ángulo opuesto al lado constante *EG*, como la tangente del lado *EP* opuesto al ángulo constante es al seno del ángulo *EPG* opuesto al lado constante (III. 709. C.); por lo mismo diremos, tang $23^\circ \frac{1}{2}$: sen *EPO* :: $9''$: x, y será x la diferencia entre el ángulo *GOE*, y el ángulo *GPE* que se forma en el polo medio. Esta es la variacion que la nutacion *PO* ha causado en el ángulo *GPE*, y será la primera parte de la nutacion que buscamos comun á todos los astros, sean estrellas ó planetas; es la cantidad que se debe añadir á todas las ascensiones rectas contadas en el polo medio. Esta primera parte se resta de la ascension recta media en los seis primeros signos de la longitud del nudo, y se añade en los otros seis.

Por



507 Por el mismo camino hallaremos la variacion Fig.
que la nutacion ocasiona en la otra parte de la ascension 83.
recta *SPE*; quiero decir, en el ángulo *SPG*, que llega á ser *SOG* por causa de la nutacion. Esta pequeña variacion se calculará por la misma analogía en el triángulo *SOG* cuyo ángulo *G* es constante, igualmente que el lado *SG*, mientras que *SP* se transforma en *SO*. Diremos, pues (III. 709. C.), tang *SP* : sen *SPG* :: $9''$: d*SPG*, esto es, la tangente del complemento de la declinacion es al coseno de la distancia entre la estrella y el lugar del nudo, como $9''$ son á la cantidad que el ángulo *SPG* debe variar para llegar á ser el ángulo *SOG*. Esta será la variacion del segundo ángulo, el qual forma con el precedente la ascension recta media *SPE* contada desde el coluro de los solsticios; será, pues, la segunda parte de la nutacion en ascension recta. Si tomáramos por argumento la ascension recta de la estrella menos la longitud del nudo, la equacion sería sustractiva en el primero y último quadrante del argumento, y aditiva entre 3^s y 9^s para hallar la ascension recta aparente. Lo contrario sucedería respecto de las estrellas cuya declinacion fuese austral, porque la tangente de la declinacion llega á ser negativa.

508 Esta segunda parte de la nutacion en ascension recta afecta los regresos del sol al meridiano, y es preciso llevarla en cuenta en el cálculo de la equacion del tiempo, que determinaremos mas adelante. La primera parte de la nutacion no tiene en esto influjo alguno, porque esta solo muda el

Fig. lugar de equinoccio, no muda el lugar del equador al qual un astro corresponde, y por lo mismo en nada altera el tiempo que gasta en volver al meridiano. Solamente le altera la segunda parte de la nutacion, haciendo que el astro corresponda á un punto físico del equador, qual es *V*, distinto del punto *T*, al qual corresponderia, siendo *VX* la diferencia. Esta es la razon por que pondremos esta parte de la nutacion en nuestras Tablas.

509 Todos los cálculos de nutacion que hemos hecho suponen que el polo traza un círculo. Sin embargo observó el mismo Bradley algunas apariencias que no concordaban con la teórica que dejamos declarada, y que los resultados de las observaciones de α de Casiopeya, y η de la Osa mayor, salian conformes á la teórica con suponer que el polo en lugar de un circulillo traza una elipse cuyo diámetro desde *D* á *B*, en la direccion del coluro de los equinoccios no fuese mas que de $16''$, y de 18 en la direccion del coluro de los solsticios. *Segun Mr. d'Alembert* el ege menor de esta elipse ha de ser respecto del mayor lo que el coseno de $23^{\circ} \frac{1}{2}$ es al coseno del duplo.

510 Hemos, pues, de hacer á las cantidades calcu-
84. ladas en las hypótesi del círculo una correccion que calcularemos por el método siguiente. Sea *E* el polo de la eclíptica; *P*, el lugar medio del polo del equador; *M*, el lugar verdadero del polo en la elipse *RQV*; *O*, su lugar en el círculo. Suponemos que el lugar *M* en la elipse está sobre la perpendicular *NMO*, y que la razon entre los eges *RP* y *PQ*

PQ sea la de $9''$ á $6''\ 7$, conforme se infiere de las fórmulas de Mr. d'Alembert, egecutando con cuidado las substituciones; *NM* está con *NO* en la misma razon; luego $9''$ son á $6''\ 7$, como la tangente de *NPO* ó de la longitud del nudo es á la tangente de *NPM* igual á la longitud del nudo corregida, y qual se debe usar en las fórmulas antecedentes. En conociendo el ángulo *NPM*, diremos: la secante del ángulo *NPO* es á la secante de *NPM*, como *PO* es á *PM*, ó lo que es mas acomodado, cos *NPM* : cos *NPO* :: *PO* : *PM*, porque las secantes están en razon inversa de los cosenos (I.650). Por consiguiente el lugar verdadero del polo en *M* se determina por el ángulo *RPM*, que se debe usar en lugar del ángulo *RPO*, y por la longitud *PM* que debe ser el fundamento de los cálculos de las equaciones antecedentes, en las quales hemos hecho uso de $PO = 9''$. Fig.

511 Por consiguiente para calcular la nutacion en la elipse se ha de disminuir la distancia de los polos, y substituir *PM* en lugar de *PO*; tambien se debe corregir la longitud del nudo, ó el ángulo *RPO*, quitando el ángulo *MPO*, que puede llegar á $8^{\circ}\ 26'$. Porque el ángulo *OPS* que nos 83. sirvió para calcular la nutacion (505) se debe corregir la misma cantidad, cuya correccion se halla por la analogía de antes (510); la correccion es nula quando el polo está en *A* ó *B*.

512. La nutacion en longitud en la elipse se calcula con facilidad; se multiplica la distancia de los polos *PM* por

Fig. por el seno del ángulo *NPM*, esto es, de la longitud del nudo corregida, y se divide el producto por el seno de *PE* $= 23^\circ \frac{1}{2}$; es de $16''\,8$ quando el nudo está en los solsticios, siendo de $6''\,7$ no mas la distancia de los polos; de este modo se ha calculado la nutacion en longitud en la elipse que se hallará en nuestras tablas.

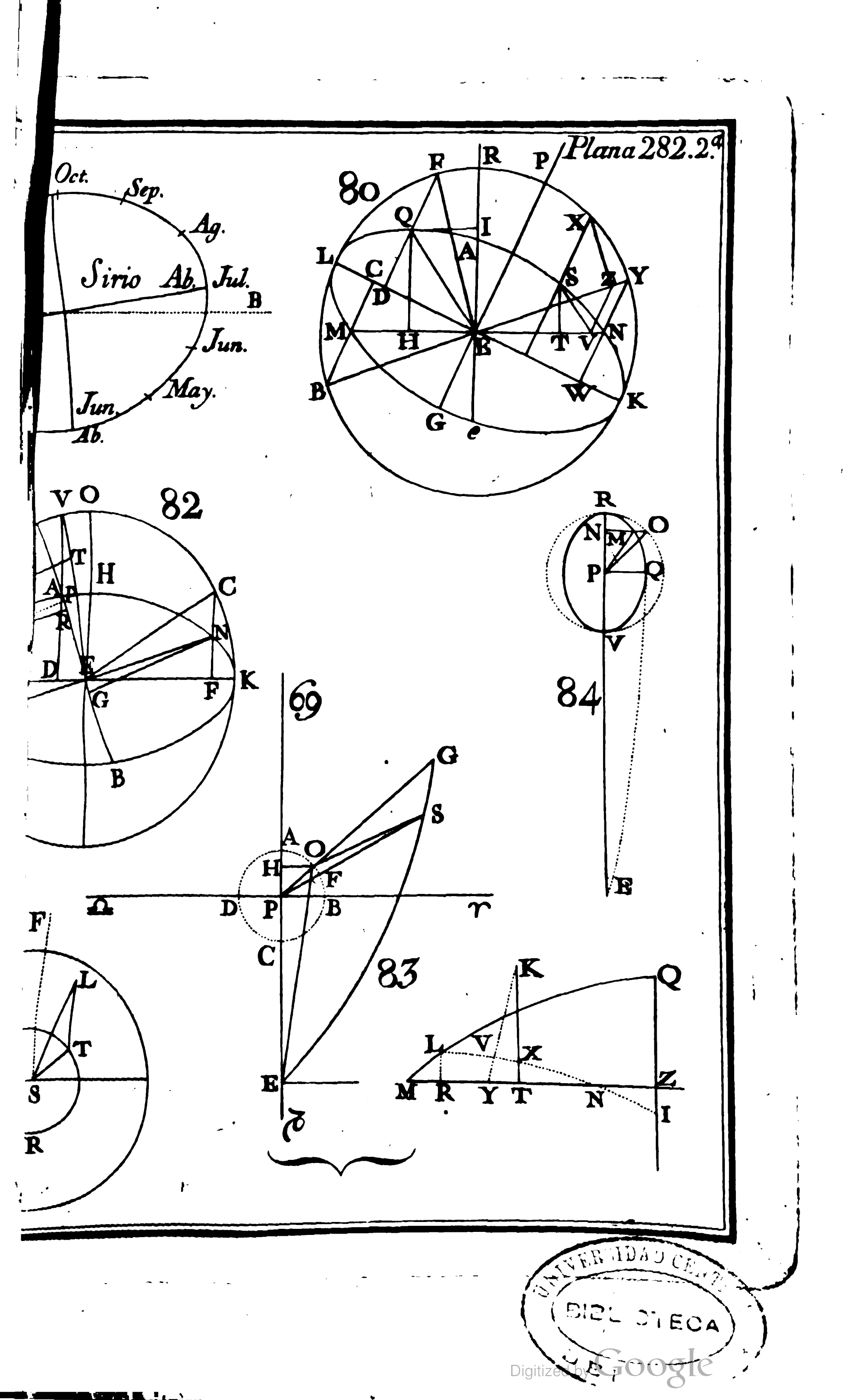
La primera parte de la nutacion en ascension recta en la elipse tambien se calcula haciendo uso de la tangente de $23^\circ \frac{1}{2}$ en lugar de su seno.

513 Para calcular la segunda parte de la nutacion en ascension recta en la elipse, se suma el logaritmo de la tangente de la declinacion de la estrella, con el de la distancia de los polos, y el del coseno de la diferencia entre la ascension recta de la estrella y la del nudo corregido.

514 La nutacion en declinacion se sacará multiplicando la distancia de los polos (510) por el seno de la ascension recta de la estrella menos la longitud del nudo corregida. Solo la tabla de la equacion de la oblicuidad de la eclíptica (498) no necesita correccion alguna; con efecto, sea que el polo esté en *O* ó en *M*, la oblicuidad de la eclíptica siempre es igual á *EN*.

515 Daremos un egemplo del cálculo de la nutacion en la elipse. El dia 10 de Julio de 1761, la longitud media del nudo de la luna era $1^s\ 27^\circ\ 26'$, se pregunta qual era la nutacion de Aldebaran, cuya ascension recta era de $65^\circ\ 34'$, y la declinacion de $16^\circ\ 1'$. Para responder, diremos: $9'' : 6''\,7 :: \text{tang}\ 57^\circ\ 26' : \text{tang}\ 49^\circ\ 22'$.

Es-


Plana 282.2ª
80
Oct.
Sep.
Ag.
Sirio
Ab.
Jul.
B
Jun.
May.
Jun.
Ab.
F
R
P
Q
I
A
X
L
C
D
S
Z
Y
M
H
E
T
V
N
B
W
K
G
e
82
V
O
T
H
A
P
R
C
N
D
E
K
G
F
B
R
N
M
O
P
Q
V
84
E
G
S
A
O
H
F
D
P
B
C
83
E
F
L
T
S
R
K
Q
L
V
X
M
R
Y
T
N
Z
I

Este es el lugar del nudo corregido, que se debe restar de la ascension recta de la estrella 65° 34′, y sacaremos el argumento 16° 12.′ Tambien diremos : cos 49° 22′: cos 57° 26′:: 9″ 0 : 7″ 4. Esta es la distancia del polo verdadero al polo medio. Fig.

Para sacar la nutacion en ascension recta, sumaremos el logaritmo de 7″ 4 con el logaritmo del seno de 49° 22′, y de la suma restaremos el logaritmo de la tangente de 23° 28′, y resultará el logaritmo de 13″ 0. Esta será la primera parte de la nutacion en ascension recta, que es sustractiva, porque el nudo está en los seis primeros signos. Hallaremos la segunda parte de la nutacion en ascension recta con sumar el logaritmo de 7″ 4 con el del coseno del argumento 16° 12′, y el de la tangente de la declinacion 16° 1′, la suma será el logaritmo de 2″ 1; esta será la segunda parte de la nutacion en ascension recta, que es sustractiva, porque el argumento está entre 3ˢ y 9ˢ, y la estrella es boreal; luego el total de la nutacion en ascension recta será — 15″ 1.

La nutacion en declinacion es el producto de 7″ 4 por el seno del argumento 16° 12′, esto es 2″ 1, aditiva á la declinacion media, porque el argumento 16° 12′ está entre 0 y 6 signos, y la estrella es boreal.

De todo lo dicho hasta aquí se infiere que por razon de la aberracion y nutacion han llegado á ser los cálculos de la Astronomía moderna de una proligidad capaz de aburrir á los calculadores, si no tuviesen el alivio de las Ta-

Fig. Tablas. En las que publicaremos en el Tomo X se hallarán las nutaciones de las estrellas de primera magnitud.

De la Paralaxe anua de las Estrellas fijas.

516 Todo quanto se observa en los Planetas desde la tierra debe referirse ó reducirse al sol que es el centro de sus movimientos. Como estamos á mucha distancia de éste astro, no vemos desde la tierra los planetas en el mismo lugar donde los veríamos si estuviéramos en el sol, y la longitud que desde la tierra observamos acerca de un planeta, siempre ó casi siempre es distinta de la que observaríamos desde el sol.

517 La diferencia que hay entre estas dos longitudes se llama *la Paralaxe de la grande orbita*, *la Paralaxe anua.* Para darla á entender, sea *S* el sol; *L*, el lugar de
85. un planeta en la eclíptica, y *T*, la tierra en su orbita *TNR*;
86. el ángulo *TLS* que forma la distancia *SL* del planeta al sol, con la linea *TL* tirada desde la tierra al lugar *L* del planeta trasladado á la eclíptica, se llama *la Paralaxe anua*, ó *la Paralaxe de la grande orbita.* Este ángulo *TLS* es la diferencia que vá de la longitud del planeta observado desde el sol á la longitud del mismo planeta observado desde la tierra. Porque si tiramos la linea *SF* paralela á *TL*, señalará en el cielo la misma longitud que la linea *TL* (245), esto es la longitud del planeta *L* observada desde la tierra; pero el ángulo *LSF* que es igual con su alterno *SLT*, es la diferencia entre la longitud que señala *SF*, y la longitud obser-

servada desde el sol, la misma que señala *LS*. Luego el Fig.
ángulo *SLT* ó la paralaxe anua es la diferencia que vá de la longitud observada desde la tierra, á la que hallaríamos si la observáramos desde el sol.

518 Los Astrónomos creyeron mucho tiempo que las estrellas tenian tambien una paralaxe anua; y aunque está yá demostrado que acerca de ellas la paralaxe anua es de todo punto imperceptible, no por esto hémos de dejar de dar noticia de una cuestion, que fue controvertida tanto tiempo, y demostraremos con novedad la ley de las variaciones que de esta paralaxe deberian resultar en las apariencias de las estrellas.

Sea *S* el sol; *AB*, el diámetro de la grande orbita que 87.
la tierra anda en el discurso de un año; *A*, el punto donde se halla la tierra el dia primero de Enero; *B*, el punto donde se halla el dia primero de Julio; *E*, una estrella que vemos en el radio *AE*; como la linea *AB* está en el plano de la eclíptica, si imaginamos la orbita terrestre perpendicular al plano de la figura, de modo que no veamos mas que su grueso, el ángulo *EAB* será la latitud de la estrella. Pero llegada que sea la tierra á *B*, estando la estrella en oposicion respecto del sol, la veremos en el rayo *BE*, y su latitud aparente será el ángulo *EBC*. Esta latitud *EBC* es mayor que la primera, y la diferencia que vá de una á otra es el ángulo *AEB*. Finalmente, el ángulo *AES* que es sensiblemente la mitad de *AEB*, por ser *AB* estremadamente pequeña, es la paralaxe anua en latitud.

Si

Fig. 519 Si la distancia *SE* de la estrella fija fuese doscientas mil veces mayor que la distancia *SA* del sol á la tierra, el ángulo *AES* será de $1''$, y la latitud *EAS* de una estrella en conjuncion será $2''$ menor que la latitud *EBC* de la estrella observada en su oposicion, suponiendo que la latitud de la estrella sea con corta diferencia de 90°. Para que la latitud de las estrellas parezca una misma en todos los tiempos del año, á pesar del *movimiento* de la tierra, es preciso que la distancia de las estrellas sea tan grande, que la orbita de la tierra no tenga con ella ninguna razon sensible, y sea el ángulo *AES* como infinitamente pequeño.

520 Si la estrella que está del sol á la distancia *SE*, estuviera en el polo *P* de la eclíptica, y á la misma distancia $SP = SE$, su paralaxe sería *SPA*. Llamemos *p* esta paralaxe absoluta que es la mayor de todas, y averiguemos qué efectos causará en otras posiciones.

521 Hallándose la estrella en *E*, en el plano *EABC* de un círculo de latitud perpendicular á la eclíptica, y la tierra en *A*, la paralaxe de latitud *SEA* será $= p$. sen *EAS* (17), pues su medida es la perpendicular *SX*, quiero decir, que es igual á la paralaxe absoluta multiplicada por el seno de la latitud de la estrella, en el supuesto de ser *AS* estremadamente pequeña respecto de *AP*. Por consiguiente el efecto máximo de la paralaxe en latitud, ó la paralaxe en latitud, quando tiene por base el radio *SA* de la orbita terrestre, es *p*, sen lat. Esta paralaxe hace que la es-

estrella siempre parezca mas inmediata á la eclíptica, y disminuye su latitud quando la estrella *E* está en conjuncion con el sol. Fig.

522 Si concebimos que la tierra dá vueltas al rededor de su orbita, cuyo diámetro es *AB* y el plano *ATB* es perpendicular al plano de la figura y al plano del triángulo *EAB*, nos haremos cargo de que estando la tierra en *T* á 90° del punto *B*, corresponderá encima del punto *S* perpendicularmente al plano de la figura; quiero decir, que teniendo el ángulo *EAS* su vértice en *T*, á igual distancia del punto *E* que el punto *S*, el ángulo *EAC* será igual á *ESC*, ó la latitud aparente igual con la verdadera. Luego no hay paralaxe de latitud quando la estrella *E* está en quadratura, esto es, quando está á 90° de distancia del sol á lo largo de la eclíptica, tres meses despues de la conjuncion ú oposicion.

523 Hemos supuesto que el punto *T* y el punto *S* están á la misma distancia del punto *E*, esto es, que la linea *TS* es igualmente perpendicular á los dos rayos visuales, que ván á parar á la estrella *E* desde los dos puntos *T* y *S*. Pero es patente que la suma pequeñez de *ST* respecto de *SE*, hace que el error es todavia menor sin comparacion que la paralaxe; por manera que lo mismo tiene suponer la tierra en la circunferencia *T*, ó en el punto *S* del diámetro al qual la tierra corresponde perpendicularmente. Para evidenciarlo, basta considerar que si *EB* es la seccion comun de los dos planos, de los quales el uno pasa por los pun-

Fig. puntos E y S, y el otro por los puntos E y T, correspondiendo siempre el punto T perpendicularmente al punto S, el seno del ángulo en S, ó de la latitud observada desde el punto S sería $\frac{EB}{ES}$, y el del ángulo en T sería $\frac{EB}{ET}$; pero ET es mayor que ES, del mismo modo que la hypotenusa de un triángulo es mayor que el lado, ó como el radio es mayor que el coseno, es á saber, un infinitamente pequeño de segunda orden, si TS es un infinitamente pequeño de primera orden (48); luego las latitudes observadas desde el punto T ó del punto S son unas mismas.

524 Por la misma razon la latitud de la estrella es una misma, sea que la observemos desde el punto D ó desde el punto F. Así, quando la tierra correspondiere al punto F, la linea SF será el seno de la distancia de la tierra al punto T de la quadratura, y SF será la base de un ángulo igual al ángulo SEF, que es la paralaxe de latitud. Luego la paralaxe de latitud es proporcional al seno de la distancia de la tierra á la quadratura, que tambien es el coseno de la distancia de la estrella á su conjuncion con el sol; por manera que es máxima, y es mínima su variacion en las conjunciones y oposiciones. Si llamamos L la latitud de la estrella; E, su elongacion ó la longitud de la estrella menos la del sol, hallaremos la paralaxe en latitud para un momento dado, p. sen L. cos E. Se la añade á la latitud verdadera para sacar la aparente todo el tiempo que la estrella está mas cerca de la oposicion que de la conjuncion, ó está el valor de E entre 3 y 9 signos. Por consiguiente en conociendo la paralaxe

má-

máxima en latitud, que es (521) p. sen L, basta multiplicarla por el coseno de la elongacion, para sacar la paralaxe actual de latitud para un momento dado. Fig.

525 Por los mismos principios y con igual facilidad determinaremos la paralaxe de longitud. Consideraremos primero una estrella E situada en el mismo plano de la eclíptica ó de la orbita de la tierra $AFBG$. Sea ABC la linea 88.
desde donde se cuentan las longitudes; el ángulo ESC, la longitud de la estrella E observada desde el sol S; si la paralaxe absoluta fuese de $1''$, la longitud de la estrella parecerá $1''$ menor en la primera quadratura, estando la tierra en A, y $1''$ mayor en la quadratura siguiente, estando la tierra en B. Si la paralaxe AES, cuya base es el seno total AS, llega á tener despues por base el seno DH, estando la tierra en D, menguará en la misma proporcion; será, pues, la paralaxe en longitud p. sen E. Luego si traza- 89.
mos un semicírculo HIK, cuyo semidiámetro CK sea de $1''$, y tomamos el arco ID igual á la elongacion de la estrella, el seno LD ó la porcion CM del radio será la paralaxe de longitud.

526 Si la estrella, en vez de hallarse en el plano mismo de la eclíptica, estuviere elevada respecto de dicho plano, se bajará una perpendicular de la estrella al plano, y se considerará el punto E donde rematare la perpendicular; se dirá del punto E lo propio que de la estrella, y 88.
padecerá esta las mismas apariencias que el punto E, por lo tocante á la longitud refiriéndola á la eclíptica. Pero si qui-

Fig. siéramos averiguar el efecto de la paralaxe en la region de
90. la estrella, sea O el lugar verdadero de la estrella que hemos de concebir levantado respecto de la figura ó del plano de la eclíptica, y como que corresponde perpendicularmente al punto E donde vá á parar la perpendicular OE; la
88. distancia SE que es la misma que en la otra figura, es menor que la distancia verdadera absoluta SO de la estrella, en la razon del coseno de la latitud ó del ángulo ESO al seno total. Luego la paralaxe de la estrella O considerada de occidente á oriente, será menor que la paralaxe del punto E; pero seguirá la misma razon en sus incrementos; y si llamamos p la paralaxe absoluta de la estrella situada O, la paralaxe en longitud será $\frac{p.\,\text{sen}\,E}{\cos L}$. Quando la estrella pareciere en quadratura, sen E será igual con el radio que siempre tomamos por unidad, y la paralaxe máxima en longitud será $\frac{p}{\cos L}$; luego la paralaxe actual para una situacion dada es igual á la paralaxe máxima multiplicada por el seno de la elongacion.

527 Con el socorro de las dos fórmulas antecedentes haremos patente que en virtud de la paralaxe las estrellas parece que trazan una elipse. Sea C el lugar verdadero
89. de la estrella, observada desde el centro del sol; CO, la paralaxe máxima en latitud $= p\,.$ sen L que se verifica en los sicygies; CH ó CK la paralaxe máxima en longitud medida en un círculo máximo, igual á la paralaxe absoluta que se verifica en las quadraturas; el punto H que está al oriente corresponde á la primera quadratura, pues tres me-

meses despues de su conjuncion la longitud de la estrella es Fig.
máxima (525). En los demás tiempos del año la estrella parecerá en un punto F, siendo su paralaxe en longitud CM igual á CK. sen E, y su paralaxe de latitud FM ó $CG = CO$. cos E (524). Síguese de aquí que el punto F está en la circunferencia de una elipse cuyo ege mayor es CK, y CO el menor; porque es propiedad (72) de la elipse que siendo CM los senos de 15°, 30° &c. respecto del radio CK, las ordenadas AE son los cosenos de los mismos arcos, siendo el radio CO.

528 Las dos elipses que se vén en la figura son las 70.
que Sirio y Arcturo han de describir aparentemente en virtud de la paralaxe (527), en el supuesto de que la paralaxe absoluta de cada una de estas estrellas sea igual al semiege de la elipse que la representa. La linea AB es paralela al equador, y dichas elipses están dispuestas de modo que manifiestan respecto de cada mes del año, en qué proporcion las dos estrellas se apartan ó acercan una á otra, y quánto debería variar su diferencia de ascension recta y declinacion, segun los tiempos señalados dentro de las elipses, en virtud de las leyes de la paralaxe, que dejamos esplicadas; manifestaremos dentro de poco quanto estas diferencias discrepan de las que se han observado (468).

529 Si una estrella estuviere en el polo mismo de la eclíptica, la paralaxe de latitud siempre sería igual á la paralaxe absoluta, ó al ángulo APS, y la elipse de la 87.

 pa-

Fig. paralaxe se transformaría en un círculo. En este caso la longitud aparente de la estrella siempre sería igual á la
91. longitud del sol. Sea *P* el polo de la eclíptica ó el polo del círculo *ABCD* que la tierra anda; *Pa* ó *Pb*, el valor de la paralaxe absoluta. Estando la tierra en *A*, verá la estrella en *a*, á la mínima distancia del punto *C* de la eclíptica al qual corresponde entonces el sol, una vez que la latitud de la estrella es siempre mínima quando está en conjuncion (521). Del mismo modo, quando la tierra estuviere en *B*, la estrella parecerá en *b*, correspondiendo al punto de la eclíptica opuesto al punto donde está la tierra, y en virtud de esto parecerá que anda el circulillo *abcd* al rededor del polo de la eclíptica en el discurso de un año. Con esto las elipses de Sirio y Arcturo se ensancharian y transformarian en círculos si sus latitudes crecieran hasta 90.°

530 El descubrimiento de la aberracion ha hecho patente que las desigualdades observadas en las estrellas provienen de una causa distinta de la paralaxe, y esta nueva causa esplica tan bien todas las observaciones, que excluye totalmente la paralaxe. No tienen, pues, las estrellas fijas ninguna paralaxe; y así lo sienten hoy dia los Astrónomos de todas las Naciones. Asegura Bradley que si fuera de 1″ por lo menos, la hubiera reparado quando se dedicó á hacer tantas observaciones, particularmente de γ del Dragon, cuyas observaciones concuerdan en todos tiempos con la aberracion sin acudir á paralaxe alguna.

De

Fig.

De la distancia y magnitud de las Estrellas fijas.

531 Si la paralaxe de las estrellas fijas fuese reparable, nos proporcionaría averiguar á qué distancia están de la tierra; pero como es insensible (530), inferiremos de aquí, á lo menos por exclusion, uno de los límites de esta distancia. Si la paralaxe absoluta de una estrella, ó el ángulo *APS* 87. fuere de 1'', el lado *PS* sería 206264 veces mayor que el radio *AS* de la orbita anua, cuyo radio es, segun manifestaremos en otro lugar, de 33 millones de leguas. En la distancia media del sol *AS*, cabe 22198 veces el semidiámetro de la tierra, suponiendo la paralaxe de 9''; luego si la paralaxe anua de una estrella fuera de 1'' no mas, su distancia sería 4727200000, ó 4727 millones de veces mayor que el radio de la tierra, esto es, de 6771770 millones de leguas. Pero como la paralaxe de las estrellas no es de 1'', ni aun la de las estrellas mas próximas á la tierra, ha de ser su distancia todavia mayor, esto es, mayor que 6771770000000 de leguas.

532 Si por medio de este radio se calcula la circunferencia del círculo que andarian las estrellas cada dia en el supuesto de ser inmobil la tierra, siendo de 23^{h} 56' 4'' 1 la revolucion diaria; se inferirá que las estrellas andarian por lo menos 49392000 leguas por segundo; siendo así que mediante la rotacion de la tierra, basta con una velocidad de 238 toesas por segundo, mucho mas creible que una velocidad de 49 millones de leguas.

Fig.

533 Una vez que es tan prodigiosa la distancia á que están de nosotros las estrellas, no es de estrañar sea tan chico su diámetro aparente, é imposible determinar su magnitud absoluta y diámetro verdadero. Esta es la causa de la poca conformidad que hay entre los Astrónomos acerca de la cantidad del diámetro aparente de las estrellas. No parecen sino como puntos, tanto mas chicos quanto mayor es la perfeccion de los anteojos con que se observan. Verdad es que en los anteojos se vé al rededor de las estrellas una luz esparramada, que aumenta su diámetro, de modo que parece ser de 5 á 6″ de diámetro. Pero esta apariencia se debe atribuir á la viveza de su luz, al ayre ambiente é iluminado, á la aberracion de los vidrios, á la impresion muy grande que padece la retina.

534 Si el diámetro de una estrella fuese de 1″, y su paralaxe anua tambien de 1″, el diámetro verdadero de la estrella sería igual al radio de la grande orbita, quiero decir de 33 millones de leguas.

535 La estremada pequeñez del diámetro aparente de las estrellas es tal vez la causa del movimiento de scintilacion que en ellas se repara, cuya scintilacion no se percibe en los planetas, pongo por caso en Júpiter, y muy poco en Venus, bien que la fuerza de su luz sea mayor que la de las estrellas, y sirva para distinguir los planetas de las estrellas. El diámetro de una estrella es tan chico, que las moléculas de materia, por mas pequeñas que sean, que pasan por entre ellas y nosotros en virtud de la agitacion de

la

la atmósfera, bastan para ocultarnos la estrella, y dejárnosla ver alternadamente. Si estas alternativas son tan cortas y frequentes, que apenas nuestra vista las pueda distinguir una de otra, será forzoso que las estrellas estén al parecer como en un temblor continuo. Esta esplicacion se confirma con las observaciones hechas en algunos paises donde el ayre es puro y tranquilo, donde aseguran que no se repara scintilacion alguna en las estrellas. Fig.

Fig.

DEL SOL.

536 LA teórica del sol en los mas de los asuntos que abraza no se distingue en realidad de la teórica de la tierra, pues el movimiento propio aparente del sol no es mas que una ilusion ocasionada del movimiento real de la tierra. Sin embargo se pueden proponer y tratar separadamente acerca del sol varias cuestiones, en cuya resolucion nos vamos á empeñar, dejando las demás para quando tratemos de la tierra y los demás planetas.

Del Movimiento del Sol.

537 Una vez determinada la latitud del lugar del observador (137), la direccion de la eclíptica (121), los puntos donde la eclíptica corta el equador (123), el ángulo que forman uno con otro estos dos círculos, y quanto se aparta el sol del equador en los puntos solsticiales (128), será facil de señalar el camino del sol en la eclíptica, y los puntos donde se halla cada dia.

92. Sea *EQ* el equador; *HO*, el orizonte; *ES*, la eclíptica que forma en *E* un ángulo de $23^\circ \frac{1}{2}$ con el equador; *S*, el sol á las 12 del dia en el instante que pasa por el meridiano *SAB*. Si medimos su altura respecto del orizonte (110) ó el arco *SB*, y de su altura restamos la altura *SB* del equador, que es constante, conoceremos *SA* que es la distancia del sol al equador, y se llama la declinacion del sol (377). Pero en el triángulo esférico *SEA*, formado de ar-

arcos del equador, de la eclíptica y del meridiano, conocemos del ángulo *E* de $23^{\circ} \frac{1}{2}$, el lado opuesto *SA*, que es la declinacion del sol, y el ángulo recto *A*, por ser los meridianos perpendiculares al equador (108); luego sacaremos la hypotenusa *ES* que será la longitud del sol, esto es, su distancia al punto equinoccial *E*, medida á lo largo de la eclíptica. Por lo probado (III. 709 *B*) diremos: *El seno del ángulo* E *ó de la oblicuidad de la eclíptica, es al seno de la declinacion observada* AS, *como el radio es al seno de la hypotenusa* ES, *ó de la longitud del sol.*

538 Por egemplo, el dia 22 de Marzo de 1752 observó Mr. de la Lande en el Observatorio Real de Berlin, la altura del limbo del sol, é infirió de su observacion, que la altura verdadera del centro del sol era de $38^{\circ}\ 22'\ 27''$; antes había determinado la altura del equador de $37^{\circ}\ 28'\ 30''$, restando esta de la del sol, quedaron $0^{\circ}\ 53'\ 57''$ para la declinacion verdadera del sol, y suponiendo la oblicuidad de la eclíptica de $23^{\circ}\ 28'\ 11''$, hizo esta proporcion para resolver el triángulo esférico *ESA*: *El seno de* $23^{\circ}\ 28'\ 11''$ *ó del ángulo* E, *es al seno de* $53'\ 57''$ *que es el lado* AS, *como el seno total, que siempre es la unidad, es al seno de la hypotenusa* ES, *ó de la longitud del sol que sacó de* $2^{\circ}\ 14'\ 47''$.

539 El lado *ES* hallado por esta proporcion es la distancia al equinoccio mas inmediato *E*. Si la observacion se hubiere hecho por el mes de Septiembre, quando el sol se vá acercando al equador, y vá menguando su decli-

na-

Fig. nacion, el resultado de la operacion sería la distancia al equinoccio de otoño medida á lo largo de la eclíptica.

93. Sea ♈DB♎F♈ el equador reducido á linea recta; ♈H♎♑♈, la eclíptica, cuya primera mitad ♈H♎, por estar mas arriba ó ácia el norte del equador, tiene una latitud boreal, siendo así que los seis últimos signos ♎♑♈ tienen una declinacion austral. Si el sol estuviera en G con una declinacion BG, por la regla antecedente hubiéramos sacado la hypotenusa G♎, y su suplemento para seis signos, ♈SHG sería la longitud del sol. Si la declinacion del sol fuese austral, como AF, su altura sería menor que la del equador, por lo menos en nuestras regiones septentrionales; se debería restar la altura observada de la del equador para sacar la declinacion. La hypotenusa hallada por la analogía precedente sería ♎A distancia al equinoccio de otoño, y se la deberian añadir 180° ó todo el semicírculo ♈H♎ para sacar la longitud del sol contada desde el equinoccio de la primavera, ó desde Aries, esto es, el arco ♈H♎A.

Finalmente, si la declinacion siendo tambien austral, estuviese como PQ, entre el solsticio de invierno ♑ y el equinoccio de la primavera ♈, por la regla dada solo sacaríamos la hypotenusa PR♈, y se debería tomar su complemento para 12 signos ó 360°, para sacar la longitud entera ♈SHGAP contándola de occidente á oriente, desde el punto por donde se empezaron á contar las longitudes.

540 La altura meridiana del sol, que nos ha servido

do (537) para determinar su longitud, tambien podria servir para determinar su ascension recta. Quando es conocida la declinacion *AS*, se puede sacar en el triángulo *SEA*, en el qual son conocidas tres cosas, el valor del lado *AE*, que es la distancia del sol al equinoccio contada á lo largo del equador. Bastará hacer esta proporcion (III. 709. *B*): *La tangente de la oblicuidad de la eclíptica, ó del ángulo* E, *es á la tangente de la declinacion* AS, *como el radio es al seno del arco* EA, *ó de la ascension recta del sol.* Si el sol hubiese pasado el solsticio del estío, se tomará el suplemento de la distancia hallada; si hubiese pasado el equinoccio de otoño, se la añadirán 180°; si hubiese pasado el solsticio de invierno, se tomará lo que faltare para los 360.° Esta regla viene á ser la misma que la de antes (539); fúndase en que el cálculo precedente dá la distancia al equinoccio mas inmediato al sol, siendo así que el empeño está en referir al equinoccio de la primavera todas las ascensiones rectas, igualmente que todas las longitudes. Tiene este método un inconveniente, que sin duda fue causa de habérsele preferido el que dejamos declarado (379 y sig.). Fig. 92.

541 Dejamos dicho (151) cómo si se dividen 360° ó 1296000″ en $365\frac{1}{4}$ partes, se saca que le toca andar al sol 59′ 8″ $\frac{3}{10}$ cada dia. Por consiguiente con tomar 365 veces esta cantidad, sería facil de determinar de quántos grados y minutos ha de ser cada dia la longitud del sol, en el supuesto de que crezca regularmente, esto es, una misma cantidad todos los dias. La longitud que se ha-

Fig. hallaría por este camino para cada dia, añadiendo succesivamente 59′ 8″, se llama la *Longitud media del sol.*

542 De repetidas observaciones hechas por los Astrónomos con la mira de averiguar la longitud verdadera del sol, consta, conforme hemos insinuado (537), que su longitud media y la verdadera no siempre son iguales. Con efecto, estas dos longitudes no son iguales sino á principios de Enero y Julio; por el mes de Abril la longitud verdadera es mayor que la longitud media unos 2°, ó con mas precision 1° 55′ 31″, como se verá mas adelante; quiero decir, que el dia primero de Abril el sol se halla realmente en el punto donde debería estar el dia 3, ó dos dias despues, si caminára uniformemente en la ecliptica desde el dia primero de Enero, y si su longitud verdadera fuese siempre igual con su longitud media. Al contrario, ácia principios de Octubre, la longitud verdadera es menor la misma cantidad que la longitud media. Esta *desigualdad* del sol ó esta diferencia se llama *Equacion de la orbita*, ó *Equacion del centro.* Y por *Equacion* entienden generalmente los Astronómos *la diferencia que vá de una cantidad actual al valor que debería tener la misma cantidad si creciera siempre uniformemente y sin desigualdad alguna.*

543 Los primeros Astrónomos tuvieron por aparente no mas esta desigualdad del sol. Como estaban persuadidos á que el sol traza un círculo, y le anda uniformemente, si la tierra, decian, no ocupa el centro de este círculo, las partes de su periferia mas distantes de nosotros han

han de parecer menores que las partes mas cercanas, y el movimiento del sol nos parecerá mas lento en las primeras que en las segundas. Sea *E* el centro del círculo *NAPB* que el sol anda cada año, y *F* otro punto donde supone- mos la tierra; quando el sol estuviere en *N*, estará de nosotros á mayor distancia que quando estuviere en *P*, y los espacios que anduviere cada dia nos parecerán menores. Fig. 94.

544 El punto *N* de la grande orbita, el mas distante de la tierra se llama el *Apogeo*, y el punto opuesto *P*, donde está mas cerca de nosotros, se llama el *Perigeo*; la cantidad *EF*, ó la distancia entre el centro de la orbita y el punto donde está el observador se llama la *Excentricidad* del sol. La distancia del sol á su apogeo se llama la *Anomalia*, y es por egemplo, el arco *AN* quando el sol está en *A*. Como es la tierra la que anda al rededor del sol en la orbita donde nos parece que el sol se mueve, llamamos *Afelio* el punto *N* donde la tierra está mas distante del sol *F*, y *Perihelio* el punto *P* donde está mas cerca.

Llámanse tambien *Apsides* los dos puntos estremos de una orbita, sea que se la considere respecto del sol ó respecto de la tierra.

545 Hyparco halló que desde el equinoccio de la primavera hasta el solsticio de verano habia $94\frac{1}{2}$ dias, y desde el solsticio hasta el otro equinoccio $92\frac{1}{2}$ dias, esto es, dos dias menos, bien que siempre hubiese 90° de uno á otro para el movimiento aparente. El movimiento del sol en dos dias es de $1^\circ 15' 8''$, por consiguiente el movimiento me-

Fig. medio del sol, que se miraba como el movimiento verdadero era como 1° 58′ mayor desde la primavera al verano que desde el verano al otoño, aunque el movimiento verdadero fuese igualmente de 90.°

Suponiendo en *E* el centro del círculo que el sol anda uniformemente, busquemos el punto *F* donde debe estar la tierra para que reparemos en el movimiento del sol toda la desigualdad espresada por razon de su mayor ó menor distancia.

94. Sea *A* un punto determinado á arbitrio para que represente el lugar del sol quando está en el punto del equinoccio de la primavera; *AB*, un arco igual al movimiento medio del sol en el discurso de 94 dias $\frac{1}{2}$ hasta el solsticio de verano; *BC*, un arco igual al movimiento medio del sol en el discurso de 92 $\frac{1}{2}$ dias, por manera que *B* sea el solsticio de verano, y *C* el punto del equinoccio de otoño. Tiraremos desde luego una cuerda *AC*, y despues otra cuerda *BD* perpendicular á la primera, el punto de interseccion *F* será indisputablemente el punto donde se deberá colocar el ojo, porque no hay otro punto alguno desde el qual se puedan ver los puntos *A*, *B*, *C*, *D* en ángulos rectos, de modo que parezcan distantes uno de otro 90° cabales, conforme están respecto de nosotros. El arco *ABC* que es el movimiento medio, suponiendo el movimiento real del sol entre los dos equinoccios, ó en el discurso de 187 dias, es conocido por la duracion de la revolucion del sol, suponiéndola de 365 dias $\frac{1}{4}$, es de 184° 20′, cuya mitad

tad *AH* es de 92° 10.′ Si restamos *AH* de *AB*, movimiento medio del sol entre el equinoccio y el solsticio, 93° 9′, quedará *BH* de 59′; si de *AH* restamos el quadrante de círculo *GH*, tendremos *AG* = 2° 10.′ En conociendo *AG* y *BH*, conoceremos sus senos, que son iguales á *FL* y *LE*, y son de 378 y 172 partes en el supuesto de que sean 10000 las del radio, y hallaremos *FE* que tendrá 415 de las mismas partes, y esta es la *Excentricidad* del sol. Tambien se hallará que el ángulo *F* es de 24° $\frac{1}{2}$; esto manifiesta que el apogeo *N* estaba 24° $\frac{1}{2}$ mas adelantado que el solsticio de verano *B* en tiempo de Ptolomeo. Hoy dia está 8° mas adelantado que el solsticio. Fig.

La excentricidad *FE* era, segun Ptolomeo, de 415 partes, pero los Arabes la redugeron á 347; hoy dia las observaciones mas exactas la dán 336 partes no mas.

546 Esta gran diferencia de excentricidad dió motivo á *Arzachel*, uno de los Arabes de España, que vivia ácia el año de 1080, para suponer que el centro de la orbita anual del sol no se mantenia siempre á la misma distancia del centro de la tierra, y que se movia al rededor de un círculo, con el qual se esplicaba la variacion de excentricidad y el movimiento del apogéo. Pero todo esto se fundaba en el error de las observaciones antiguas, porque la excentricidad, qual la dán las observaciones mas exactas de Tycho-Brahe, Flamsteed, y el Abate de la Caille, aunque muy distantes unas de otras, es cabalmente una misma.

Su-

Fig. 547 Supone, pues, Prolomeo que el sol dá cada año la vuelta uniformemente en un círculo, cuyo centro es *E*, estando la tierra en *F*; la diferencia *EF* entre el punto desde el qual observamos, y el punto al rededor del qual se hace el movimiento, es la causa, segun se esplica, de la desigualdad aparente del sol. Con efecto, como el arco *NH* está mas lejos de nosotros que el arco *CP*, nos ha de parecer menor, aun quando le supongamos igual, y que es andado en un mismo tiempo, porque los obgetos nos parecen tanto mas chicos, quanto mas lejos están de nuestra vista.

548 Lo que acabamos de esplicar con un círculo excéntrico, tambien se puede esplicar con un círculo *ho-*
95. *mocéntrico*, esto es, cuyo centro corresponda al centro mismo de la tierra, y lleva un epyciclo. Sea *F* el centro del círculo que se supone que el sol anda al rededor de la tierra colocada en el centro *F* del homocéntrico; *GHK*, un circulillo llamado *Epyciclo*, cuyo centro *B* anda con movimiento uniforme la circunferencia *AB* de occidente á oriente, mientras que el sol anda el epyciclo en una direccion contraria, ó de oriente á occidente. Se supone que el punto *G* del epyciclo, llamado el apogeo, por ser el mas distante de la tierra se hallase en el radio *FA* al principio del movimiento; se toma el arco *GH* de un mismo número de grados que el arco *AB*, y el punto *H* es el lugar donde se supone el sol, siendo el punto *B* el centro del epyciclo. Si tomamos despues la *FE* paralela é igual con *BH*, y desde el

el punto *E* como centro trazamos otro círculo *NHPC*, cuyo radio *EH* sea igual á *FB* ó *FA*; este círculo *NHC* será lo mismo cabalmente que el excéntrico que el sol anda en la hypótesi declarada (545), qual le suponia Ptolomeo. El ángulo *NEH* es el mismo en ambos casos, es el movimiento verdadero y uniforme del sol igual al arco *NH*, siendo así que el movimiento visto desde el punto *F* es menor, porque la distancia *FN* del sol en el apogeo es mayor que la distancia *FP* en el perigeo; el arco *NH* trazado en el excéntrico en la primera hypótesi, es el mismo que el arco *AB* que anda el centro del epyciclo en la segunda hypótesi; uno y otro son proporcionales al tiempo; quiero decir, que crecen $59' 8''$ cada dia. La desigualdad en la primera hypótesi pende de ser visto el arco *NH* desde el punto *F*, en lugar de ser visto desde su centro *E*; y en la hypótesi de los epyciclos, la cantidad *NH* vista desde el punto *F* es el verdadero arco andado por el sol, una vez que estaba en *N* al principio del movimiento, y ahora se halla en *H*. Mas adelante declararemos cómo se esplican hoy dia sin epyciclos y círculos excéntricos las desigualdades del movimiento del sol y de los planetas. Fig.

Del Año.

549. Aunque hemos dado (117) un método para averiguar lo que dura el año solar, propondremos aquí otro mas exacto, y daremos á conocer las tres especies de año que consideran los Astrónomos. Por decontado tendremos

Fig. mos averiguada la duracion del año solar si conseguimos averiguar quanto tiempo gasta el sol en volver á un mismo solsticio ó á un mismo equinoccio, y este intervalo de tiempo se llama *Año trópico.* Con los egemplos daremos á entender como se egecuta esta determinacion.

550 Para averiguar el punto del solsticio que se verifica en el mes de Junio de 1749, consideraremos que pues la ascension recta del sol menos la de *la lira* era de 104° 2′ 31″, y de 241° 43′ 26″ á distancias iguales del solsticio (383), el medio, es á saber 172° 52′ 58″½, debe ser la diferencia de ascension recta entre el sol y la lira en el mismo instante del solsticio. Nos toca, pues, determinar á qué hora fue esta con efecto la diferencia de ascension recta del sol. El dia 19 de Junio de 1749 á mediodia halló el Abate la Caille esta diferencia de 170° 53′ 10″½, esto es, 1° 59′ 48″ no mas menor de lo que debia ser. En virtud de observaciones hechas muchos dias de seguida, le constaba que en 24 *horas* crecia 1° 2′ 23″; le faltaban todavia 46 horas y 5 minutos $\frac{1}{5}$, para andar 1° 59′ 48″ y llegar á una diferencia de ascension recta de 172° 52′ 58″½. Luego por una regla de tres se saca que el solsticio fue el dia 20 de Junio á 22ʰ 5′ 20.″

551 Para hallar el punto del equinoccio del mes de Marzo del año de 1749, se deberá tener presente que por el cálculo de antes (383) la ascension recta de la lira era de 277° 6′ 52″ 5; estaba, pues, la lira á 82° 53′

53′ 7″ 5 del equinoccio el dia 12 de Abril. Luego en el instante que el sol llegó al equinoccio, habia de haber entre los dos astros una diferencia de ascension recta de 82° 53′ 7″ 5. El dia 21 de Marzo á mediodia, la diferencia se halló de 83° 49′ 18″ 8, esto es, 56′ 11″ 3 mayor, y el sol andaba cada dia 54′ 32″ en ascension recta. Luego es facil de sacar por una regla de tres que el sol se halló 24^h 44′ antes á la distancia precisa de 82° 53′ 7″ 5, esto es, en el mismo equinoccio, y por consiguiente el equinoccio fue el dia 19 de Marzo á 23^h 16′. Fig.

En los cálculos que acabamos de hacer, como no llevamos aquí otra mira que la de dar á conocer el método, hemos omitido las correcciones que necesita para reducir á un mismo instante las situaciones del sol y de la estrella que discrepan por razon de la aberracion, nutacion, precesion &c.

552 El método mismo hace patente que no se puede señalar el punto del equinoccio sin la declinacion del sol ó su altura á mediodia; esta altura nos manifiesta con su aumento el instante en que llegado el sol á la altura del equador, forma el equinoccio. Síguese de aquí que con quanta mayor rapidez creciere la declinacion del sol, tanto mas puntual y facil será la determinacion del equinoccio. Si la declinacion *DS* sirve para hallar el tiempo que el sol llegó al equinoccio ♈, por medio del tiempo en que llegó á la distancia *DS* del equador, se determinará el equinoccio con tanta mayor precision, quanto mas rápidamente se apartare el 93.

Fig. sol del equador, y quanto mayor incremento tuviere la declinacion *DS.* Por egemplo, en una declinacion observada hemos de recelar 5 segundos de error por lo menos; el sol en las inmediaciones del equinoccio gasta 5′ de tiempo en apartarse 5″ del equador, habrá, pues, en el tiempo del equinoccio 5′ de duda. Pero si se tomara el tiempo en que llegado á 15° de los solsticios, gasta el sol 20′ en apartarse 5″ del equador; habria 20′ de duda en el tiempo del equinoccio, porque siempre hay los 5″ de duda acerca de la altura, y los 5″ suponen 20′ de tiempo. Por consiguiente quanto mas aceleradamente se aparta el sol del equador, es tanto mas puntual y facil la determinacion del instante en que llegó á él, y de la distancia á que está del punto equinoccial. Importa, pues, que las dos observaciones correspondientes se hagan en las inmediaciones del equinoccio.

553 Una vez que segun hemos dicho el año solar trópico de que vamos hablando, es el regreso del sol á un mismo equinoccio, y hemos declarado como se determina el punto del equinoccio, veamos como se averigua la duracion del espresado año.

El equinoccio mas antiguo de que ha quedado memoria es el que Hyparco observó el dia 24 de Marzo, 146 años antes de Christo, segun los Cronologistas, ó 145 segun el modo de contar de Casini, que daremos á conocer mas adelante, á 11 horas 55′ de la mañana. El dia 20 de Marzo de 1735 Casini determinó el tiempo verdadero del equinoccio á 14^h 20′ 40″ en París, que vie-

ne

ne á ser el dia 9 de Marzo, á $16^{h}\ 12'\ 26''$, segun el Calendario Juliano, al meridiano de Alexandria. El intervalo entre estos dos equinoccios es de 1880 años Julianos menos 14 dias 7 horas 42 minutos 34 segundos; en los 1880 años hay una quarta parte de bisiestos, por cuyo motivo le tocarian á cada año 365 dias 6 horas; pero como hay 14 dias menos, si dividimos dicha cantidad por 1880, saldrán 10 minutos 58 segundos 10 terceros, que se han de restar de cada año, y se hallan 365 dias 5 horas 49 minutos 1 segundo 50 terceros, á la qual se añadirán 6 segundos 10 terceros, que el año aparente tiene de menos que el año medio (554), y sacaremos de esta primera comparacion que la duracion del año solar medio es de 365 dias 5 horas 49 minutos 8 segundos. Fig.

De los cálculos de Mr. de la Lande, en los quales llevó en cuenta la desigualdad de la precesion, resulta que el año solar medio es de $365^{d}\ 5^{h}\ 48'\ 45''\ 5$.

554 Para inferir de la comparacion de los dos equinoccios la duracion del año medio, se la han de hacer tres correcciones, cuyos fundamentos declararemos mas adelante. La primera pende del movimiento del apogeo, el qual en el discurso de un año adelanta $65''\frac{1}{2}$. Despues de vuelto el sol al equinoccio de la primavera, siendo como unos $8^{s}\ 21^{o}$ su anomalia media, su equacion es $0''\ 29$ menor que el año antecedente, y mengua la misma cantidad su longitud verdadera; se ha de añadir esta cantidad á la longitud verdadera para sacar una longitud que tenga

Fig. las mismas circunstancias que la primera, que no esté mas afecta de la desigualdad del sol, ó cuyo regreso sea el mismo que el de la longitud media, cuyo cuidado es esencial quando se quiere determinar la duracion media del año. Por consiguiente al intervalo de tiempo que corrió desde el un equinoccio al otro, se deberá añadir el tiempo que el sol hubiera gastado en andar la espresada corta cantidad, que viene á ser $7'' \frac{18}{100}$ de tiempo. Al contrario, quando se comparan uno con otro dos equinoccios de otoño, teniendo actualmente el sol al tiempo del equinoccio 2^s 21º de anomalia media, la equacion es $0''38$ menor en el segundo equinoccio que en el del año antes, con esto crece la longitud del sol, la duracion del año parece menor, y es preciso añadirla $9''\frac{3}{10}$, para sacar el año solar libre de esta desigualdad.

La segunda correccion que pide la duracion del año pende de la fuerza con que Júpiter y Venus atrahen á la tierra, de donde resulta que la precesion de los equinoccios es actualmente $0''231$ mayor cada año, que la precesion media entre Hyparco y nosotros. Síguese de aquí que el año es en estos tiempos $5''\frac{6}{10}$ menor que el año medio, que resulta de la comparacion de las observaciones de Hyparco con las nuestras, y el movimiento secular $23''$ menor. Es, pues, preciso para que las observaciones antiguas concuerden con las modernas, que las observaciones de Hyparco parezca que dán un movimiento secular menor que las observaciones posteriores. Es preciso que suponiendo este

mo-

movimiento bastante grande para representar las observaciones de Tycho, las tablas tengan un error de 7 á 8″ *de menos* en tiempo de Hyparco: esto sale puntualmente con suponer el movimiento secular de 46′ 10″, ó la duracion actual del año solar de 365 dias 5 horas 48 minutos 45 segundos $\frac{1}{2}$. Esta cantidad, que hasta aquí pudo parecer algo corta, se halla ser la única que pueda cumplir con las observaciones de Hyparco y Tycho, sin admitir aceleracion alguna en la duracion del año, conforme la hacian recelar las observaciones de Ptolomeo. Fig.

La tercera correccion que pide la determinacion del año por la comparacion de los dos equinoccios, procede de las desigualdades que la tierra padece en virtud de las pequeñas atracciones de la Luna, Júpiter y Venus, de las quales se hará individual mencion en la Astronomía Física, y señalaremos en nuestras tablas. Pueden ser causa dichas desigualdades de que el equinoccio se verifique en un año antes que en otro. Esta correccion es la menor de las tres quando se toma un intervalo de muchos años, porque no se multiplica como las dos primeras, pero se debería llevar en cuenta si el intervalo no fuese mas que de un siglo.

555 En conociendo la duracion del año trópico se puede averiguar el movimiento del sol para un tiempo qualquiera. Por egemplo, para hallar el movimiento secular, esto es, el que corresponde á cien años Julianos, diríamos $365^d\ 5^h\ 48'\ 45''\frac{1}{2}$ son á $360^\circ\ 0'\ 0''$, como $365^d\ \frac{1}{4}$ son á un número, del qual se restarán 360°; la resta mul-

Fig. tiplicada por 100 dará 46′ 10.″ Si aumentáramos un segundo la duracion del año, se le quitarian 4″ 1 al movimiento secular del sol. Pero por lo comun la operacion se hace al reves, se determina por observacion el movimiento secular, y de él se infiere despues el tiempo que dura la revolucion.

556 La duracion del *Año Syderal* es mayor que la del año trópico; los regresos del sol al *equinoccio* que hemos determinado, son lo que importa conocer, porque de esto penden las estaciones; pero los Astrónomos suelen considerar tambien la duracion del año respecto de las estrellas fijas, y esta es con efecto mayor. Porque como los puntos equinocciales retroceden cada año (394) $50''\frac{1}{3}$, y crece igual cantidad la longitud de las estrellas, es preciso que el sol vuelva á encontrar mas tarde la estrella que el equinoccio, en el supuesto de que el año antecedente correspondiese al equinoccio y á la estrella en un mismo instante. Siendo el movimiento del sol de $59'\ 8''\frac{3}{10}$ por dia (151) necesita $20'\ 26''$ de tiempo para andar los $50''\frac{1}{3}$, de donde resulta que la duracion del año syderal será de $365^{d}\ 6^{h}\ 9'\ 11''\ 2$.

La duracion del año syderal tambien se puede hallar directamente con una sola operacion, diciendo 360° son á la revolucion trópica, como 360° mas $50''\frac{1}{3}$ son á la revolucion syderal.

557 Mas adelante hablaremos del *Año Anomalístico*, que es el regreso del sol á su apogeo, y dura $26'\ 35''$ mas

mas que el regreso al equinoccio, porque el apogeo del sol Fig.
adelanta $65''\frac{1}{2}$ cada año. Por esta razon asegura Mr. de la Lande que el año anomalístico es de $365^d\ 6^h\ 15'\ 20.''$

Del Movimiento del Sol en ascension recta.

558 La práctica del método declarado (379) para determinar el lugar del sol y de las estrellas, presupone que se conozca el movimiento del sol en ascension recta por medio del movimiento en declinacion. Hemos visto en el egemplo propuesto (383) como una diferencia de $4'\ 35''$ entre las alturas del sol dió una variacion de ascension recta de $11'\ 37.''$ Confesamos que este movimiento se podria inferir de las observaciones hechas de un dia para otro; pero es mas facil todavia inferirle inmediatamente, y con una sola operacion, del movimiento en declinacion observado, esto es, de la diferencia de las alturas meridianas observadas dos dias de seguida. Daremos una regla acomodada para egecutar este cálculo.

559 *El movimiento del sol en ascension recta es igual á la variacion de la declinacion multiplicada por la cotangente de la oblicuidad de la eclíptica, y dividida por el coseno de la declinacion del sol despues de multiplicado por el coseno de la longitud*, tomándolas una y otra, con diferencia de algunos minutos, por el medio del intervalo de tiempo, en el qual se busca el movimiento en ascension recta mediante el movimiento en declinacion.

Sea *ED* la ascension recta del sol; *DS*, su declinacion; 96.

Fig. *P*, el polo del equador; *SA*, el movimiento diurno del sol en longitud, considerándole como un arco extremadamente pequeño; *AC*, el movimiento diurno en declinacion; *DB* ó el ángulo *P* que mide, el movimiento diurno en ascension recta que buscamos. En el triángulillo *ASC* que es sensiblemente rectilineo, tenemos (I. 667) $SC = AC \cdot \text{tang } A$, y por ser *BD* la medida del ángulo *P*, *SC* que es menor, y es tambien un arco pequeño perpendicular á *PS* y *PC*, será $= BD \cdot \text{sen } PS$, ó $BD \cdot \text{cos declin.}$ (53); quiero decir, que $SC = BD \cdot \text{cos declin.}$ por otra parte $SC = AC \cdot \text{tang } A$; luego $AC \cdot \text{tang } A = BD \cdot \text{cos decl.}$ y $AC = BD \cdot \text{cos decl. cot } A$. Pero el triángulo esférico rectángulo *EAB* nos dá (III. 703) $\text{cot } A = \text{tang } E \cdot \text{cos} EA = \text{tang oblic. eclíp. cos longit.}$ Luego $BD = \frac{AC \cdot \text{cotang oblic.}}{\text{cos decl. cos long.}}$. De esta fórmula nos valimos antes (383).

560 Si quisiéramos determinar la longitud del sol
92. despues de conocer no mas que su ascension recta *EA*, por medio de la observacion, sería preciso apelar al cálculo. En este caso conoceríamos la oblicuidad de la eclíptica ó el ángulo *E*; sacaremos la longitud *ES*, la declinacion *AS*, y el ángulo *S* que forma la eclíptica con el meridiano ó círculo de declinacion por las analogías siguientes.

I. *El radio*
es al coseno de la oblicuidad de la eclíptica,
como la cotangente de la ascension recta
es á la cotangente de la longitud (III. 709 C).

El

II. *El radio* Fig.

: *es á la tangente de la oblicuidad de la eclíptica,*

como el seno de la ascension recta

es á la tangente de la declinacion (III. 709. C).

III. *El radio*

: *es al seno de la oblicuidad de la eclíptica,*

: *como el coseno de la ascension recta*

es al coseno del ángulo de la eclíptica con el meridiano (III. 709. C).

Su complemento es el ángulo del círculo de latitud con el círculo de declinacion, que tambien se llama *Ángulo de posicion.* Este ángulo de posicion es *oriental*; quiero decir que el círculo de latitud está al oriente del círculo de declinacion ácia el norte, quando el sol se halla en los signos *ascendientes* 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó se vá acercando al mediodia por la variacion de su declinacion.

A lo que aquí acabamos de practicar apelamos (446 y 478).

Quando en lo dicho (446) se trata del sol, cuya latitud es nula, el primer término es igual al radio, y la analogía se reduce á la última que acabamos de proponer.

Determinar quanto tiempo gasta el Sol en atravesar el meridiano, el vertical y el orizonte.

561 Aunque todas las observaciones del sol se hacen en su limbo, conforme se verá á su tiempo, es preci-

Fig. ciso reducirlas al centro del mismo astro, para cuya operacion es indispensable saber quanto tiempo gasta el sol en atravesar el meridiano.

Supongo que el diámetro del sol en S sea igual al ar-
96. co SC, y de $31' 31''$, qual se vé á fines de Junio; PSD y PCB son los dos meridianos ó los dos círculos horarios que pasan por los bordes del sol, y el arco DB del equador es igual al diámetro del sol en ascension recta, esto es, á la diferencia que hay entre la ascension recta del borde precedente, y la del borde siguiente. Luego el arco DB ó el ángulo al polo DPB medirá el tiempo que gasta el sol en atravesar un círculo horario ó un meridiano; porque es preciso que el limbo del sol pase desde S á C, para que todo el diámetro atraviese un hilo puesto en la direccion del círculo horario PSD.

Si dividimos el diámetro del sol $31' 31''$ por el seno de la distancia al polo PS, ó por el coseno de su declinacion, sacaremos el valor del arco BD, porque como $SC = BD . \cos \text{decl.}$ (53), síguese que $BD = \frac{SC}{\cos \text{decl.}}$, y si dividimos esta cantidad por 15 (153) para convertirla en tiempo, quedará determinado el tiempo que el sol gasta en pasar el meridiano. Por egemplo, si la declinacion del sol fuese de $23° 11'$ el dia 30 de Junio, serán $2' 17'' \frac{14}{100}$ en tiempo solar.

562 El movimiento propio del sol no causa diferencia alguna en esta operacion, porque en el discurso de 24 horas solares verdaderas el sol parece que anda 360°; pa-

re-

recerá, pues, que anda $15'$ en $1'$ de tiempo; bastará por consiguiente convertir su diámetro en tiempo á razon de 15° por hora, para sacar el tiempo que tarda en pasar, señalado en intervalo de tiempo verdadero, ó si se quiere en intervalo de tiempo medio (542), que apenas discrepa del verdadero en 2 minutòs de tiempo. Pero si el que buscase la determinacion de que vamos hablando se sirviere de una péndola arreglada por las estrellas, cuyas 24 horas son $4' 56''$ ó $\frac{1}{366}$ mas cortas que las horas medias (155) se debería añadir un 366^{mo} ó $0'' 37$ á la cantidad hallada; quiero decir, que el tiempo que tarda el sol en atravesar el meridiano, contándole en el relox de las estrellas, sería con corta diferencia de $2' 17''. \frac{51}{100}$. Fig.

Los Astrónomos hacen muchísimo uso de la cantidad que acabamos de determinar, porque no observan comunmente mas que uno de los bordes del sol; entonces para determinar quando pasa el centro ó el mediodia verdadero, se la debe añadir la mitad de la cantidad que hemos hallado en tiempo solar. Por este motivo publicamos la tabla siguiente calculada por Mr. de la Lande, en el supuesto de que el diámetro apogeo del sol sea de $31' 31''$, conforme se lo han manifestado las observaciones.

Ta-

Fig.

Tabla del tiempo que el semidiámetro del Sol gasta en atravesar el meridiano en los diferentes tiempos del año, en minutos, segundos y décimas de segundo.

Dias	Enero.	Febrero.	Marzo.	Abril.	Mayo.	Junio.
1	1′ 10″ 8	1′ 8″ 0	1′ 5″ 2	1′ 4″ 3	1′ 5″ 8	1′ 8″ 2
7	1 10, 5	1 7, 3	1 4, 8	1 4, 4	1 6, 3	1 8, 5
13	1 10, 0	1 6, 6	1 4, 5	1 4, 7	1 6, 8	1 8, 6
19	1 9, 4	1 6, 0	1 4, 3	1 5, 0	1 7, 3	1 8, 7
25	1 8, 8	1 5, 5	1 4, 2	1 5, 4	1 7, 7	1 8, 7
	Julio.	Agosto.	Septiemb.	Octubre.	Noviemb.	Diciemb.
1	1′ 8″ 5	1′ 6″ 4	1′ 4″ 2	1′ 4″ 2	1′ 6″ 8	1′ 10″ 1
7	1 8, 3	1 5, 9	1 4, 0	1 4, 5	1 7, 5	1 10, 6
13	1 7, 9	1 5, 4	1 4, 0	1 4, 9	1 8, 2	1 10, 9
19	1 7, 5	1 5, 0	1 3, 9	1 5, 4	1 8, 9	1 11, 0
25	1 7, 0	1 4, 6	1 4, 0	1 6, 0	1 9, 5	1 11, 0

563 El tiempo que el semidiámetro del sol tarda en atravesar el meridiano, nos servirá para saber quanto tarda en atravesar un vertical qualquiera, ó en levantarse la cantidad de su diámetro mas arriba de un círculo paralelo al orizonte.

97. Sea *ZEBC* un vertical fijo que el sol atraviese al ir desde *D* á *S*; el primer borde del sol toca desde luego el vertical en *B*, y el segundo borde del sol toca despues el mismo vertical en *A*; hemos de averiguar quanto tiempo correrá entre estos dos contactos, este será el tiempo que el diámetro del sol tardará en atravesar el vertical *ZEC*. Si suponemos el arco *DS* tan pequeño que sea andado con movimiento uniforme, el vertical le dividirá por el me-

medio en el punto E; entonces en el triángulo SEA rectángulo en A, tenemos $ES : SA$ :: radio : sen E, ó porque el radio siempre es $= 1$, $SA = ES$. sen E, ó $ES = \frac{SA}{\text{sen } E}$; luego tambien el tiempo que corresponde á ES ó el tiempo que se necesita para que el centro del sol pase desde E á S, y el borde toque el vertical en S es igual al tiempo que corresponderia á una cantidad igual con SA, dividida por el seno del ángulo E, ó por el coseno del ángulo PEZ. Bastará, pues, dividir el tiempo que el semidiámetro del sol pone en atravesar el meridiano (562) por el coseno del ángulo que forma el vertical con el círculo de declinacion, para sacar el tiempo que pone en atravesar el vertical. Fig.

564 Para determinar quanto tarda el sol en atravesar un plano paralelo al orizonte, supondremos que sea SC la direccion del movimiento diurno; HOR, un plano orizontal ó un círculo paralelo al orizonte, llamado *Almicantarat*, al qual el borde superior del sol toca en R, quando el sol está debajo, y el borde inferior del sol toca en O en el instante que el sol pasa dicho círculo. Si el arco SC no pasa de un grado y medio, y el sol no tarda mas que unos seis minutos al poco mas ó menos, en ir desde S á C, el triángulo COF será sensiblemente rectilineo, y como es rectángulo en O, tendremos $CO = CF$. sen CFO, luego $CF = \frac{CO}{\text{sen } CFO}$. Luego el tiempo que necesita el sol para subir la cantidad de su semidiámetro CO, es igual al tiempo que corresponderia á una cantidad igual con CO, dividida por 98.

el

Fig. el seno del ángulo *CFO* = *PFZ*. Por consiguiente para hallar el tiempo que tarda el sol en atravesar una linea orizontal, se ha de dividir el tiempo que tarda en atravesar el meridiano, por el seno del ángulo paraláctico que forma el vertical con el círculo de declinacion.

Del Método de las alturas correspondientes.

565 Como la diferencia de ascension recta es el fundamento del método, por el qual se determinan (379) los lugares de las estrellas y del sol, es muy del caso que declaremos el método mas natural y mas exacto que se conoce para determinar las diferencias de ascension recta.

Con motivo de enseñar como se traza una *linea meridiana*, digimos (141) que los astros están á igual altura una hora antes que pasen por el meridiano, y una hora despues; por consiguiente para determinar puntualmente el instante en que un astro ha pasado por el meridiano, basta observar con un relox de péndola el instante en que estuvo á una altura determinada ácia el oriente subiendo, y antes de su paso por el meridiano, y observar despues el instante en que se halla á la misma altura al bajar ácia el poniente despues de su paso por el meridiano. El punto medio entre estos dos instantes en el relox, será la hora que el relox señalaba quando el astro estaba en el meridiano.

566 Supongamos que se haya observado por la ma-

ña-

ñana el limbo del sol, y sea su altura 21° quando el relox señalaba $8^h\ 50'\ 10''$; supongamos que al cabo de muchas horas, despues de pasado el sol por el meridiano, se observase otra vez su altura de 21° ácia el poniente, en el instante que el relox señalaba $2^h\ 50'\ 30''$; hemos de determinar quanto tiempo corrió desde $8^h\ 50'\ 10''$ de la mañana, hasta $2^h\ 50'\ 30''$ de la tarde; tomaremos el medio de este intervalo, y este será el punto del mediodia en el relox que sirvió para la observacion, estuviese bien arreglado ó no. Fig.

Para hallar el medio entre estos dos instantes, sumaremos uno con otro los dos números, y tomaremos la mitad de su suma; pero en lugar de 2 horas despues de mediodia se deben escribir 14 horas, porque se debe suponer que el relox ha señalado de seguida las horas por el orden natural desde 8 hasta 14, siendo así que en la realidad y por estilo de la relogería ha acabado á las 12 para empezar otra vez 1, 2 &c. Esta irregularidad del relox turbaría el cálculo, si no se la tuviera presente.

Hora á que el limbo del sol estaba á 21° por la mañana	8^h	$50'$	$10''$
Hora á que el borde estaba á 21° por la tarde	14	50	30
Suma de los dos números	23^h	$40'$	$40''$
Mitad de la suma	11	50	20

Fig. Por consiguiente quando el sol estaba en el meridiano en su altura máxima, á iguales distancias de las dos alturas observadas, el relox señalaba $11^h\ 50'\ 20''$, y atrasaba $9'\ 40''$ respecto del sol. A los Astrónomos no les dá cuidado que sus reloges adelanten ó atrasen, con tal que sepan quanto es el atraso ó la anticipacion, y esto se lo manifiesta la operacion que hemos declarado.

567 Para que salga mas cabal la determinacion que la ocasiona, se suelen tomar muchas alturas del sol por la mañana, y muchas por la tarde con el mismo limbo, y en los mismos grados correspondientes; se compara cada altura de por la mañana con la que se tomó por la tarde en el mismo grado; y se hallan tantos resultados diferentes quantas alturas se han comparado. Si todas estas alturas se tomáran con toda la puntualidad posible, los resultados serian siempre unos mismos; pero como casi siempre hay una diferencia de un segundo, se toma un medio entre todos los resultados, sumándolos todos, y dividiendo su suma por el número de los resultados. Por egemplo, si despues de hallar como arriba $11^h\ 50'\ 20''$, halláramos en lugar de $20''$ los números siguientes en otras comparaciones $19''$, $19''\frac{1}{2}$, $20''\frac{1}{2}$, $21''\frac{1}{2}$, como hay cinco resultados diferentes, y no hay razon ninguna para dar la preferencia á alguno de ellos, los sumo unos con otros, saco la suma $100''$. Omitimos los minutos, porque los supongo los mismos en cada resultado; divido despues la suma $100''$ por 5, porque se han tomado cinco alturas, el cociente $20''$ me está diciendo

do que $11^h\ 50'\ 20''$ es un medio entre todos los resultados, y que este es el número que busco. Fig.

Equacion de las alturas correspondientes.

568 La operacion que acabamos de hacer supone que el sol ande un solo y mismo paralelo, que su arco ascendiente haya sido de todo punto igual con su arco descendiente, esto es, que desde las nueve de la mañana hasta las tres de la tarde, se haya mantenido á la misma distancia del equador, á fin de que su ángulo horario (153) sea uno mismo á una misma altura. Pero este supuesto no es rigurosamente exacto, porque como el sol anda cada dia oblicuamente en la eclíptica un arco de cerca de un grado, se acerca, ó aparta indispensablemente del equador, y esta cantidad llega en algunas ocasiones á un minuto de grado por hora.

569 Hemos visto (184) como el arco diurno del paralelo que anda un astro en la esfera oblicua, es tanto mayor quanto mas próximo está el astro al polo elevado, ó es mas septentrional respecto de nosotros; lo mismo sucede con el arco semidiurno. Si el sol al tiempo de ponerse estuviese mas inmediato al polo que quando nació, el arco semidiurno de por la tarde será mayor que el arco semidiurno de por la mañana, y habrá habido mas tiempo desde el mediodia hasta ponerse el sol, que desde que nació hasta mediodia. Por consiguiente el punto de mediodia no estuvo á igual distancia del nacer que del ocaso; luego

Fig. no basta hallar este punto medio para determinar el instante del mediodia. El que tomára este medio, haría lo propio que si sumára uno con otro los dos arcos semidiurnos convertidos en tiempo (153), y tomára la mitad de la suma, conforme se ha hecho (566); pero si el uno de los dos arcos es en la realidad 40″ mayor que el otro, la semisuma será 20″ mayor que el primer número, y habrá en el resultado 20″ de mas. Luego se deberian quitar 20″ (en el caso de haberse acercado el sol al polo elevado) de la semisuma, ó del medio hallado entre el orto y el ocaso, para sacar el momento del verdadero mediodia. El medio tomado entre los dos instantes se acerca igualmente al orto que al ocaso, está á igual distancia de cada uno de estos puntos, porque hemos tomado cabalmente un punto medio; pero el meridiano está mas cerca del sol naciente, y ha llegado por consiguiente el sol al meridiano antes que al punto que está en medio del orto y del ocaso; luego se ha de rebajar algo de dicho medio para determinar el instante del medio dia verdadero.

570 Lo que acabamos de decir acerca del orto y del ocaso del sol, se aplica á una altura qualquiera, por egemplo, de un círculo paralelo al orizonte que estuviese á 21° de altura. El tiempo que tardará el sol en ir desde este círculo al meridiano, será menor que el tiempo que tardará en ir desde el meridiano al mismo círculo por la tarde, si en este intervalo el sol se hubiere acercado al polo elevado. No serán en este caso los arcos semidiurnos de que aca-

acabamos de hablar, sino los ángulos horarios (153) Fig.
los que crecerán; se deberá, pues, restar algo del medio tomado entre las dos alturas iguales para determinar el mediodia verdadero. Lo contrario se debería practicar si el sol, en vez de acercarse al norte, se hubiera apartado desde por la mañana hasta por la tarde, el ángulo horario de por la tarde sería menor que el de por la mañana, y sería menester añadir una pequeña cantidad al punto del medio para sacar el del mediodia verdadero.

571 Sea P el polo elevado; *Z*, el zenit; *S*, el sol; 99.
SB, un arco paralelo al orizonte, de modo que el punto *B* y el punto *S* estén á una misma altura; *PS*, la distancia del sol al polo por la mañana; *PB* su distancia al polo por la tarde, menor que la primera. En el instante que el sol llegare por la tarde al punto *B* que suponemos elevado 21° como en la observacion de por la mañana, el ángulo horario de por la tarde *ZPB*, ó la distancia del sol y de su círculo horario *PB* al meridiano *PZ*, será mayor que el ángulo horario de por la mañana *ZPS*. Tendremos, pues, dos triángulos *ZPS*, *ZPB* que tienen comun el lado *PZ*, y cada uno de los lados iguales *ZS*, *ZB* de 69°, pues son el complemento de la altura, que en ambos casos es de 21°; los lados *PS* y *PB* discrepan la cantidad que la declinacion del sol ha variado en el intervalo de las dos alturas. Si resolvemos separadamente estos dos triángulos para sacar los dos ángulos horarios *ZPS*, *ZPB*, los hallaremos diferentes; la mitad de su diferencia convertida en tiempo, será la cor-

Fig. reccion que se deberá hacer al tiempo del medio de las dos alturas iguales para hallar el punto verdadero del mediodia.

572 Para calcular con mas comodidad esta corta diferencia de tiempo, que es la correccion del medio de las alturas correspondientes, basta determinar el ángulo *SPB*, que es la pequeña variacion del ángulo horario *P*, en el supuesto de que los lados *PZ* y *ZS* sean constantes. Por lo probado (III. 876) consta que la pequeña variacion del lado *PS* es á la variacion simultanea del ángulo adyacente *P*, como el radio es á la cotangente del lado constante *PZ* adyacente al mismo ángulo, dividida por el seno del mismo ángulo *P*, menos la cotangente del lado variable *PS* dividida por la tangente del mismo ángulo *P*; quiero decir, que la variacion de la declinacion entre la altura de por la mañana y la de por la tarde, es á la del ángulo horario, como el radio es á la tangente de la altura del polo dividida por el seno del ángulo horario, menos la tangente de la declinacion dividida por la tangente del ángulo horario. Para sacar el tiempo que corresponde á esta corta variacion del ángulo horario, se debe tomar la quincena parte de los segundos de grado, que será los segundos de tiempo; tambien se deberá dividir esta cantidad por 2, si la quisiésemos aplicar al mediodia, tomado en un medio entre las alturas correspondientes. Por consiguiente, si llamamos *dx* la cantidad de la variacion *SA* de la distancia al polo, ó la variacion total de declinacion entre la altura de por la mañana, y la de por la tarde (567), la correccion que buscamos con-

convertida en tiempo será $\frac{dx}{30}\left(\frac{\text{tang. lat.}}{\text{sen ang. hor.}} \pm \frac{\text{tang. decl.} \odot}{\text{tang. ang. hor.}}\right)$. Fig.

El signo + sirve para quando la declinacion del sol es del lado opuesto al polo elevado, esto es, para nosotros quando es austral, y el signo — sirve para quando la declinacion del sol es del mismo lado del polo elevado, ó boreal para nosotros, ó desde 20 de Marzo hasta 22 de Septiembre.

573 Por egemplo, el dia primero de Marzo de 1764 la declinacion del sol era de 7° 17′ austral, en el discurso de 24 horas menguaba 22′ 54″ tomando un medio entre la variacion de las 24 horas precedentes y la de las 24 horas *siguientes*. Suponiendo que las alturas correspondientes del sol se tomasen dicho dia á eso de las 9 horas de *la mañana*, y 3 horas de la tarde, saldrán 5′ 43″$\frac{1}{2}$ para la variacion de declinacion en el discurso de 6 horas que hay entre la altura de por la mañana y la de por la tarde. Será, pues, *dx* igual á 343″ 5; el ángulo horario que corresponde á tres horas, es de 45°, á razon de 15° por hora (153). Si la observacion se hiciere á la latitud de 48° 50′, la tangente de la latitud qual la dan las tablas ordinarias de los senos, tangentes &c. será 1,1436; el seno del ángulo horario ó de 45° será 0,7071; si dividimos 1,1436 por 0,7071, sacaremos $\frac{\text{tang. lat.}}{\text{sen ang. hor.}} =$ 1,6173. La tangente de la declinacion del sol 7° 17′ es 0,1278, la tangente del ángulo horario 45° = 1, tendremos, pues, $\frac{\text{tang. decl.}}{\text{tang. ang. hor.}} = 0,1278$; añadiremos este segundo término de la fórmula al primero por ser meridional (572)

 la

Fig. la declinacion del sol, y sacaremos $1,7451 = \frac{\text{tang. lat.}}{\text{sen ang. hor.}} + \frac{\text{tang. decl.}}{\text{tang. ang.hor.}}$. Se tomaría la diferencia de estos dos términos si la declinacion fuese boreal. Solo falta multiplicar 1,7451 por dx ó $343'' 5$, y dividirle por 30 segun dice la fórmula, y saldrán $19,98''$, ó $20''$ con corta diferencia, y esta será la correccion que se deberá hacer á la hora hallada.

574 Esta equacion es sustractiva quando la distancia del sol al polo elevado vá menguando, esto es, en nuestras regiones septentrionales, quando el sol está en los signos ascendientes 9, 10, 11, 0, 1, 2, ó desde 21 de Diciembre hasta 21 de Junio; la misma equacion es aditiva en los signos descendientes, ó quando el sol se aparta de nuestro polo desde 21 de Junio hasta 21 de Diciembre. Para hacerse cargo de la razon de esta prevencion, conviene considerar que si el sol se halla mas cerca del polo por la tarde que por la mañana, á la misma altura, el ángulo horario será mayor, conforme lo está manifestando la mis-
99. ma figura; porque estando el punto B mas inmediato al polo P, que el punto S, el ángulo ZPB es mayor que el ángulo ZPS. Pero el ángulo ZPB es el ángulo horario de por la tarde en el supuesto que hemos hecho; luego en los signos ascendientes, el ángulo horario de por la tarde es mayor que el de por la mañana, á alturas iguales. En virtud de esto, el medio del ángulo total comprehendido entre el círculo horario de por la mañana, y el de por la tarde, caerá del lado de la porcion mayor, esto es, del lado de la tarde, ó á la derecha del meridiano, y lo mismo le sucederá al medio en-

tre

tre el tiempo de las alturas correspondientes, dará un tiempo que será despues de mediodia; por consiguiente para sacar el mediodia verdadero, se deberá restar la equacion. Fig.

575 Réstanos manifestar por qué hemos dividido la fórmula por 30 para sacar la equacion, en vez de dividirla por 15 no mas para convertirla en tiempo. Si el exceso que el ángulo horario de por la tarde lleva al de por la mañana fuese de 40″ de tiempo, la correccion del mediodia deberá ser de 20″ no mas; porque quando se quiere sacar el medio entre dos cantidades, se toma (566) la mitad de su suma, y si la una de las dos cantidades fuese 40″ mayor de lo que corresponde, la semisuma será 20″ mayor de lo que debiera. Luego la correccion no ha de ser mas que la mitad del exceso que el ángulo horario de por la tarde lleva al de por la mañana. Esta es la razon por qué no hemos tomado mas que la mitad de la fórmula que espresaba el angulillo *BPS*, y hemos dividido su espresion por 30, y no por 15, conforme hubiera bastado para convertirla en tiempo (571).

576 Despues que se han tomado muchas alturas (567), se debería calcular la equacion para cada una separadamente. Pero basta tomar la equacion respecto de la altura que está en medio de la primera y de la última, á no ser que fuese mucho el intervalo, y no se pudiese suponer la equacion proporcional al tiempo.

577 El método de las alturas correspondientes tambien sirve para determinar el paso de los planetas por el meri-

Fig. ridiano, quando se quiere determinar con suma puntualidad su diferencia de ascension recta respecto de una estrella. Todos los planetas esperimentan, igualmente que el sol, una variacion de declinacion en el intervalo de algunas horas, de donde se infiere la precision de hacer una correccion como la que hemos determinado respecto del sol. Verdad es que esta equacion puede ser mucho mayor respecto de los planetas; pero esto no perjudica á la exactitud del método, una vez que se conozca puntualmente la diferencia de declinacion de un dia para otro.

Hallar el Tiempo verdadero de una observacion.

578 En sabiendo como se determina el punto verdadero del mediodia, por medio de las alturas correspondientes (566) del sol, será facil de hallar la hora verdadera de otra observacion qualquiera; supongamos que por el método espresado se tenga averiguado que el dia primero de Enero un relox señalaba á mediodia $0^h\ 3'\ 57''$, y que el dia 2 de Enero se haya averiguado por el mismo método que el relox señalaba $0^h\ 4'\ 45''$ á mediodia, esto es, $48''$ mas que el dia antes; se echa de ver que el relox adelanta $48''$ cada dia respecto del sol, andando 24^h y $48''$, en el tiempo que no habia de andar mas que $24^h\ 0'\ 0''$, respecto del tiempo verdadero.

Supongamos ahora que por la noche se haya observado un fenómeno celeste, pongo por caso el principio de un eclipse, quando el relox señalaba $9^h\ 30'\ 57''$, se trata de

de averiguar el tiempo verdadero que corresponde á esta Fig. hora del relox. Se tomará la diferencia entre $0^h\ 3'\ 57''$ y $9^h\ 30'\ 57''$, y se hallará que el eclipse sucedió $9^h\ 27'\ 0''$ en el relox despues del mediodia verdadero. Pero como el relox adelanta $48''$ cada dia, ó en el tiempo que señala $24^h\ 0'\ 48''$, se hará esta regla de tres: $24^h\ 0'\ 48''$ son á $48''$, como $9^h\ 27'\ 0''$, que es lo que la observacion se ha atrasado en el relox respecto del mediodia del relox, son á $19''$, que es lo que debió adelantar entre mediodia, y la observacion de que se trata. Estos $19''$ se añadirán á $0^h\ 3'\ 57''$ que el relox señalaba á mediodia, una vez que la anticipacion crece de un dia para otro, y saldrán $0^h\ 4'\ 16''$, que es lo que el relox adelantaba á la hora de la observacion. Esta es la cantidad que se debe rebajar de la hora que señalaba en el instante de la observacion, es á saber, $9^h\ 30'\ 57''$, y quedan $9^h\ 26'\ 41''$ que serán el tiempo verdadero que se busca.

579 Esta operacion viene á ser lo mismo que si buscáramos la distancia del sol al meridiano en tiempo, á razon de 15° por hora. Y de hecho, yá que el sol se hallaba en el meridiano á $0^h\ 3'\ 57''$, y el dia siguiente á $0^h\ 4'\ 45''$, ha andado los 360° que componen 24 horas de tiempo verdadero, en el discurso de $24^h\ 0'\ 48''$ del relox, y de la proporcion hecha poco ha se saca que desde $0^h\ 3'\ 57''$ hasta $7^h\ 30'\ 57''$ del relox han corrido $9^h\ 26'\ 41''$ de tiempo verdadero, y no $9^h\ 27'\ 0''$ que se han contado en el relox. Por consiguiente lo mismo tiene para un Astrónomo que su relox

es-

Fig. esté arreglado ó que no lo esté; quiero decir, que sus 24 horas sean mas largas ó mas cortas que las 24 horas del sol; que el relox señale ó no la hora que es; siempre se halla por el método que acabamos de declarar quanto el relox adelanta ó atrasa en el instante de la observacion, y esto le basta al observador. Lo único que supone este método es la uniformidad del movimiento del relox; si en las 24 horas adelanta 48″, es preciso que en 12 horas adelante 24″; sin esto no habria uniformidad, y su movimiento yá no serviría para medir el movimiento diurno de los astros, que es ó suponemos uniforme.

Equacion del Tiempo, ó diferencia entre el Tiempo verdadero, y el Tiempo medio.

580 Hasta aquí solo hemos hablado del *tiempo verdadero* ó *aparente* que observamos por medio de las alturas correspondientes, que el sol señala en nuestras meridianas, y en los reloges de sol, y rige comunmente en la sociedad. Hemos supuesto que el sol vuelve constantemente al meridiano al cabo de 24 horas; pero yá hemos dicho (152) que el movimiento del sol no es uniforme, y por consiguiente el tiempo ajustado á este movimiento no puede ser ni igual ni regular. No es, pues, el sol, hablando con rigor, una medida cabal del tiempo, y la hora verdadera que señala no puede servir para medir el tiempo cuya esencia estriva en su igualdad. Pero como el tiempo verdadero tiene la circunstancia de que le podemos observar siempre que queramos,

nos

nos valemos de él para hallar un tiempo *medio* y uniforme Fig.
qual le necesitamos para los cálculos.

El *Tiempo medio* ó igual es el que señalaría á cada instante un relox de todo punto perfecto, que en el discurso de un año hubiese andado sin ninguna desigualdad, señalando mediodia el dia primero y último del año, en el mismo instante que el sol está en el meridiano. Este relox no debería señalar igualmente mediodia, los demás dias intermedios, con el sol, porque para esto sería menester que el sol hubiese andado todos los dias con una misma velocidad, contra lo que tenemos dicho (152).

Quando el sol deja el meridiano, y se restituye al mismo círculo el dia siguiente, ha andado 360 al parecer, pero en la realidad ha andado no solamente los 360°, mas tambien un grado mas, que es la cantidad que el sol ha andado ácia el oriente por entre las estrellas fijas, en el tiempo que gasta para restituirse al meridiano (118 y 154).

581 Para que el sol gastase constantemente un mismo tiempo en restituirse al meridiano, sería preciso que este movimiento propio del sol ácia el oriente fuese de una misma cantidad todos los dias, esto es, de 59′ 8.″ Pero por razon de las desigualdades de que hemos hecho mencion, sucede que á principios de Julio el sol no anda mas que 57′ 11″ cada dia ácia el oriente, y á principios de Enero anda 61′ 11″, es á saber 4′ mas que por Julio, á lo largo de la eclíptica en virtud de su movimiento propio. Esta es la primera causa por que los dias son desiguales; desde un

me-

Fig. mediodia al siguiente siempre se cuentan 24 horas, pero estas 24 horas serán mas largas quando el sol hubiere caminado 61′ 11″ ácia el oriente, que quando no hubiese andado mas que 57′ 11″, porque tendrá que andar 4′ con el movimiento diurno de oriente á occidente antes de llegar al meridiano.

582 Con esta primera causa que pende de la desigualdad del movimiento solar en la eclíptica, se junta otra que pende de la situacion de la eclíptica. No basta que el movimiento del sol en la eclíptica sea igual para que los dias sean iguales, es preciso que este movimiento sea igual respecto del equador, y respecto del meridiano donde se observa; la duracion de las 24 horas pende en parte de la corta cantidad que el sol anda cada dia ácia el oriente; pero esta cantidad debería medirse sobre el equador, porque las horas se cuentan al rededor del equador. No es, pues, el movimiento propio del sol como quiera al qual se debe atender para enterarse de la desigualdad de los dias, sino el mismo movimiento refiriéndole al equador; y si el sol tuviese un movimiento de tal naturaleza que correspondiese perpendicularmente al mismo punto del equador, la equacion del tiempo no variaría, pues los regresos al meridiano serian iguales.

92. Sea *O* el sol; *SB*, el meridiano adonde ha de llegar el sol quando el punto *O* estuviere mas adelantado, y el punto *Q* del equador hubiere llegado al punto *A* del meridiano, de modo que *OQ* sea un círculo horario que á medio-

dia

dia se confundirá con el meridiano *SA*. Coja lo que cogiere de largo el arco *OS* de la eclíptica, este arco no gastará en pasar mas tiempo que el que mide el arco *AQ* del equador; quiero decir, que si el arco *AQ* fuese de un grado, el arco *SO*, sea grande ó chico, tardará 4 minutos en pasar por el meridiano; su situacion oblicua ó inclinada, puede hacer que su longitud *OS* sea mayor que la del arco *AQ*; su distancia al equador puede tambien ser causa de que el arco *OS* sea menor que el arco *AQ*, porque está comprehendido entre dos círculos de declinacion *SA* y *OQ*, ambos perpendiculares al equador *EAQ*, los quales se juntan en el polo, de manera que su distancia es menor ácia *O* que ácia *Q*; pero el arco *AQ* del equador es constantemente la medida del tiempo que el sol gasta en venir desde el punto *O* al meridiano *SAB*. Fig.

583 Para combinar una con otra estas dos causas que hacen desiguales los regresos del sol al meridiano, concibamos un sol medio y uniforme que se mueve al rededor del equador, de modo que ande cada dia $59' 8''$ (151), y los 360° en el mismo tiempo que el sol con su movimiento propio, esto es, en el discurso de un año, y que parte del equinoccio de la primavera en el instante que la longitud del sol es cero; cada vez que este sol medio llegare al meridiano, diremos que es mediodia medio, y si el sol verdadero estuviere entonces mas ó menos adelantado, de modo que sea mas ó menos de mediodia, la diferencia que se notare la llamaremos *Equacion del tiempo*.

Es-

Fig. Este movimiento del sol medio tendría por época primitiva el tiempo en que concordando el apogeo del sol con el punto equinoccial, el sol verdadero se hallase al mismo tiempo en el espresado punto; pero esto, dado caso que haya sucedido alguna vez, no se habrá verificado muchos siglos ha. En este caso único han podido los dos soles hallarse juntos en el equinoccio, y ser nulas las dos equaciones del tiempo; pero se destruyen recíprocamente quatro veces al año.

584 La ascension recta media del sol la señala el lugar del espresado sol medio que se mueve uniformemente en el equador; la ascension recta verdadera del sol, la que señala el círculo de declinacion que pasa por el lugar verdadero del sol, puede discrepar de la media mas de 4 grados, por razon de las dos causas especificadas (581 y 582); el sol verdadero puede pasar un quarto de hora antes ó despues que el sol medio; y la equacion del tiempo llega á ser $0^h\ 16'\ 12''$, ó poco falta, el dia primero de Noviembre.

585 Síguese de todo lo dicho hasta aquí que la diferencia entre la ascension recta media del sol, y su ascension recta verdadera, convertida en tiempo, dará la equacion del tiempo. Pero la ascension recta media es indispensablemente la misma cantidad que la longitud media, una vez que una y otra empiezan y acaban en el equinoccio, siempre son proporcionales al tiempo, y crecen cada dia $59'\ 8''$; luego la *equacion del tiempo es la diferencia entre*

la

la longitud media, y la ascension recta verdadera del sol, convertida en tiempo. Fig.

586 Pero como en la práctica no se puede hallar esta diferencia sino por medio de dos operaciones, y en virtud de dos principios diferentes (581 y 582), síguese que la equacion del tiempo consta de dos partes; la primera es la diferencia entre la longitud media y la longitud verdadera, ó la equacion de la orbita convertida en tiempo (545); la segunda es la diferencia entre la longitud verdadera, y la ascension recta verdadera, tambien convertida en tiempo. De cada una de estas partes publicaremos una tabla entre las *tablas Astronómicas*.

587 La primera parte, ó la primera tabla, que tiene por argumento la anomalia del sol, ó su distancia al apogeo, llega hasta 7′ 42″ de tiempo, quando el sol se halla en sus distancias medias, esto es, á 3 y 9 signos de anomalia media. Esta parte es la misma cada año, porque la equacion del centro siempre es de 1° 55′ 31″ 6; pero el tiempo del año en que se verifica no es siempre uno mismo, porque el sol llega cada año algo mas tarde á su apogeo, por causa del movimiento del mismo apogeo.

La segunda parte de la equacion del tiempo, que tiene por argumento la longitud verdadera del sol, llega hasta 9′ 53″ 7, quando el sol se halla ácia 46° $\frac{1}{4}$ de los equinoccios; pero como esta parte pende de la oblicuidad de la eclíptica, que vá menguando poco á poco, esta parte de la equacion del tiempo mengua 0″, 014 respecto de

Fig. cada segundo de diminucion de la oblicuidad de la eclíptica, y esta suele llegar á 1″ de tiempo al cabo de 71 años. Sería facil de comprobarlo calculando la diferencia en-
92. tre *ES* y *EA*, quando *ES* es de 46° $\frac{1}{4}$; porque esta diferencia es entonces de 2° 28′ 24″ 8, en el supuesto de que el ángulo *E* sea de 23° 28′ 20″, cuya cantidad vale 9′ 53″ 7 de tiempo. La equacion será menor si fuere menor el ángulo *E*, la diferencia se halla en las tablas del sol.

588 Como el movimiento real de la tierra, ó el movimiento aparente del sol padece alguna alteracion por causa de las atracciones de la Luna, de Venus, y de Júpiter, y se ha descubierto la equacion de la precesion en ascension recta, ó la segunda parte de la nutacion; de estas tan pequeñas equaciones, se ha originado una tercera parte en la equacion del tiempo, porque alteran la ascension recta verdadera del sol, sin alterar la ascension recta media; resulta de aquí una desigualdad en la diferencia de estas dos ascensiones rectas, que forma la equacion del tiempo. Estas desigualdades despues de acumuladas pueden llegar á 38″ $\frac{1}{2}$; porque 10″9 que provienen de la atraccion de Júpiter, 15″ 2 que provienen de la atraccion de Venus, 8″4 de la de la Luna, y 3″ 9 que proceden de la nutacion; todas estas cantidades pueden componer 2″ $\frac{1}{2}$ de tiempo, que en algunas circunstancias no se deben despreciar.

589 Para mayor puntualidad se deberian reducir al equador estos 2″ $\frac{1}{2}$ de tiempo, que se cuentan naturalmen-

te

te en la eclíptica, á excepcion de los $3'' 9$, que correspon- Fig.
den á la segunda parte de la nutacion; no puede resultar mas diferencia que un quinto de segundo de mas ó de menos; pero siempre se debe contar en el equador, y no en la eclíptica esta parte de la equacion del tiempo.

Supongamos que llegue á $35''$ la suma de las tres pe- 92.
queñas equaciones del sol contadas en la eclíptica *ES*, y que las queramos reducir al equador *EA*. Por lo probado (III. 894) sabemos que siendo constantes dos ángulos E y *A*, siendo recto el ángulo *A*, la variacion de *ES* es á la de *EA*, como el quadrado del coseno de *AS* es al coseno del ángulo *E*; luego la corta variacion que los $35''$ de la eclíptica causan en el equador *EA*, esto es, $dEA = \frac{35'' \cdot \cos \text{oblic. eclíp.}}{\cos^2 \text{declin.} \odot}$, y porque el coseno de la oblicuidad de la eclíptica $23° 28'$ viene á ser unos $\frac{9}{10}$ del radio, sacaremos, escribiendo dES en lugar de $35''$, $dEA = \frac{6dES}{10 \cos^2 \text{decl.} \odot}$; y dividiendo por 15 para convertir el arco en tiempo, la porcion de la equacion del tiempo que de aquí resulta será $\frac{9dES}{15.10. \cos^2 \text{decl.} \odot}$; todo esto se reduce á esta regla general: del logaritmo constante 8,78642 réstese el duplo del logaritmo del coseno de la declinacion del sol, y añádasele el logaritmo del movimiento en longitud, ó de la suma de las pequeñas equaciones, saldrá el número de los segundos de tiempo. Supongamos que la suma de las pequeñas equaciones fuese de $35''$, se hallaría para el tiempo de los solsticios, siendo de $23° 28'$ la declinacion del sol, que la tercera parte de la equacion del tiempo es de $2'' 54$ de tiem-

Fig. po, en lugar de 2″ 33 que se hallarian si nos contentáramos con reducir los 35″ á tiempo, á razon de 15° por hora.

590. El *Tiempo medio*, igual ó uniforme, es el que siguen los Astrónomos, porque el *Tiempo verdadero* ó *aparente* no les importa, y si le observan es porque les sirve para hallar el tiempo medio. Este es con efecto el que buscan; el tiempo verdadero es facil de observar, porque le señala inmediatamente el sol que vemos; pero no es á propósito este tiempo para medir la duracion, porque esta medida debe ser indispensablemente constante, uniforme é igual. Todas las revoluciones celestes, todas las épocas en tiempo, todos los intervalos de tiempo que se hallan en las Tablas Astronómicas, son en tiempo medio. Con las Tablas Astronómicas no se puede hacer cálculo ninguno sino para tiempos medios, y quando solo es dado el tiempo verdadero, es preciso buscar primero el tiempo medio que le corresponde, sea por lo dicho (585), sea por las tablas de que se ha hecho mencion (587). Por egemplo, si quiero calcular por medio de las Tablas Astronómicas para el instante del mediodia verdadero el dia 8 de Enero de 1762, he de buscar en las tablas para mediodia 7′ 20″, porque aquel dia el tiempo medio tiene 7′ mas. Yá se vé que como las Tablas Astronómicas han de servir para todos los tiempos pasados y venideros, han de estar dispuestas para años iguales, dias iguales y uniformes; quiero decir para tiempos medios.

La

591 La misma tabla de la equacion del tiempo que señala la diferencia entre el tiempo verdadero y el tiempo medio señala esta diferencia en tiempo medio, y no la puede señalar de otra manera. Con efecto, si suponemos que haya entre el sol medio y el sol verdadero una distancia de 4°, de modo que entre sus pasos por el meridiano haya de haber una diferencia de mas de un quarto de hora; esta diferencia de un quarto de hora se ha de contar del mismo modo que todos los demás tiempos de las tablas, por el mismo relox, y por la misma escala que todas las revoluciones y todas las duraciones de los movimientos celestes; se debe, pues, contar *en minutos* de tiempo medio. Fig.

592 Verdad es que hemos de considerar el tiempo verdadero como el único que podemos observar, porque no vemos mas que el sol verdadero que determina el tiempo verdadero. Pero no debe servir para medir intervalo alguno de tiempo, sí para hallar el tiempo medío, el único que nos pueda gobernar, y la verdadera medida de la duracion.

593 Algunos Astrónomos han tomado por equacion del tiempo la diferencia entre la ascension recta verdadera y la ascension recta media, convertida en tiempo á razon de 15° por hora, tomando, por egemplo, 16′ de tiempo por 4° de diferencia. Pero otros Astrónomos de mucha autoridad han tenido por mas acertado reducir estos 4° á tiempo solar medio, que vienen á ser 15′ 57″ 4, la diferencia puede llegar á ser de 2″ 6. Pero Mr. de la Lande ha probado que *la reduccion de los grados á tiempo se debe hacer á*

Fig. *razon de* 15° *por hora, y no á razon de* $15^{\circ}\ 2'\ 28''$ *por hora* (155).

Para probarlo, propondremos el caso mas simple, quando el dia 6 de Noviembre la ascension recta media del sol es 4° mayor que su ascension recta verdadera. Quando el sol verdadero se halla aquel dia en el meridiano, el sol medio tiene que andar todavia 4° para llegar; veamos si estos quatro grados de distancia al meridiano han de dar $16'$ de tiempo; si fuere así, la equacion del tiempo será de $16'$, debiendo ser de $15'\ 57''\frac{1}{2}$ por la regla del Abate la Caille. El sol se restituye al meridiano puntualmente al cabo de 24 horas de tiempo verdadero; el sol medio en el egemplo propuesto, no muda de situacion respecto del sol verdadero, sensiblemente por lo menos en el discurso de 24 horas; porque habiendo llegado la diferencia ó la equacion á su *máximo*, deja de crecer, y no varía aquel dia. Por consiguiente el sol medio llegará cabalmente $16'$ mas tarde al meridiano que el sol verdadero, contando estos $16'$ en el relox del movimiento medio. Con efecto, si los 360° que el sol ha de caminar desde un mediodia para otro, componen cabalmente 24 horas, los 4° componen cabalmente $16'$.

594 Hay sin embargo ocasiones en que 4° no valen mas que $15'\ 57''$ de tiempo; supongamos que una estrella esté 4° mas adelantada que otra, y se nos pregunte quánto tiempo la una llegará al meridiano antes que la otra. Como los 360° que componen la revolucion diurna, ó el re-

regreso de una estrella al meridiano, no valen mas que $23^h\ 56'$ de tiempo en el relox del movimiento medio (154), 4^o no valdrán mas que $15'\ 57''$ en el mismo relox; por consiguiente la una de las dos estrellas llegará al meridiano $15'\ 57''$, y no $16'$ antes que la otra. Fig.

Pero si se trata de dos soles que tengan aquel mismo dia el *mismo* movimiento propio ácia el oriente, y gasten ambos 24 horas cabales del relox que rige, para restituirse al meridiano, el uno llegará $16'$ cabales antes que el otro, si estuviere á la distancia de $4.^o$ Bien se percibe la diferencia que hay entre este caso, y el de las dos estrellas.

595 De las dos partes de la equacion del tiempo que hemos especificado (587), se forma una tabla para alivio de los Astrónomos, correspondiente á cada grado de longitud del sol. Pero esta tabla no es exacta respecto de un número crecido de años, porque supone inmobil el apogeo del sol, de modo que á la misma longitud siempre corresponda una misma anomalia, cuyo supuesto es falso. Manifestaremos la correccion que requiere dicha tabla de la equacion del tiempo al cabo de algunos años. Para calcular esta variacion entre 1764 y 1794, considero que el dia primero de Julio de 1764 á mediodia, el lugar del sol era de $3^s\ 9^o\ 58'$, y que el dia primero de Julio de 1794 á las 6 de la tarde, estará otra vez en el mismo punto; por consiguiente la segunda parte de la equacion del tiempo será en ambos casos $+\ 3'\ 30''\ 8$. Pero en 1764

la anomalia media era de 1° 7′, y en 1794 será de 0° 32′ no mas; luego la primera parte de la equacion del tiempo que en 1764 era — 8″8, será en 1794 de — 4″ 3, esto es 4″ 5 menor al cabo de 30 años en el mismo grado de longitud. En estos principios se funda la tabla siguiente, que contiene la variacion de la equacion del tiempo para cien años.

Tabla de la variacion secular de la Equacion del Tiempo para un mismo lugar del sol.

Grados de la longitud del ⊙	Signos de la longitud del sol.											
	O —	I. —	II. —	III. +	IV. +	V. +	VI. —	VII. +	VIII. +	IX.	X. —	XI. —
0°	2″, 5	4″, 9	11″, 4	14″, 6	13″, 8	9″, 3	2″, 2	5″, 3	11″, 2	+14″, 2	13″, 5	9″, 3
10	0, 0	7, 4	—12, 9	14, 6	12, 5	—7, 1	+0, 3	7, 5	12, 8	—14, 5	12, 5	7, 3
20	—	9, 5	—14, 1	14, 3	11, 2	—4, 7	+2, 7	9, 5	13, 6	—14, 1	11, 1	5, 0
30	4, 9	11, 4	+14, 6	13, 8	9, 3	—2, 2	+5, 3	11, 2	14, 2	—13, 5	9, 3	2, 5

Manifiesta esta tabla que el error máximo es de 14″ 6 en el discurso de 100 años, y que esto sucede quando el sol es apogeo ó perigeo, porque entonces la equacion de la orbita padece la mayor variacion. En los demás tiempos este error mengua como el coseno de la anomalia verdadera, por manera que á 60° de anomalia verdadera ácia 5ˢ 9° de longitud, ó á principios de Septiembre, el error no es mas que de 7″ 3 en cien años.

Bien podrá ser que alguno estrañe ver en la tabla cantidades que mudan de repente de signo, y pasan de mas á menos, sin pasar por cero, contra lo que se estila en todas las tablas. Esto proviene de que dicha correccion guarda

da su valor en el tiempo que la equacion misma es nula y muda de signo. Si se aplicára esta correccion á la primera parte no mas de la equacion del tiempo (587), de la qual es realmente una porcion, se notaría en ella la uniformidad acostumbrada. Como el apogeo siempre tiene un movimiento progresivo, la anomalia del sol que corresponde á una misma longitud, vá menguando continuamente. Por este motivo la equacion para un dia dado siempre mengua en el primero y tercer quadrante de la anomalia media, y crece en el segundo y quarto quadrante; pero este incremento cesará despues, y se transformará en decremento. Fig.

Diferencia entre las Horas solares verdaderas, y las Horas solares medias.

596 La variacion que padece de un dia para otro la equacion del tiempo, cuya variacion llega á 30″ ácia el dia 20 ó 24 de Diciembre, es causa de que el dia medio discrepa del dia verdadero, y las 24 horas solares medias de las 24 horas solares verdaderas. Supongo que el dia 24 de Diciembre á mediodia el sol verdadero concuerde con el sol medio, hallándose juntos en el meridiano; el dia siguiente á mediodia verdadero el tiempo medio será de 30″, porque el sol medio habrá pasado 30″ antes que el sol verdadero; por consiguiente el dia medio habrá durado 30″ menos que el dia verdadero; cada hora verdadera habrá sido aquel dia 1″ $\frac{1}{4}$ mayor que la hora media, que siempre es invariable y constante.

Es-

Fig. Este exceso de las horas verdaderas vá menguando de un dia para otro desde 24 de Diciembre hasta 10 de Febrero, entonces el dia medio es igual con el dia verdadero; despues los dias medios empiezan á ser mayores, y el dia 25 de Marzo el dia medio es $18''\frac{1}{2}$ mayor que el dia verdadero, y la diferencia es nula el dia 15 de Mayo. El dia 21 de Junio el dia verdadero es $13''$ mas largo que el dia medio; el dia 26 de Julio hay igualdad; el dia 18 de Septiembre el dia medio tiene $21''$ mas; el dia 1 ó 2 de Noviembre hay otra vez igualdad, despues el dia verdadero vá siendo mayor que el medio en todo lo restante del año.

597 La suma de todas estas aceleraciones diurnas, y succesivas del dia verdadero respecto del dia medio, ó de este respecto del otro, forma despues la equacion del tiempo. Así, desde el dia primero de Septiembre, que el sol medio concuerda con el sol verdadero, la equacion es nula, siendo el dia verdadero $18''\frac{1}{2}$ menor cada dia, el sol medio atrasa todos los dias respecto del sol verdadero, y se halla mas y mas adelantado ácia el oriente respecto de él, hasta el dia primero de Noviembre, en que está lo mas oriental, y pasa como unos $16'\ 10''$ despues del sol verdadero. Para reducir un intervalo de tiempo medio á un intervalo de tiempo verdadero, basta añadirle algunos segundos quando los dias verdaderos son mas largos, como sucede en el mes de Enero.

De

Fig.

De la Paralaxe del Sol y de su distancia á la Tierra.

598 La paralaxe orizontal del sol no se ha determinado con la exactitud que corresponde sino desde pocos años á esta parte. La apariencia que mas ha contribuido para esta determinacion es el paso de Venus por el disco del sol, de cuyo paso trataremos con individualidad en otro lugar. De este fenómeno han sacado los Astrónomos, que la paralaxe orizontal del sol es de 9.''

599 Por razon de ser tan pequeña la paralaxe del sol se puede omitir en muchas ocasiones, y suponer que los rayos que ván desde el sol á todos los puntos de la tierra son paralelos entre sí, del mismo modo que si el sol estuviera á una distancia infinita de nosotros; porque líneas que forman unas con otras un ángulo tan corto, no se distinguen de las que fuesen cabalmente paralelas, ó que no formasen ángulo ninguno.

600 Una vez averiguada la paralaxe del sol, es fácil de determinar á qué distancia está de la tierra. (299). Porque el seno de 9'' es al radio, como el semidiámetro de la tierra es á la distancia del sol; y como el radio de un círculo es 22918 veces mayor que el seno de 9''; síguese que la distancia del sol es 22918 tantos del radio de la tierra, ó de unas 32830478 leguas comunes de Francia, de 2283 toesas cada una.

De

Fig.

De las Manchas del Sol, y de su Rotacion.

100. 601 Las manchas del sol son unas partes negras irregulares que se reparan de tiempo en tiempo en el sol, y parece que dan la vuelta uniformemente en 25 dias, y 14 horas al rededor del mismo astro; en *N* se vé una sobre el disco del sol. Las sombras son una nebulosidad blanquizca que se repara constantemente al rededor de las manchas grandes.

602 A fines de Mayo y principios de Junio las manchas trazan lineas rectas inclinadas á la eclíptica de norte á sur, quiero decir, que ván desde *A* á *B*. A fines de Noviembre ó principios de Diciembre, trazan lineas rectas yendo de mediodia al septentrion, ó de *C* á *D*; en el invierno y la primavera, su rumbo es cóncavo ácia el sur, y convexa del lado del norte; pero en los otros seis meses, ó desde principios de Junio hasta principios de Diciembre, la concavidad está del lado del norte, como en la elipse *RXVMO*.

La máxima abertura de estas elipses es á principios de Marzo y Septiembre; entonces el ege menor de cada elipse es $\frac{13}{100}$ del ege mayor. Todas las manchas del sol, y tambien las sombras trazan lineas parecidas á las de las manchas, desde el instante que parecen hasta que desaparecen enteramente. Lo mismo se repara en las pequeñas que en las grandes; en las que no duran mas que algunos dias, que en las que hacen muchas revoluciones; en las que atravie-

san

san el sol por su centro, que en las que se reparan cerca de sus polos. Basta esta regularidad para manifestar que estas manchas son adherentes al cuerpo del sol, y que no tienen mas movimiento que el movimiento del sol al rededor de su ege. Luego las manchas prueban la rotacion del sol. Fig.

603 Las manchas del sol parecen en el borde de su disco estremadamente angostas, como un rasgo muy sutil, de donde se sigue que tienen poca altura, ó por mejor decir, que están en la superficie misma del sol. Sin embargo, hemos de considerar que aun quando tuviesen mucha altura podria suceder que no pareciesen en el borde, ó en los estremos del sol, porque no tienen luz alguna, y no se vén sino quando interceptan la luz del disco solar; pero si tuvieran alguna altura, se vería toda su altura así que llegasen á estar proyectadas sobre el sol.

604 Algunos Físicos creyeron al principio que estas manchas del sol eran cuerpos sólidos que hacian sus revoluciones al rededor de este astro. Pero si esto fuera verdad, las manchas nos ocultarian con poca diferencia la misma porcion del sol en sus bordes que en su medio; y el tiempo que parecen sobre el sol sería mas corto que el tiempo que desaparecen, siendo así que observamos que estas manchas tardan el mismo tiempo en andar la parte anterior del sol, que la posterior. Finalmente, estos planetas no podrian hacerse invisibles años enteros, y hacer sus revoluciones en el mismo intervalo de tiempo.

Ca-

Fig. *605* Casini halló la revolucion media de las manchas respecto de la tierra de $27^d\ 12\ \ 20'$; buscó despues esta revolucion respecto de un punto fijo, diciendo $360^\circ + 27^\circ\ 7'\ 8''$, movimiento medio de la tierra respecto de los equinoccios en el discurso de $27^d\ 12^h\ 20'$, son á 360°, como $27^d\ 12^h\ 20'$ son á $25^d\ 14^h\ 8'$, esta es la duracion de la revolucion del sol respecto de los puntos equinocciales.

DE

Fig.

DE LOS PLANETAS PRIMARIOS.

606 Como los planetas dan la vuelta al rededor del sol, un observador colocado en el centro del sol vería sus movimientos mas uniformes, y determinaría con mucha facilidad todas sus circunstancias. Pero como los observadores están en la tierra, cuyo movimiento causa muchas alteraciones aparentes en el movimiento de los demás planetas, es indispensable hacerse primero cargo de todas ellas, para saber mejor qué correcciones hemos de hacer á quanto observamos desde la tierra en los planetas para suponer hechas las observaciones en el sol, desde el qual se verian menos irregulares los movimientos de los planetas.

607 Los planetas suelen brillar en algunas ocasiones mas que las estrellas, pero su luz es mas apacible, y no tiene scintilacion ninguna. El que conociere las doce constelaciones del zodíaco podrá distinguir facilmente los planetas en el cielo, porque en las doce constelaciones no hay mas que quatro estrellas de primera magnitud; es á saber, Aldebaran, Régulo, la Espiga, y Antares; cuyo resplandor se parece al de los planetas. En conociendo la situacion de estas quatro estrellas, es facil distinguir un planeta de una estrella fija, así que se vé el planeta en las inmediaciones de la eclíptica.

Fig. Teórica de los Planetas Primarios vistos desde la Tierra.

608 Los movimientos de los planetas se observan todos en sus orbitas ó en los círculos ó curvas que andan en sus revoluciones; y como estas orbitas están inclinadas respecto de la eclíptica, causa esta inclinacion la mayor parte de las irregularidades de sus movimientos; este será el primer punto que consideraremos.

De la Inclinacion de las Orbitas planetarias.

609 Todo lo que en este punto se encierra se nos hará mas facil de esplicar si consideramos primero la orbita de un planeta como un círculo visto desde el centro del mismo planeta.

610 Quando se sigue por medio de la observacion el camino que andan los planetas en sus revoluciones periódicas en la esfera de las estrellas fijas, se repara que no corresponden á los mismos puntos del cielo quando están á la misma longitud, y pasan cerca de unas mismas estrellas, y mas ó menos lejos de la eclíptica, por lo que varía su latitud en el discurso de una revolucion. Los planetas están unas veces al norte de la eclíptica, otras al sur, apartándose de ella hasta 8 grados, y esto manifiesta que las orbitas planetarias no están en el plano mismo de la eclíptica, y están inclinadas respecto de ella,

611 Consta tambien de las observaciones que las orbitas planetarias son planos que pasan por el centro del sol.

sol. En quanto á la orbita de la tierra no hay duda ninguna; porque la declinacion del sol observada en verano é invierno respecto del equador, es una misma de cada lado, y esta declinacion observada diariamente, sigue la misma ley que la declinacion de un círculo máximo de la esfera calculada en todos sus puntos. Fig.

Por lo que mira á los demás planetas es tambien cierta la proposicion. Porque sus latitudes, ó su máxima distancia de la eclíptica al norte, y al sur, es una misma de cada lado, quando se la refiere al sol. Se observa tambien que sus nudos, ó su interseccion con la eclíptica, están uno de otro á la distancia de 180°, refiriéndolos al sol; cuyas circunstancias no se verificarian si dichas orbitas no pasasen por el centro del sol. Pero aunque todos estos planos pasan por el sol, son inclinados unos respecto de otros, y pasan por distintas regiones del cielo.

612 Aunque las orbitas de los planetas están todas en diferentes planos, y en diferentes inclinaciones, ha sido preciso referir sus diferentes movimientos á un solo y mismo plano, á fin de calcularlos todos por un método uniforme, y se ha tomado á este efecto el plano de la eclíptica. Hay dos razones de esta preferencia; la primera es que siendo el sol el mas reparable de todos los astros, el que se observa mas facilmente en todos tiempos, es mas natural tomarle por término de comparacion: la segunda razon es que las orbitas planetarias se apartan poco de la eclíptica, y forman con ella ángulos muy pequeños, por lo que son menores y mas

Fig. fáciles las reducciones, que si se hicieran al equador como antiguamente.

613 Se refiere á la eclíptica la orbita de un planeta visto desde el sol, considerándola como un círculo máximo de la esfera, del mismo modo que referimos la eclípti-
101. ca al equador (369). Sea *ALN* la eclíptica; *APMN*, la orbita de un planeta; *P*, el lugar de dicho planeta; *PL*, un arco del círculo de latitud que pasa por el centro del planeta, y cae perpendicularmente sobre la eclíptica *ALN*; *L*, será el lugar del planeta reduçido á la eclíptica, ó el punto de la eclíptica en el qual se señala la longitud del planeta. Los puntos *A*, *N* donde la orbita del planeta atraviesa la eclíptica, son los *Nudos* del planeta. El nudo *A* donde está el planeta quando pasa del sur al norte de la eclíptica, se llama *Nudo Ascendiente*, porque entonces el planeta sube ácia el polo que para nosotros es elevado; ☊ es la señal del nudo ascendiente. El nudo *N* por donde pasa el planeta para volver al sur de la eclíptica, es el *Nudo Descendiente*, y esta es su señal ☋.

614 El arco *PL* del círculo de latitud compreendido entre el lugar *P* del planeta y la eclíptica, se llama la *Latitud del Planeta*. Quando los arcos *AP*, *AL* y *PL* tienen sus centros en el centro del sol, la latitud *PL* se llama *Latitud heliocéntrica*; pero quando se consideran círculos cuyos centros se suponen en el centro de la tierra, entonces el arco *PL* se llama *Latitud geocéntrica*.

615 El arco *AP* de la orbita de un planeta, contado des-

desde el nudo ascendiente ácia el oriente, se llama *Argumento de latitud*, porque de la cantidad *AP* pende la latitud *PL*. Fig.

616 Para determinar el argumento de latitud se debe restar el lugar del nudo del lugar del planeta, la diferencia será el argumento de latitud. Decimos que se debe restar el lugar del nudo del lugar del planeta, y no el lugar del planeta del lugar del nudo; y acerca de esto haremos una prevencion que convendrá tener presente en muchas ocasiones. El argumento de la latitud es la cantidad que la longitud del planeta tiene de mas que la longitud del nudo ascendiente, ó el exceso que la longitud del planeta lleva á la longitud del nudo ascendiente; es el trecho que ha andado desde su paso por el nudo, ó el exceso de su longitud actual respecto de la longitud que tenia quando pasó por su nudo; luego si de su longitud actual restamos la del nudo, tendremos el argumento que se busca. Hay casos en que la longitud del nudo es mayor que la del planeta, entonces para egecutar la sustraccion propuesta se añadirán 12 signos á la longitud del planeta. Supongamos, por egemplo, que el nudo de un planeta esté á 2 signos de longitud, y el planeta á un signo no mas; es evidente que desde su último paso por el nudo ha andado 11 signos, pues ha pasado por los signos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 0, 1; pero añadiendo 12 signos á la longitud del planeta que es 1 signo, y restando de la suma 13 la longitud del nudo que es 2 signos, sacaremos 11 signos que es el trecho que ha andado el planeta desde el último paso por el nudo, y

 por

Fig. por consiguiente el argumento de latitud. Esta adicion de 12 signos es necesaria, porque la longitud del planeta se hubiera debido contar 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 para seguir un orden regular en la numeracion; hecho esto, de 13 se hubieran restado 2 signos, que son la longitud del nudo, y la resta 11 hubiera sido el argumento de latitud. Pero este orden natural no se puede seguir por causa de ser uso comun empezar á contar otra vez cero en lugar de 12 signos.

617 Lo mismo sería si á las 2 de la tarde quisiéramos sacar en limpio qué tiempo ha corrido desde las 10 de la mañana; no podríamos restar 10 horas de 2 horas, pero añadiríamos 12 horas; de la suma 14 restaríamos 10, y saldrian 4 horas, que es lo que se busca. En esto tambien se supone que las horas se han contado 10, 11, 12, 13, 14.

618 La latitud de los planetas es boreal en los seis primeros signos del argumento de latitud. Porque quando el planeta anda el semicírculo *APMN* que está al norte de la eclíptica, saliendo del nudo ascendiente *A* (613) su latitud es con evidencia boreal, y su argumento de latitud menor que 180.° Despues de andados seis signos ó 180°, el planeta pasa por su nudo descendiente, está al sur de la eclíptica, su latitud es austral, y su argumento de latitud pasa de seis signos.

619 Para calcular la latitud de un planeta, quando se conoce su argumento de latitud, y el ángulo de incli-

na-

nacion que forma la orbita del planeta con la eclíptica, se hace la proporcion siguiente: Fig.

El radio

es al seno del argumento de latitud,

como el seno del ángulo de inclinacion

es al seno de la latitud (III. 709 *D*).

620 *La Reduccion á la eclíptica* es la diferencia entre el argumento de latitud, y la distancia del planeta al nudo contada en la eclíptica, esto es, la diferencia entre *AP* y *AL*. La reduccion á la eclíptica se calcula por medio de la proporcion siguiente (III. 709 *D*):

El radio

es al coseno del ángulo de inclinacion A,

como la tangente del argumento de latitud AP

es á la tangente del arco AL *de la eclíptica.*

Este arco será menor que el argumento de latitud la cantidad de la reduccion á la eclíptica.

621 La reduccion á la eclíptica se resta del argumento de latitud *AP*, para sacar *AL* en la eclíptica, quando la distancia *AP* no llega á 90°; pero en el segundo quadrante del argumento de latitud, la hypotenusa *Ap* es menor que el arco *Al* de la eclíptica, y entonces se debe añadir la reduccion. Porque como *APMN* es un semicírculo, y lo es tambien *ALON*, y en el triangulillo *Npl*, la hypotenusa *Np* es mayor que *Nl*, es preciso que el suplemento *Ap* de la hypotenusa sea menor que el suplemento *Al* del lado *Nl*; luego se debe añadir la diferencia,

Fig. que es la reduccion, al argumento de latitud *Ap* en el segundo quadrante de este argumento, desde 3 hasta 6 signos. En el tercer qüadrante del argumento de latitud, esto es, mas allá del punto *N*, la reduccion será sustractiva como en el primero; y en el último quadrante, esto es, quando el argumento pasare de 9 signos, la reduccion volverá á ser aditiva, lo mismo que desde 3 hasta 6 signos. La reduccion á la eclíptica es nula en los *límites*; quiero decir, á 90° del nudo, como en *M*, porque el arco *AM*, igualmente que el arco *AO*, son de 90° cabales. La figura no lo manifiesta con claridad, porque el semicírculo *AON* está pintado como una linea recta, siendo así que el semicírculo *AMN* está figurado como una linea curva; pero la imaginacion lo suple todo.

622 Las longitudes que se hallan en las tablas astronómicas, se cuentan en la orbita de cada planeta del modo siguiente. Supongamos que el punto *C* de la eclíptica sea el punto equinoccial desde el qual se cuentan las longitudes, y que el arco *AB* de la orbita sea igual al arco *AC* de la eclíptica, el punto *B* es el punto desde donde se cuentan las épocas; de suerte que quando el planeta está en *P*, su longitud es el arco *BAP*, ó la suma de los arcos *CA* y *AP*, y su longitud reducida á la eclíptica es el arco *CAL*.

623 Despues que se ha añadido ó restado, segun los casos, de la longitud del planeta la reduccion á la eclíptica, está averiguada la longitud reducida á la eclíptica, y de esta se valen comunmente los Astrónomos en sus cálculos, bien

bien que hay ocasiones en que es forzoso tomar la longitud verdadera de un planeta en su orbita. En muchos casos sería mas cómodo al formar listas de observaciones, señalar en ellas la longitud en la orbita, que no la longitud reducida á la eclíptica. Fig.

624 Quando se considera la orbita de un planeta como una circunferencia de círculo trazada en la concavidad del cielo, conforme lo hemos practicado, no se quiere dar á entender, ni se supone que el planeta ande realmente un círculo, porque probaremos despues que se mueve en una elipse á veces muy prolongada. Pero todos los puntos de una orbita planetar, vistos desde un punto qualquiera situado dentro de dicha orbita, y en el mismo plano, se refieren en la esfera celeste, y en la region de las fijas, á puntos que por estar todos en el plano de un círculo máximo (611), forman allí el rastro de una circunferencia á qualquiera distancia que dichos puntos estén del punto donde está el observador.

Efectos que resultan de la Inclinacion de las Orbitas planetarias respecto de la Tierra.

625 Sea *S* el sol; *TNR*, la eclíptica ó la órbita anua de la tierra, cuyo plano pasa por el sol; *AMDP*, una orbita 102.
planetaria, cuyo plano tambien pasa (611) por el sol, pero está inclinado al de la eclíptica, y le corta en la comun seccion *ADN*. Conviene figurarse que la parte *AOD* está levantada sobre el plano de nuestra figura, y que la

Fig. parte *DMA* está debajo del papel. Quando el planeta está en el punto *A* de su orbita se halla en el plano mismo de la eclíptica, está en la linea *ADN* comun á ambos planos, y que coge ácia *N* en la eclíptica, igualmente que en la orbita del planeta; pero al dejar el punto *A*, el planeta se levanta mas arriba de la figura que suponemos que representa el plano de la eclíptica, se levanta mas y mas, hasta que llega á *O*, donde su orbita está á la *mayor distancia* de la eclíptica.

626 A este punto que es el mas apartado, se le llama el *Límite boreal*; despues que le pasó baja á *D* donde atraviesa otra vez el plano de la eclíptica, y metiéndose, digamoslo así, debajo de la eclíptica, traza la porcion inferior *DMA* que nos hemos de figurar algunos grados debajo de nuestro plano.

El punto *A* por donde pasa el planeta para subir ácia el polo septentrional al norte de la eclíptica, es el *Nudo ascendiente* (613); el punto *D* por donde pasa para ir á la parte meridional *DMA* de su orbita es el *Nudo descendiente*; la distancia del planeta *P* á su nudo ascendiente, esto es, el arco *AP* de su orbita, y por mejor decir, el ángulo *ASP*, se llama *Argumento de latitud*.

627 Figurándonos la parte *AOD* de la orbita levantada sobre el plano de la figura, imaginaremos una perpendicular *PL* bajada desde el punto *P*, donde se hallará el planeta, hasta el plano de la figura, que es el plano de la eclíp-

eclíptica, *PL* será la altura perpendicular del planeta respecto del plano de la eclíptica. El ángulo *PSL*, en el qual se vé esta distancia, mirándola desde el sol, es la *Latitud heliocéntrica*; el ángulo *PTL* en el qual se vé la misma linea mirándola desde la tierra *T*, es la *Latitud geocéntrica*; la linea *SP* es la verdadera distancia del planeta al sol, ó su radio vector; la linea *SL* es su *Distancia acortada*, ó la distancia reducida á la eclíptica. Asimismo *PT* es la verdadera distancia del planeta á la tierra; *LT* es la distancia acortada del planeta á la tierra. Por ser la linea *PL* perpendicular al plano de la eclíptica, será perpendicular á todas las lineas tiradas en el mismo plano (L 525), y por lo mismo á *TL*; será, pues, recto el ángulo *PLT*. Basta figurarse que la linea *PL* cae á plomo sobre la figura, y se echará de ver que los triángulos *PLS*, *PLT* son ambos rectángulos en el punto *L* adonde vá á parar la perpendicular. Fig. 102. 103.

628 Así como el arco *AP*, ó el ángulo *ASP*, argumento de latitud, es la distancia del planeta á su nudo contándola en la órbita; el ángulo *ASL* es la distancia del planeta al nudo reducida al plano de la eclíptica, esta distancia tomándola respecto del nudo mas inmediato, es menor que la distancia medida en la órbita (620), ó menor que el ángulo *ASP*, porque la linea *PL* que cae perpendicularmente sobre el plano de la eclíptica, tiene su estremo *L* mas inmediato á la linea de los nudos *ASN*, que su vértice *P*, con lo que el ángulo *ASL* es menor que el ángulo *ASP*; la diferencia de estas dos distancias al nudo, la una

Fig. una sobre la orbita, la otra sobre la eclíptica, es lo que llamamos *Reduccion á la ecliptica* (620).

De las Longitudes y Latitudes Geocéntricas de los Planetas.

629 Una vez conocida la orbita de un planeta por medio de las observaciones referidas al sol, y de los métodos que declararemos mas adelante, se puede determinar la longitud heliocéntrica del planeta para un *tiempo qualquiera*, y su radio vector, ó su distancia al centro del sol. Si al mismo tiempo fuere tambien conocida la longitud heliocéntrica de la tierra que siempre está distante seis signos de la del sol, y la distancia del sol á la tierra, tendremos quanto es menester para calcular la longitud del planeta visto desde la tierra.

102. Sea *ST* la distancia del sol á la tierra; *SL*, la distan-
103. cia acortada del planeta al sol; el ángulo *TSL* igual á la diferencia de las longitudes del planeta *P*, y de la tierra *T*, vistos desde el sol, cuyo ángulo se llama *Comutacion*; la resolucion del triángulo *TSL*, del qual conocemos dos lados, y el ángulo que forman, dará á conocer el ángulo en la tierra, ó el ángulo *STL* que se llama *Ángulo de elongacion.* Restando esta elongacion de la longitud del sol, quando el planeta estuviere al occidente, ó á la derecha del sol, se sacará la longitud geocéntrica del planeta, esto es el punto de la eclíptica celeste, al qual corresponde la linea *TL*, tirada desde la tierra al lugar del planeta reducido á la eclíptica.

Para resolver el triángulo *SLT*, en el qual conocemos

mos dos lados, y el ángulo que forman, haremos esta analogía (33): *El lado menor es al mayor, como el radio es á la tangente de un ángulo*, del qual se restarán 45°, y la tangente de la resta multiplicada por la semisuma de los ángulos incógnitos, dará la tangente de la semidiferencia de los ángulos incógnitos, la qual se añadirá á la semisuma ó se restará para sacar el ángulo de elongacion; este ángulo es el menor de los ángulos incógnitos, quando se trata de un planeta inferior, y en este caso se resta la semidiferencia; es el mayor quando se trata de un planeta superior, y entonces se suman; con esto están determinados todos los ángulos del triángulo *SLT*. Fig.

630 Para facilitar el cálculo del lugar geocéntrico de un planeta, se pueden practicar tres reglas, que son generales, y le dispensan al calculador el trabajo de formar una figura, ó de examinar la situacion de los tres puntos *S*, *T*, *L*.

Se forma primero el ángulo de comutacion, restando de la longitud del sol la de los planetas que están mas distantes que la tierra, esto es, de los planetas superiores Marte, Júpiter, y Saturno; pero se resta el lugar del sol del lugar del planeta, quando es infierior, porque como este tiene mas movimiento que la tierra, el ángulo de comutacion irá siempre creciendo por razon del exceso que el movimiento del planeta lleva al de la tierra, mediante la sustraccion de este. Para hallar realmente el ángulo de comutacion *TSL*, se debería hacer uso de la longitud de la tierra *T*, y no de la del sol,

Fig. sol, pero toda la diferencia que resulta de no hacerlo así, es que sale una comutacion 6 signos mayor; y como tomaremos la mitad de la comutacion, y despues el suplemento de esta mitad, si pasare de 6 signos, siempre hallaremos por este camino la semisuma de los ángulos incógnitos que necesitamos. Con efecto, si el ángulo de comutacion fuese de 30°, la semisuma de los ángulos incógnitos sería de 75°, pero tomando la comutacion de 210°, sacamos 105 para su mitad, y el suplemento siempre es $75.^{\circ}$

Para resolver el triángulo *TSL* diremos: *La menor de las dos distancias es á la mayor, como el radio es á la tangente de un ángulo*, del qual se restarán 45°, la tangente del residuo multiplicada por la de la semicomutacion, dará la tangente de la semidiferencia de los ángulos incógnitos.

Despues de resuelto el triángulo *TSL*, si se tratare de un planeta superior, se añadirá la semidiferencia hallada de los ángulos incógnitos á la semicomutacion (ó á su suplemento si dicha semicomutacion pasare de 3^{s}), esto es, á la semisuma de los ángulos incógnitos; porque el ángulo que se busca es el mayor de los dos; pero se resta respecto de los planetas inferiores, y sale el ángulo de elongacion.

La elongacion se resta de la longitud del sol, si en los planetas superiores la comutacion no llega á 6 signos, y en los planetas inferiores si pasa de los 6 signos; la elongacion se añade á la longitud del sol en los planetas superiores, si la comutacion pasa de seis signos, y en los planetas inferiores si no llega. La razon de esta práctica es muy obvia,

por-

porque la comutacion, qual la hemos formado, espresa respecto de los planetas inferiores su distancia á la conjuncion superior, ó al punto donde están opuestos á la tierra; si esta distancia pasa de 6 signos, han pasado su conjuncion inferior, son mas orientales que la tierra, pero nos parecen mas occidentales que el sol, luego su longitud es menor, y la elongacion se debe restar entonces de la longitud del sol; los demás casos de la regla son una consecuencia de este. Fig.

631 La *Latitud geocéntrica*, ó el ángulo TLP se hallará por medio de la proporcion siguiente: ***El seno de la comutacion es al seno de la elongacion, como la tangente de la latitud heliocéntrica es á la tangente de la latitud geocéntrica.***

En el triángulo PSL rectángulo en L (627), tenemos esta proporcion $SL : PL :: R : \text{tang}\ PSL$; en el triángulo PLT tambien rectángulo en L, tenemos otra proporcion $TL : PL :: R : \text{tang}\ LTP$. De la primera proporcion sacamos esta equacion $PL \cdot R = SL \cdot \text{tang}\ PSL$, y la segunda dá estotra $PL \cdot R = TL \cdot \text{tang}\ LTP$; luego $SL \cdot \text{tang}\ PSL = TL \cdot \text{tang}\ LTP$, de donde sacaremos estotra proporcion $TL : SL :: \text{tang}\ PSL : \text{tang}\ LTP$. Pero en el triángulo rectilíneo TLS tenemos (I. 671) $TL : SL :: \text{sen}\ LST : \text{sen}\ LTS$; luego $\text{sen}\ LST : \text{sen}\ LTS :: \text{tang}\ PSL : \text{tang}\ LTP$. 102. 103.

632 Despues de averiguada la longitud geocéntrica de un planeta, suele ofrecerse averiguar su distancia á la tierra, como PT. Se busca primero su distancia acortada, ó la distancia del planeta al sol reducida á la eclíptica SL; pa-

Fig. para lo qual basta multiplicar el radio vector *SP*, ó la verdadera distancia del planeta al sol en su orbita, por el coseno de la latitud heliocéntrica, ó del ángulo *PSL*. Con efecto, como la linea *PL* es perpendicular al plano de la eclíptica (627), el triángulo *SLP* es rectángulo en *L*; luego se saca (I. 664) *R* : *SP* :: sen *SPL*, ó cos *PSL*: *SL*; y como el radio siempre se toma por la unidad, será *SL* = *SP* . cos *PSL*.

En el triángulo *PST* conocemos todos los ángulos (629) y el lado *SL* distancia del sol al planeta; haremos, pues, esta proporcion, sen *STL* : *SL* :: sen *LST* : *TL*; quiero decir, que *el seno de la elongacion es al seno de la comutacion, como la distancia acortada del planeta al sol es á la distancia acortada del planeta á la tierra.*

Finalmente, esta distancia acortada *TL*, dividida por el coseno de la latitud geocéntrica *LTP* (631) dará la distancia verdadera *TP* del planeta á la tierra; por la misma razon que el producto de la distancia verdadera multiplicada por el coseno de la latitud heliocéntrica, dá la distancia acortada del planeta al sol.

633 Del mismo triángulo *LST*, que nos ha dado la longitud geocéntrica quando se supone conocida la longitud heliocéntrica, dará tambien á conocer esta por medio de la primera. Hay ocasiones en que los Astrónomos se vén precisados á calcular por las tablas la *Paralaxe de la grande orbita*, ó la paralaxe anua; quiero decir, el ángulo *SLT*, que dá la diferencia entre el lugar del planeta visto desde la tier-

tierra, y el lugar visto desde el sol. Pero solo quando esta diferencia es muy corta se puede sacar de las tablas con bastante puntualidad, porque se debe suponer que se conozcan las distancias al sol, y el ángulo de comutacion, ó el ángulo de elongacion *LTS*. Si se conociere el ángulo de elongacion por medio de alguna observacion, se dirá: *la distancia acortada* SL *es al seno de la elongacion, como la distancia de la tierra al sol* ST *es al seno del ángulo* L, que es la paralaxe anua que se busca. Fig.

634 Las desigualdades que notamos en el movimiento de los planetas por razon del movimiento de la tierra, esto es, las paralaxes anuas sirven para averiguar sus distancias. 104.

Observó Copérnico el día 25 de Febrero de 1514, á las cinco de la mañana, la longitud de Saturno 209°, suponiendo *S* el centro del sol; *L*, la tierra; *F*, Saturno; sacaba por el cálculo de los movimientos medios observados en las oposiciones, y de las equaciones de Saturno y de la tierra determinadas yá, que si la tierra estuviera en *K*, hubiéramos visto Saturno á 203° 16′, esta era su longitud vista desde el sol; la diferencia de 5° 44′ era el ángulo *KFL* que nosotros llamamos *la Paralaxe anua*. El ángulo *LSK* ó *LSF*, diferencia entre el lugar de Saturno *F* visto desde el sol, y el lugar de la tierra *L* calculado para el mismo tiempo, era de 67° 35′, que es lo que hoy dia llamamos *Comutacion*; luego el ángulo *L* era de 106° 41.′ Una vez conocidos todos los ángulos de este triángulo se sa-

Fig. sabia qué razon habia entre sus lados *SL* y *SF*, esto es, entre la distancia de la tierra al sol, y la de Saturno al sol; esta razon se hallaba ser la de 1 á 9,6 con corta diferencia; quiero decir, que Saturno estaba $9\frac{1}{2}$ veces mas apartado del sol *S* que la tierra *L*.

Lo propio diremos de otro planeta qualquiera. Quando se ha observado muchas veces su oposicion al sol, ó su longitud en el tiempo que es la misma vista desde la tierra que vista desde el sol, como quando el sol *S*, la tierra *K*, y el planeta *F* están en una misma linea, podemos calcular puntualmente dicha longitud vista desde el sol, para el tiempo en que la tierra está 90° lejos de allí, esto es, ácia *L*, y es el ángulo de comutacion $FSL = 90^\circ$. Si se observa entonces la longitud del planeta vista desde la tierra, se la hallará diferente de muchos grados, y esta cantidad será el ángulo *SFL*, paralaxe anua del planeta *F*.

635 La latitud geocéntrica de los planetas es la que determina lo que llamamos comunmente *el Ancho del zodiaco*. Venus es de todos los planetas el que tiene mayor latitud. En el mes de Agosto de 1756 era de $8' 24''$, y en 1700 se observó de $8' 40''$, y puede ser todavía mayor. Por consiguiente el ancho del zodiaco es por lo menos de $17^\circ \frac{1}{3}$ en este siglo.

Duracion de la revolucion de los Planetas Primarios, y movimiento medio de cada uno de ellos.

636 Las conjunciones, y oposiciones de los planetas

á

á que apelamos para determinar la duracion de sus revoluciones medias, se han de tomar muy distantes unas de otras, á fin de que el efecto de las equaciones ó desigualdades periódicas desaparezca, y quede como nulo hallándose repartido entre un número muy dilatado de observaciones, conforme se practicó respecto del sol (553). Fig.

Como determinar lo que dura la revolucion del sol es lo propio que señalar quanto dura la de la tierra, queda esta determinada (554), y pasaremos á determinar la de los demás planetas.

El primer paso de Mercurio por el sol, de que hay noticia se observó el dia 7 de Noviembre de 1631. Segun *Casini* á las 7^h $50'$ de la mañana, tiempo de la conjuncion, el lugar verdadero de Mercurio era á 1^s 14° $41'$ $35''$, por la observacion; compara este paso con el del año 1723, que Mercurio tenia el dia 9 de Noviembre por la tarde, 1^s 16° $47'$ $20''$ de longitud, á 5^h $29'$ de tiempo verdadero. El intervalo de una á otra observacion es de 92 años, de los quales 22 son bisiestos, mas 2^d 9^h $39'$, y el intervalo de tiempo medio era el mismo que el intervalo de tiempo verdadero. En el discurso de estos 92 años Mercurio habia hecho 382 revoluciones enteras mas 2° $5'$ $45''$; haremos, pues, esta proporcion: 92 años comunes 24^d 9^h $39'$ son á 382 veces 360° mas 2° $5'$ $45''$, como 365 dias son á la cantidad del movimiento anuo de Mercurio respecto de los equinoccios, que con esto se saca de 1493° $43'$ $11''$, 73, que componen quatro revolu-

Fig. ciones enteras de 360° mas $1^{s}\ 23^{\circ}\ 43'\ 11''\ 73$, y el movimiento diurno $4^{\circ}\ 5'\ 32''\ 577$; de donde se saca por una regla de tres la duracion de la revolucion media de 87 dias $23^{h}\ 14'\ 20''$, 9.

637 Confesamos que con este método se precaven los errores procedentes de la paralaxe de la grande orbita, pero no los que se originan de la equacion del centro. Como esta varía segun muda de lugar su orbita, no es posible determinar puntualmente el movimiento medio, y la duracion de la revolucion de Mercurio, sin conocer primero el movimiento del Afelio, y llevarle en cuenta, conforme lo practicaremos adelante. Mediante esta prevencion ha hallado Mr. de la Lande el movimiento secular de Mercurio, $2^{s}\ 14^{\circ}\ 12'\ 10''$, de lo que ha inferido que su revolucion media es de $87^{d}\ 23^{h}\ 14'\ 25''\ 9$.

638 Por una observacion de 25 de Diciembre del año de 136, se sabe que el lugar de Venus visto desde la tierra á las 4^{h} de la tarde era en $10^{s}\ 20^{\circ}\ 13'\ 45''$; por la observacion de 17 de Diciembre de 1594, Venus á las $4^{h}\ 30'$ de la tarde estaba en $10^{s}\ 23^{\circ}\ 1'\ 36''$, esto es, $2^{\circ}\ 47'\ 51''$ mas adelantado; y como, segun Casini, Venus anda este espacio en un dia $17^{h}\ 54'$, infirió que el dia 15 de Diciembre de 1594 á $10^{h}\ 36'$ de la noche se hallaba en el mismo lugar que al tiempo de la primera observacion. Luego en el discurso de 1458 años comunes $354^{d}\ 6^{h}\ 36'$, Venus habia hecho 2370 revoluciones cabales, porque supone que se sepa de antemano que necesita

al

al poco mas ó menos $224^{d}\frac{2}{3}$ para concluir una revolucion. Dividiendo, pues, el intervalo de tiempo por 2370 se sacan para la revolucion media de Venus $224^{d}\ 16^{h}\ 39'\ 4''$, y el movimiento anuo de $7^{s}\ 14^{\circ}\ 47'\ 45''$, además del círculo entero. Fig.

639. El dia 13 de Diciembre 130 años antes de Christo á las $11^{h}\ 48'$, tiempo reducido al meridiano de París, la longitud de Marte era de $2^{s}\ 21^{\circ}\ 22'\ 50''$; el dia 4 de Enero de 1709, á $5^{h}\ 48'$ de la tarde, Marte se halló otra vez en oposicion en $3^{s}\ 14^{\circ}\ 18'\ 25''$ de longitud, esto es, $22^{\circ}\ 55'\ 35''$ mas adelantado que al tiempo de la primera observacion. Como el movimiento de las estrellas en el mismo discurso de tiempo es de la misma cantidad con corta diferencia, si se supone el movimiento del Afelio de Marte igual con el de las estrellas fijas, Marte hubo de estar en ambas observaciones á igual distancia de su Afelio. El intervalo de una observacion á otra es de 1578 años, de los quales 394 son bisiestos, y $11^{d}\ 18^{h}$ ó 576375^{d} y 18^{h}, en los quales Marte ha hecho 839 revoluciones; haremos, pues, esta proporcion : 839 veces 360° mas $22^{\circ}\ 55'\ 35''$ son á 360°, como $576375^{d}\ 18^{h}$ son á un quarto término, que se halla ser de $686^{d}\ 22^{h}\ 16'$, esto es la que dura la revolucion de Marte.

Casini tomó un medio entre las determinaciones diferentes, que resultan de tres observaciones de Ptolomeo, y saca la revolucion media de Marte de $686^{d}\ 22^{h}\ 18'\ 39''$, y su movimiento medio $6^{s}\ 11^{\circ}\ 17'\ 9''\frac{1}{2}$ por año.

Fig. Todo bien considerado supone Mr. de la Lande en sus tablas que el movimiento secular de Marte es de $2^s\ 1^o\ 42'\ 10''$, de donde saca que su revolucion es de $686^d\ 22^h\ 18'\ 27''\ 3$.

640 Acerca de Júpiter hay tres oposiciones observadas por Ptolomeo reducidas por Casini como sigue.

Años.	Dias.	Horas.	Longitudes.
133	15 de Mayo.	$23^h\ 3'$	$7^s\ 23^o\ 22'\ 22''$
136	1 de Sept.	4 10	11 7 47 35
137	8 de Oct.	3 18	0 14 19 0

De la comparacion de estas tres observaciones con las oposiciones de 1699, 1713 y 1714 se saca que la revolucion dura 11 años comunes $315^d\ 10^h\ 0'$ ó $17^h\ 6'$, ó $16^h\ 32'$, y tomando un medio 11 años $315^d\ 14^h\ 36'$, de donde resulta que el movimiento anuo es de $30^o\ 20'\ 31''\ 50.'''$ En nuestras tablas el movimiento secular es de $5^s\ 6^o\ 27'\ 30''$, y la revolucion de $4330^d\ 8^h\ 58'\ 27''\ 3$, pero era mas larga en los siglos pasados.

641 De la observacion mas antigua que ha quedado de Saturno hecha por los Caldeos saca Casini que el dia 2 de Marzo, 228 años antes de Christo á la 1^h de la tarde Marte estaba en oposicion con el sol, y tenia $5^s\ 8^o\ 23'$ de longitud. El dia 26 de Febrero de 1714, á $8^h\ 15'$ tenia $5^s\ 7^o\ 56'\ 46''$, de una observacion á otra hay un intervalo de 1943 años comunes $105^d\ 7^h\ 15'$, de don-

donde infirió Casini que la revolucion de Saturno dura 29 años comunes $162^d\ 4^h\ 27'$, y el movimiento anuo de $12^\circ\ 13'\ 35''\ 14'''$; pero segun Mr. de la Lande no es mas que de $12^\circ\ 13'\ 26''\frac{1}{2}$, y la revolucion es de $10749^d\ 7^h\ 21'\ 50''$ o. Fig.

No está todavia bien averiguado el movimiento de Saturno, ni lo que dura su revolucion: parece que el movimiento se vá atrasando mas y mas, y que su revolucion dura mas que antes, y hay una diferencia notable entre sus movimientos observados en distintas circunstancias.

642 La revolucion de un planeta respecto de las estrellas fijas, es mas larga que la revolucion respecto de los equinoccios; porque las estrellas adelantan continuamente respecto de los equinoccios, por lo mismo gasta mas tiempo el planeta para llegar á las estrellas que para alcanzar el equinoccio. Así el movimiento de Saturno respecto de los equinoccios, en el discurso de 100 años es de tres circunferencias mas $4^s\ 23^\circ\ 6'\ 0''$, por las tablas de Haley; la precesion secular es $5034''$ que se han de restar del movimiento de Saturno, y saldrá su movimiento respecto de las estrellas $4398126.''$ Pero este movimiento es á 360° ó $1296000''$, como la duracion de un siglo ó 3155760000 es á la duracion de la revolucion sideral. Será, pues, esta de $929910821.''$, ó $10762^d\ 20^h\ 33'\ 41''$, esto es, $12^d\ 7^h\ 18'\ 59''$ mas larga que la revolucion trópica.

Revolucion de los Planetas segun las Tablas de Mr. de la Lande.

Planetas.	Movimiento secular respecto de los equinoccios.				Révolucion trópica.					Revolucion sideral.					Movimiento diurno.			
Mercurio.	2ˢ	14°	12′	10″	87ᵈ	23ʰ	14′	25″	9	87ᵈ	23ʰ	15′	37″	0	4°	5′	32″	570376
Venus.	6	19	12	12	224	16	41	32	4	224	16	49	12	7	1	36	7	806488
El Sol.	0	0	46	10	365	5	48	45	5	365	6	9	11	2	0	59	8	330458
Marte.	2	1	42	10	686	22	18	27	3	686	23	30	43	3	0	31	26	656536
Júpiter.	5	6	27	30	4330	8	58	27	3	4332	8	51	25	6	0	4	59	281314
Saturno.	4	23	14	30	10749	7	21	50	0	10761	14	36	42	5		2	0	565914

Para sacar el movimiento secular total de un planeta respecto de las estrellas fijas, del qual se nos ofrecerá hacer uso, se deberian restar desde luego 5034″ del movimiento respecto de los equinoccios; añadiéndole despues tantas veces 360° quantas revoluciones hay en un siglo.

De las Equaciones seculares que se han de aplicar á los movimientos medios de Júpiter y Saturno.

643 A pesar de las desigualdades periódicas que se notan en los movimientos planetarios, no dejan de ser iguales sus revoluciones quando se considera el regreso del planeta á un mismo punto de su orbita. No obstante, despues de comparadas unas con otras las observaciones hechas en diferentes siglos, se ha notado un atraso en el movimiento medio de Saturno, y una alteracion en el de Júpiter, ahora hablaremos de esta desigualdad secular.

644 La equacion secular de Saturno es facil de averiguar por medio de las antiguas observaciones. La primera de todas se halla en el Almagesto de Ptolomeo; se obser-

servó dos dedos Saturno debajo de la estrella γ, que está Fig. en el hombro austral de Virgo, el dia 2 de Marzo del año 228 antes de Christo, aquel dia se halló en oposicion á 1^{h} siendo su longitud $5^{s}\ 8^{o}\ 23'$, y su latitud boreal de $2^{o}\ 50'$, segun el cálculo de Casini. Comparando esta oposicion con la que se verificó el dia 26 de Febrero de 1714 á $8^{h}\ 15'$ en $5^{s}\ 7^{o}\ 56'\ 46''$, el intervalo es de 1943 años comunes $105^{d}\ 7^{h}\ 15'$, en el discurso de los quales Saturno habia hecho 66 revoluciones menos $28'\ 14''$, de donde se sigue que el movimiento de Saturno era de $12^{o}\ 13'\ 35''\ 14'''$ por año. Le supone con efecto en sus tablas de $12^{o}\ 13'\ 36''$; este es segun Casini el movimiento de Saturno considerado en el intervalo de cerca de veinte siglos, siendo así que Halley en sus tablas le supone de $12^{o}\ 13'\ 21''$ no mas en este siglo.

Despues de comparar las oposiciones de Saturno de 1594, 1595, 1596 y 1597, con las de 1713, 1714, 1715, 1716 y 1717 ha hallado Mr. de la Lande el movimiento medio de Saturno $16''$ menor cada año que el que señala Casini en sus tablas, y la duracion de su revolucion cerca de 4 dias mayor. Escogió el citado Astrónomo para estas comparaciones observaciones hechas acerca de las distancias medias, á fin de que el error que se puede padecer acerca de la equacion máxima y del lugar del Afelio fuese insensible en este cotejo. Tomó otras hechas á unos 120 años de distancia, á fin de que la situacion de Júpiter respecto de Saturno, siendo con corta

Fig. diferencia una misma en ambos casos, hubiese menos que recelar por parte de la fuerza atractiva de Júpiter, de la qual se hará individual mencion en la Astronomía Física.

645 Si se hace uso del movimiento medio hallado en el discurso de dichos 120 años, para calcular la observacion hecha 228 años antes de Christo, se saca una longitud 7° mayor de lo que corresponde. Esto prueba que se ha hecho uso de un movimiento demasiado pequeño, y que es menor en este siglo de lo que fue en los otros veinte siglos, se deberían, pues, quitar 7° de dicha longitud media hallada en virtud del movimiento medio que se verifica en este siglo, y esta equacion secular de 7° manifiesta bastante el atraso de Saturno. Pero las observaciones hechas de 30 años á esta parte han obligado á Mr. de la Lande á aumentar un poco el movimiento anuo de Saturno, y darle 12° 13′ 26″, 58, y esto dá 4^s 23° 14′ 30″ en cien años; le ha servido para hallar la longitud media de Saturno en tiempos remotos, empezando desde el año de 1750 que le ha servido de época para calcular las longitudes medias, sea para los siglos precedentes, sea para los siguientes. Ha calculado, pues, las cinco observaciones antiguas que trahe Ptolomeo, ha hallado que para hacer los errores positivos iguales á los negativos, y guardar quanto sea posible un medio entre dichas cinco observaciones habia de suponer la equacion de Saturno de 47″ para el primer siglo, cuya cantidad dá 3° 23′ 33″ para el año 138 de Christo. Añadiendo el logaritmo constan-

te

te 7,67210 con el duplo del logaritmo de los años que preceden, ó siguen al año de 1750, sale el logaritmo de la equacion secular en segundos, que se deben restar de la longitud media calculada con el movimiento uniforme de $4^s\ 23^\circ\ 14'\ 30''$ por siglo. De este modo la ha usado Mr. de la Lande en sus tablas de Saturno, que publicaremos, quien mediante las correcciones que ha hecho á las observaciones de Ptolomeo, halla que el lugar de Saturno para el año de 228 es de $5^s\ 9^\circ\ 6'$. Fig.

646 Para probar que la equacion secular ha de ser como los quadrados de los tiempos, no acudiremos á las observaciones, porque no las tenemos, ni bastante antiguas, ni bastante exactas, pero lo probaremos con un argumento muy natural. Como los grados de velocidad que Saturno pierde en virtud de la fuerza que causa su equacion secular (parece que esta es la atraccion de Júpiter) son muy lentos, no se pueden suponer iguales sino en tiempos iguales; y entonces el espacio andado es como el quadrado de los tiempos, del mismo modo que en la caida de los cuerpos graves.

647 El movimiento medio de Saturno en diferentes siglos padece otras desigualdades que no se pueden esplicar por las equaciones seculares; su revolucion media es diferente segun las circunstancias en que se la observa, sin que la diferencia se puede atribuir á la atraccion de Júpiter.

En 1686 y en 1745, el error de las tablas de Halley era de $3'\frac{1}{2}$, de modo que en este intervalo de 59 años el movimiento de Saturno era realmente qual le dan las ta-

Fig. tablas de Halley, esto es, de 12° 13′ 21″ 46 por año, la anomalía media de Saturno era en ambos casos de 8ˢ 22°. Por consiguiente qualquiera error que se padeciese en el lugar del Afelio ♄ en la equacion de la orbita de Saturno, no puede resultar ninguna diferencia; la comutacion entre Júpiter y Saturno era de 1ˢ 17° en el primer caso, y 1ˢ 8° en el segundo, esta diferencia de configuracion es muy corta, para que la accion de Júpiter haya podido ser sensiblemente diferente.

Al contrario en 1701 y 1760, el error de las tablas ha sido de $8'\frac{1}{2}$ y de $21\frac{1}{2}$, quiero decir en un intervalo igual de tiempo ha crecido 13.′ Luego el movimiento de Saturno en dicho intervalo de tiempo, ha sido 13 minutos de grado mayor, de donde resulta que sus revoluciones son mas cortas seis dias y medio, que las revoluciones que habia hecho desde 1616 hasta 1745. Sin embargo la anomalia media era de 3ˢ 1° en ambas observaciones de 1701 y 1760, la comutacion ó el ángulo en el sol entre Júpiter y Saturno era de 19° en 1701, de 30° en 1760. Por consiguiente el espresado error en el movimiento medio no puede provenir, á lo que parece, ni del error que se puede padecer en los elementos de Saturno, ní de la atraccion de Júpiter.

648 Es, pues, constante que fuera de la atraccion de Júpiter, hay en Saturno una desigualdad cuya causa ha de ser otra que la accion de Júpiter; cuya causa con una misma configuracion con Júpiter, obra un

un efecto mayor que el que resulta de las mayores diferencias en la posicion de Júpiter respecto de Saturno, y cuyo efecto es sensible particularmente desde principios de este siglo. Quál sea esta causa no se sabe; pero es constante que las últimas revoluciones de Saturno discrepan unas de otras mas de una semana, aun descartando todas las desigualdades conocidas, sin que una diferencia tan notable pueda provenir ni de la atraccion de Júpiter, ni de ninguna de las demás causas que conocemos. Fig.

En consecuencia de esta desigualdad, dice Mr. de la Lande, no he podido esperar el cumplir en mis nuevas tablas de Saturno con las observaciones modernas y con las antiguas á un mismo tiempo. Pero como para las urgencias actuales de la Astronomía nos importa tener tablas que concuerden con el estado presente de los movimientos celestes, me he gobernado por las observaciones hechas de 30 años á esta parte; he supuesto el movimiento secular ♄ de 4^s 23° $14'$ $30''$, el de un año comun 12° $13'$ $26''$ 558245, el movimiento diurno $2'$ $0''$ 565913, este movimiento viene á ser medio entre los movimientos medios que ha habido desde un siglo acá, y este es el que se debe usar en las investigaciones del Afelio y de la excentricidad de Saturno, á no ser que se quiera hacer uso de un movimiento diferente en diferentes períodos.

649 Por lo que mira á la equacion secular de Júpiter Mr. Wargentin, que ha hecho muchísimos cálculos pertenecientes á la teórica de este planeta, supone en las tablas que ha

Fig. ha formado, el movimiento secular $5^s\ 6^\circ\ 27'\ 30''$ con una equacion secular de $18''$ para el primer siglo; pero Mr. de la Lande la saca de $30''\frac{1}{2}$.

Si se quiere hallar la equacion secular para un tiempo qualquiera, por egemplo, para el año 240 antes de Christo, que dista 2000 años de la época de 1760, se dirá: el quadrado de 100 es al quadrado de 2000, como $30''\frac{1}{2}$ son á un quarto término, que será de $12200''$ ó $3^\circ\ 23'\ 20''$, esta es la aceleracion para 2000 años. En este supuesto se debe sumar el logaritmo constante 7,48430 con el duplo del logaritmo del número de años, contando desde 1760, y saldrá el logaritmo del número de segundos que forma la equacion secular de nuestras tablas.

Regreso de los Planetas á la misma situacion respecto de la Tierra.

650 La *revolucion Synódica* de un planeta respecto del sol, ó respecto de la tierra quando la suponemos vista desde el sol es el regreso de dicho planeta á su conjuncion. Es facil de determinar la duracion de este periódo por medio de la diferencia entre el movimiento del planeta y el del sol, para cierto intervalo de tiempo, porque esta diferencia es al tiempo correspondiente como 360° son á la duracion de la revolucion synódica. Así para Mercurio el movimiento total en un siglo es $538107133''$; como el de la tierra es $129602770''$, si se divide el producto de un siglo por 360° ó

4.

4089864960000000″ por la diferencia de los dos movimientos 408504363″, saldrán 115^d 21^h 3′ 22″, 3 para la revolucion synódica de Mercurio, ó el intervalo medio de su regreso á la conjuncion. Fig.

Por el mismo método se sacará la revolucion synódica de Venus, 583^d 22^h 7′ 6″ 4; la de Marte 2 años 49^d 22^h 28′ 26″ 1; la de Júpiter 398^d 21^h 15′ 44″ 6; la de Saturno, 378^d 2^h 8′ 7″ 8.

651 La situacion aparente de un planeta visto desde la tierra, pende no solo del lugar donde está en realidad, mas tambien del sitio desde el qual se la ve, esto es del lugar de la tierra. Porque en virtud de la paralaxe anua (517), un planeta situado en un mismo lugar, puede parecer mas oriental, si la tierra es mas occidental; y puede parecer tambien en un lugar totalmente opuesto. Así para que un planeta esté para nosotros á la misma longitud donde se halló una vez, es preciso que el planeta y la tierra se hayan restituido al mismo punto de su orbita, esto es á la misma longitud y á la misma distancia del sol; entonces la longitud y la latitud vistas desde la tierra, como tambien el paso por el meridiano, el orto y ocaso del planeta, serán los mismos que antes, y empezarán por el mismo orden.

Para averiguar al cabo de quanto tiempo la tierra y un planeta habrán vuelto al mismo punto del cielo, se ha de buscar en las tablas de sus movimientos medios, una suma de años que haga tambien para el planeta una su-

Fig. suma de revoluciones, con corta diferencia.

652 Mercurio en el discurso de 13 años, de los quales 3 son bisiestos, y tres dias mas, hace 54 revoluciones, ó solamente $2^{\circ}\ 55'$ mas; la tierra por su parte hace 13 revoluciones y $2^{\circ}\ 49'$ mas, de suerte que al cabo de 13 años y 3 dias Mercurio se ha de hallar casi en el mismo lugar respeto de la tierra; no serán mas que 13 años y 2 dias, si en los 13 años hubiere 4 *bisiestos*. Así el dia 2 de Enero de 1749 y el dia 5 de *Enero* de 1762, Mercurio hubo de pasar por el meridiano á la misma hora ($10^{h}\ 41'$ ó $42'$ de la mañana), y con esto queda comprobado el cálculo que es estremadamente largo. Pero si contáramos desde el dia 2 de Marzo de 1747, deberíamos parar en el dia 4 de Marzo de 1760, porque en estos 13 años hay quatro dias *intercalares*, es á saber, el 29 de Febrero de 1748, 1752, 1756 y 1760.

653 Venus al cabo de 8 años se halla $1^{\circ}\ 32'$ no mas apartado del lugar donde estaba, y la tierra se halla $4'$ mas lejos, por manera que la situacion aparente de Venus viene á ser la misma; si tomamos 8 años menos dos dias se halla Venus distante $14'$ no mas del sol. En el intervalo de los 8 años menos dos dias siempre hay dos bisiestos; así en todos los casos se cuenta lo mismo. Por egemplo el dia 10 de Junio de 1765 y el dia 8 de Junio de 1773, Venus pasa por el meridiano á medio dia y $3'$; si comparamos el dia 4 de Marzo de 1764 con el dia

dia 2 de Marzo de 1772, habrá igualmente 8 años menos dos dias. Fig.

654 Marte, en 15 años menos 18 dias ha andado 11ˢ 11° 26′, y la tierra 11ˢ 11° 38′, así su situacion aparente viene á ser con corta diferencia la misma, esto se verificaría al cabo de 15 años menos 19 dias, si hubiese 4 bisiestos, como desde 20 de Enero de 1742 hasta 1 de Enero de 1757. En 79 años y 4 dias, Marte anda 0ˢ 3° 39′, y la tierra 0ˢ 3° 48′; así este intervalo de tiempo los restituye á la misma situacion con diferencia de 9′. Suponemos que haya 19 bisiestos en dicho intervalo, si hubiera 20, serian 79 años y 3 dias como desde 1702 á 1781.

655 Júpiter, al cabo de 83 años está 12′ mas adelantado, y la tierra 6′ menos, de modo que este período es uno de los mas exactos que sea posible hallar en un número cabal de años, suponemos que no haya mas que 20 bisiestos en dicho intervalo de años; si hubiera 21, como desde 1702 hasta 1785, serian 89 años menos un dia.

El período de 12 años y 5 dias se arrima mucho en quanto á la exactitud al antecedente; porque Júpiter anda 4° 47′ ademas de una revolucion, y la tierra 5° 1′, de modo que no hay entre los dos mas diferencia que 14′. Conviene saber si hay 3 bisiestos no mas en dicho intervalo, ó si hay 4. Por egemplo desde el dia 26 de Febrero de 1752 hasta 2 de Marzo de 1764, la diferencia

Fig. ferencia es de 14′, y el intervalo de 12 años y 5 dias; pero si empezáramos desde el dia 26 de Febrero de 1753, sería preciso ir hasta el 3 de Marzo de 1765, para completar los 12 años y 5 dias, porque no hay mas que 3 intercalares.

656 Saturno, en 59 años y 2 dias, anda 1° 45′, y la Tierra 1° 41′; con esto Saturno y la Tierra vienen á hallarse en la misma anomalia, á la misma distancia del sol, y á la misma distancia uno de otro. Este período proporciona hallar casi sin cálculo, las posiciones de Saturno, para los que calculan Ephemérides.

De las Estaciones y Retrogradaciones de los Planetas.

657 Los planetas inferiores, es á saber Mercurio y Venus, dan la vuelta al rededor del sol en menos tiempo que la tierra; por esta razon deben parecer directos en sus conjunciones superiores, y retrogrados en sus conjunciones inferiores. Sea *ABT* la orbita de la tierra, y
105. *PEMR* la orbita de Venus ó de Mercurio; quando la tierra está en *T*, y se halla Venus en *P* en su conjuncion superior, quiero decir mas allá del sol, parece que camina, y camina con efecto de occidente á oriente, quiero decir ácia la izquierda, desde *A* ácia *B*. Pero si estándo la tierra en *T*, se halla Venus en *M* en su conjuncion inferior, nos parecerá que camina ácia la derecha, porque camina desde *M* á *R* mas aprisa de lo que la tierra camina de *T* á *C*; será, pues, Venus retrogrado, al parecer, en su

su conjuncion inferior. Porque aunque sigue el mismo rumbo que quando estaba en *P*, camina respecto de nosotros en direccion contraria; en el primer caso caminaba desde *P* á *E*, y en el segundo parece que camina ácia la derecha desde *E* á *M* contra el orden de los signos. Fig.

658 Entre el movimiento directo y el movimiento retrogrado hay indispensablemente un instante de reposo, un instante en que el planeta parece *estacionario*. Entonces deja de ser directo, y está para ser retrogrado; pero no es ni uno ni otro, está en el punto donde se unen los arcos de direccion y de retrogradacion; y este es el punto que hemos de determinar para saber quanto dura la retrogradacion. Si la tierra se mantuviera firme en *T*, Venus nos parecería estacionaria quando se hallaría en la tangente *TE*, tirada desde la tierra á la orbita del planeta; porque hay en este punto *E* un arco pequeño de la orbita que se confunde con la tangente *TE*, y todo el tiempo que el planeta anda este arco de su orbita, está respecto de nosotros en la misma linea, en el mismo rayo, y corresponde al mismo punto del cielo, con tal que se esté la tierra fija en *T*.

659 Pero como en el estado actual de las cosas la tierra tiene un movimiento desde *T* á *C*, basta esto para que parezca que el planeta le tiene ácia una direccion contraria, y ácia la izquierda, bien que esté sobre la tangente *TE*. Pero al cabo de algun tiempo sucederá que el movimiento *ED* del planeta, y el movimiento *GF* de la 106.

Fig. tierra en el mismo tiempo, serán tales que los rayos visuales *GE*, *FD* serán paralelos uno á otro, nos parecerá en todo el discurso de dicho tiempo que el planeta corresponde al mismo punto de la eclíptica, nos parecerá estacionario (245).

660 Los planetas superiores están respecto de la tierra, del mismo modo que la tierra respecto de los planetas inferiores. Quando la tierra parece estacionaria respecto de uno de los tres planetas Marte, Júpiter ó Saturno, dicho planeta es estacionario para nosotros, pues los
106. rayos visuales *EG*, *DF* son comunes á ambos planetas.

Quando la tierra vista desde el centro de Júpiter parece en conjuncion inferior con el Sol, y es retrograda, Júpiter está respecto de nosotros en oposicion, y no puede menos de parecernos retrogrado. Porque un planeta es directo para nosotros quando nuestro movimiento conspira con el suyo para que parezca que sigue el mismo rumbo que sigue en realidad; parece retrogrado, quando estos movimientos se combinan de modo que el planeta parezca seguir otro rumbo que el que sigue verdaderamente.
105. Pero quando el planeta inferior *M* yendo desde *M* á *R*, parece retrogrado, la tierra *T* que va tambien desde *T* á *C*, pero mas despacio, se queda atrás respecto del planeta *M*, y entonces le parece que vuelve atrás, en vez de caminar con paso directo. De este modo el planeta superior *T* parece al planeta inferior *M*, retrogrado en sus oposiciones, esto es, quando el planeta superior está á la parte opuesta al sol *S*.

Su-

661 Supongamos que el círculo *TtR* represente la orbita de la tierra, y *MmP* la de Marte, cuyo radio es la mitad mayor que el de la tierra, siendo así que el movimiento horario *Tt* de la tierra es casi duplo del movimiento *Mm* de Marte, tomado angularmente en minutos y segundos, y visto desde el sol *S*. Despues de tirada una linea *tn* paralela á *TM*, se echa de ver que debería Marte haber andado el arco *Mn* para que pareciera estacionario, en el tiempo que la tierra ha andado *Tt*, y que debiera haver andado mas para que pareciera haberse adelantado ácia la izquierda ó ácia el oriente, conforme adelanta en realidad. Pero como su movimiento *Mm* es patentemente menor que *Mn*, se quedará atrás, y llegada la tierra á *t*, en vez de ver Marte á la izquierda ó al oriente de la linea *tn*, le verá á la derecha ó al occidente. Por consiguiente Marte nos parecerá retrogrado ; lo mismo diremos de todos los planetas superiores quando están en oposicion. Fig. 107.

Pero quando el movimiento de la tierra llegare á ser tan oblicuo que el movimiento *Rr* de la tierra y el movimienio *Pp* de Marte, bien que desiguales, estén compreendidos entre las mismas paralelas *PR* y *pr*, entonces Marte parecerá estacionario (245); y quando el arco *Vu* llegare á ser mas obliquo todavia, el arco *Xx* de la orbita volverá á parecer en su direccion natural, estando, conforme se ve, el rayo *ux* dirigido ácia un punto del cielo mas oriental y mas distante ácia la izquier-

Fig. da que el rayo *VX*. Así Marte vuelve á parecer directo, y su movimiento no es destruido entonces por el de la tierra.

Leyes del Movimiento de los planetas primarios vistos desde el Sol.

662 Los movimientos de los planetas vistos desde el sol no se pueden determinar, sin que primero esté averiguada la longitud de un planeta, qual la observaríamos desde el sol; lógrase averiguar este punto respecto de los planetas superiores por medio de sus *oposiciones*, y respecto de los inferiores por medio de sus *conjunciones inferiores* (636 y sig.). Porque quando un planeta está opuesto al sol, el lugar de la eclíptica al qual corresponde, está en una misma linea recta con el sol y la tierra; por consiguiente el lugar del planeta visto desde el sol, es el mismo que el lugar visto desde la tierra. Si la tierra está en
103. *N* y el planeta en *A* opuesto al sol *S*, el punto del cielo adonde va á parar la linea *SNA*, señala el lugar heliocéntrico (516), igualmente que el lugar geocéntrico del planeta *A*.

Esta es la razon por que los Astrónomos observan constantemente las oposiciones de los planetas, como que son las circunstancias mas esenciales de sus movimientos; porque entonces la observacion hecha desde la tierra suple por una observacion hecha desde el sol, y sirve para dar á conocer la orbita que el planeta anda al rededor del sol. Por medio de las longitudes heliocéntricas hemos determi-

mi-

minadò los movimientos medios de los planetas (636), y por las mismas longitudes determinaremos ahora las orbitas de los planetas, las desigualdades y demás circunstancias de sus movimientos. El movimiento medio es el elemento mas esencial de la Teórica de los planetas; pero como dejamos declarado atrás quanto pertenece á este asunto, nos falta hablar ahora de las figuras de las orbitas, de las excentricidades, de las distancias, de los afelios, de los nudos, de las inclinaciones y de los diámetros de cada uno de los seis planetas. Fig.

De la Figura de las Orbitas planetares.

663 No basta saber quanto tiempo gastan los planetas en hacer sus revoluciones al rededor del sol, es menester averiguar las desigualdades periódicas que penden de la figura de las orbitas planetares.

664 En los movimientos de los planetas se reparan dos desigualdades en cuya esplicacion se afanaron mucho los antiguos; la primera consiste en que los planetas andan mas aprisa en algunos puntos de sus orbitas que en otros. Esta se llama la primera desigualdad, y segun hemos visto (545) tambien se repara en el movimiento del sol. La otra desigualdad consiste en la paralaxe de la grande orbita (517), ó en las estaciones y retrogradaciones.

665 Ptolomeo acudió á la excentricidad *NHBCP* 94.
para esplicar la primera desigualdad ó la equacion de los

 pla-

Fig. planetas en sus orbitas; y despues admitia un epicyclo para esplicar la segunda desigualdad.

666 La facilidad con que esta segunda desigualdad se esplica en el sistema copernicano (657 y sig.) es uno de los mayores argumentos en su abono. Comparémosla con la que daba Ptolomeo, para dar una muestra de la obscura complicacion del sistema que este seguia. La segunda desigualdad la esplicaba Ptolomeo del modo siguiente.

108. Sea *A* el centro de la tierra, que es tambien el centro del mundo; *D*, el centro del *excéntrico* ó de la orbita del planeta *FKMLF*: este círculo tambien se llama *Deferente*, porque lleva el centro del epyciclo. En el punto *F* de la orbita se traza el epicyclo GQ; mas arriba del centro *D* se toma una cantidad *DE* igual á la excentricidad *AD* (545), y desde el punto *D* se traza un círculo *RKLOR*, de igual tamaño que el excéntrico. A este círculo se le llama el *Equante*, porque el centro *F* del epicyclo que se mueve en el deferente *FKML* tiene entretanto un movimiento igual al rededor del centro E del equante *RKO*; porque el epicyclo anda su deferente con movimiento desigual, y esta desigualdad ha de ser tal que desaparezca respecto del centro *E* del Equante, y que los ángulos como *FEI* que forman la linea de los apsides y la linea tirada al centro del epicyclo, siempre sean iguales en tiempos iguales. Esta es la razon por que Ptolomeo llama el centro *E* punto de igualdad. *La anomalía verdadera* del *excéntrico* es el ángulo *FAI* que señala la ver-

verdadera distancia del centro del epicyclo á la linea de Fig.
los apsides; la anomalía media del excentrico es el movimiento medio que hubiera tenido el centro del epicyclo si hubiese caminado uniformemente á lo largo del deferente, tambien es el ángulo *FEI* formado en el centro del equante, porque este ángulo crece uniformemente. Hasta aquí no hemos hablado mas que de la primera desigualdad, veamos como esplicaba Ptolomeo la segunda. Estando cada planeta en conjuncion con el lugar medio del sol, se supone que sale del vértice ó del apogeo de su epicyclo, pongo por caso del punto *G*; se supone que gasta en andar dicho epicyclo todo el tiempo que se observa entre una conjuncion media y la siguiente, esto es, el tiempo de una revolucion synódica (650); es á saber, Saturno un año y 13 dias, segun los Antiguos; Júpiter, un año y 34 dias; Marte, dos años y 59 dias; Venus, un año y 219 dias; Mercurio, 116 dias, mientras que los epicyclos mismos andan sus deferentes cada uno en el tiempo que dura la revolucion de cada planeta (642). Por lo que mira á la cantidad de los radios de los epicyclos, era arbitraria, nada la determinaba en el systéma de Ptolomeo.

Consistia, pues, la hypótesi de Ptolomeo en hacer andar el Planeta en un círculo, de modo que el movimiento fuese igual, no observándole desde el punto *E*, 94.
sino desde otro punto *K*. Pero no la funda en observacion ni demostracion alguna.

Fig. 667 Desde el centro *B* trácese el excéntrico *DEF*,
109. cuya excentricidad sea *BA*, por manera que la tierra ó el ojo del espectador esté en *A*; *D* será el apogeo; *F*, el perigeo. Si mas arriba del centro *B* se toma una linea $BC = BA$, será *C* el punto al rededor del qual Ptolomeo supone que el planeta traza ángulos iguales en tiempos iguales, ó el punto desde el qual su movimiento pareceria uniforme, el *Equante*, el punto de igualdad.

Tycho Brahe se empeñó en perficionar esta *hypótesi* de Ptolomeo, é indagó si con hacer *CB* diferente de *BA*, se podrian esplicar mejor las desigualdades que observaba en los planetas. Pero Keplero manifestó despues que fue vano el empeño de Tycho; y esto le dió el pensamiento de averiguar si las orbitas planetares eran con efecto circulares. Una casualidad le proporcionó considerar primero á Marte, y bien que tocó desde luego las dificultades que habia de encontrar en su investigacion, no por eso desmayó.

Se empeñó en combinar todas las observaciones de Marte que Tycho habia hecho, con la mira de hallar una esplicacion de su movimiento mas plausible que las que conocia.

668 Tycho habia formado una hypótesi que, con diferencia de algunos minutos, representaba todas las observaciones de Marte, por medio de un excéntrico, colocando
109. el punto *A* y el punto *C* á diferentes distancias respecto del centro *B*. Keplero sabia que el excéntrico concordaba con diferencia de cinco minutos con las observaciones, y no obs-

obstante esta conformidad, se le hizo poco verosimil la Fig.
hypótesi. Entonces se dedicó á combinar todas las observaciones de Marte con la mira de dar con una hypótesi que le contentase.

669 Lo primero que le importaba averiguar eran las distancias de la tierra al Sol, que sirven de escala y término de comparacion respecto de todas las demás distancias que se miden en el cielo. Las distancias del sol á la tierra no se podian averiguar en distintos tiempos del año, sin determinar primero la excentricidad *AB* de la orbita terrestre, esto es, la distancia entre el centro del sol supuesto en *A*, y el verdadero centro del círculo *DEF* que la tierra anda. Creyeron los Antiguos, y Tycho tambien, que para la orbita del sol y de la tierra, el centro *B* era el punto de igualdad al rededor del qual los movimientos de la tierra parecerian uniformes, y que la linea total *AC*, que sirve de base á la equacion del centro ó al ángulo *CEA* estaba debajo del centro *B*, ó entre *B* y *a*. Este era el primer punto que se habia de indagar, y bien presto conoció Keplero la biseccion de la excentricidad; quiero decir, que conoció que el centro *B* del círculo que la tierra anda estaba en medio de la excentricidad total *CA*, y que estaba entre el punto *A* donde está el sol y el punto *C*, donde deberíamos estar para ver movimientos iguales desde la tierra. 109.

670 Keplero intentó esplicar la causa del *Equante* (667); esto es, por qué habia un punto *C* distinto del

Fig. del centro *B*, al rededor del qual se vía un movimiento regular y uniforme. Se inclinaba á creer que el *Equante* se habia de verificar en el movimiento de la tierra al rededor del sol, como en el de los demás planetas. Movióle tambien á creerlo la noticia que le dió Tycho de que la orbita anual ó el excéntrico del sol le parecía que no era siempre de una misma cantidad. Con efecto, quando Tycho suponia uniforme el movimiento del sol al rededor del centro *B*, y la tierra en *A*, y determinaba despues la *excentricidad* por medio de la equacion de la orbita *AEC*, que le daba una excentricidad *AC*, tomaba el residuo *CD* del diámetro entero *FD* por radio del círcnlo, pero *CD* discrepaba del radio *BD* que supuso primero. Era, pues, preciso que hallase diferentes entre sí los radios de la orbita solar, y se persuadiese á que el sol no siempre estaba á la misma distancia respecto del centro del excéntrico; esto le manifestaba á Keplero que dicho centro no era el punto al rededor del qual se verificaba el movimiento regular. Por este motivo buscó Keplero por observacion la paralaxe anua de Marte (517) en dos posiciones de la tierra diametralmente opuestas, en el afelio y el perihelio, con corta diferencia, observando cada vez Marte en quadratura ácia el mismo punto de su orbita.

671 Suponiendo Keplero que la orbita del sol era un círculo cuyo centro *B* era el punto de igualdad, no podia menos de hallar este círculo mayor ó menor comparándole
110. con los demás planetas. Sea *S* el centro del sol; *M*, el lugar

gar de Marte en su orbita, observado dos veces quando la tierra estaba en *D* y en *E*, y Marte en el mismo punto *M* de su orbita, esto es, despues de concluida una ó muchas revoluciones (y esto se conoce por los regresos de las oposiciones). El punto *M* se escogía tal que los ángulos *MCD* y *MCE* eran rectos, siendo *C* el punto al rededor del qual habia de parecer que la tierra se movia uniformemente. Tycho suponía que la segunda desigualdad solo pendia de los movimientos medios del sol, que no desaparecía sino quando el planeta estaba opuesto al lugar medio del sol, y que era igual á igual distancia entre el planeta y el lugar medio del sol. Así, siendo iguales *CD* y *CE*, conforme discurria Tycho, y siendo rectos los ángulos *C*, los ángulos *DMC*, *CME* (que nosotros llamamos las paralaxes anuas de Marte) habian de ser unos mismos; pero como *CE* era en realidad mayor que *CD*, por no estar el punto de igualdad en *B*, sino en *C*, se hallaba que el ángulo *CME* era mayor que el ángulo *CMD*, y el que porfiaba en suponer que el radio *BD* del círculo era la base de aquel ángulo, se hallaba precisado á sostener que no era de una longitud constante el radio del círculo que la tierra andaba. Esto determinó Keplero á poner el punto de igualdad en *C*, y no en el centro *B* del círculo de la tierra. Fig.

672 Malició, pues, Keplero que esta variacion en la cantidad del radio del excéntrico de la tierra, provenía de que el punto de igualdad *C*, al rededor del qual se cuentan los ángulos de comutacion, no era el centro del cír-

Fig. círculo. Para confirmar su sospecha, tomó dos observaciones, hechas en 18 de Mayo de 1585, y 22 de Enero de 1591: redújolas (por el cálculo de los movimientos de Marte, conocidos con bastante puntualidad para un intervalo de algunos dias) al dia 30 de Mayo de 1585, y al dia 20 de Enero de 1591, cuyos dias la longitud de Marte calculada por Tycho era de $6^s\ 13^\circ\ 28'$, y los ángulos de comutacion *MCD* y *MCE* eran ambos de $64^\circ\ 23'\frac{1}{2}$. Las longitudes de Marte eran, segun la observacion, $5^s\ 6^\circ\ 37'$ y $7^s\ 21^\circ\ 34'$; por consiguiente las paralaxes anuas *CMD*, *CME*, ó las diferencias entre las longitudes heliocéntricas calculadas, y las longitudes geocéntricas observadas, eran $36^\circ\ 51'$ en la primera, y $38^\circ\ 6'$ en la segunda observacion. Estas paralaxes entre las quales habia esta diferencia de $1^\circ\ 15'$, bien que las anomalías de comutacion ó los ángulos *MCT* y *MCR* fuesen iguales, daban á conocer que la linea *CR* era mayor que *CT*, y *CE* mayor que *CD*. Por consiguiente el punto de igualdad, al rededor del qual los movimientos de la tierra son sensiblemente uniformes, y al qual se referian las comutaciones iguales *MCE*, *MCD*, segun el método de Tycho, no era el centro *B* de la orbita terrestre, sino un punto *C* situado al otro lado del centro.

673 Tambien probó Keplero, por medio de los triángulos *TCM*, *RCM*, ó de las paralaxes de Marte, de que acabamos de hacer memoria, la distancia *BC* de 1837 partes, de las quales el radio *BD* tenia 100000. Pero Ty-

Tycho habia determinado por muchísimas observaciones, Fig.
que la distancia total *CS* del sol al centro de igualdad, que corresponde á la equacion del centro del sol, era de 3584; vió, pues, que el centro del círculo que anda la tierra, estaba entre el sol *S*, y el punto de igualdad *C*, pues acababa de hallar *CB* igual con corta diferencia á la mitad de *CS*.

Fue un descubrimiento muy importante probar la biseccion de la excentricidad para la tierra, que los Antiguos solo admitian para los planetas superiores; sin esto no era posible determinar puntualmente las distancias de la tierra al sol en diferentes tiempos del año, cuya determinacion era un punto fundamental.

Despues de determinada la posicion del centro de igualdad respecto de la orbita de la tierra, se dedicó Keplero á determinarla para la orbita de Marte.

674 Sea *B* el centro del excéntrico de Marte; *HBAI* 111.
la linea de los Apsidas; *A*, el centro del sol, y *C* el punto al rededor del qual los movimientos del planeta serian uniformes; *F,G,D,E* quatro longitudes de Marte observadas, quando se hallaba en oposicion, y era nula la segunda desigualdad. La cuestion que Keplero se propuso resolver es la siguiente: *Hallar los ángulos* FAH, FCH, *tales que los quatro puntos* F,G,D,E *estén en un círculo, y que el centro* B *de dicho círculo esté entre los puntos* C *y* A, *esto es, el ángulo* BAD *sea igual al ángulo* CAD. Keplero resolvió la cuestion por una doble falsa posicion; suponia primero que fuese conocida la distancia *CA*, y los ángulos *FCH* y *FAH*;

cal-

Fig. calculaba por la Trigonometría todas las demás partes de la figura, para ver si al cabo del cálculo los quatro ángulos formados en *A* serian iguales á 360°, y estarian sobre una misma linea los tres puntos *A*, *B*, *C*; y en logrando esto, quedaba todo averiguado.

675 Despues de averiguar por este método todas las dimensiones del excéntrico de Marte, Keplero calculó en esta hypótesi circular 12 oposiciones de Marte observadas por Tycho, y no halló ninguna que discrepase del cálculo mas de $1'\frac{3}{4}$. Es de estrañar, dice, que una hypótesi que tanto concuerda con las 12 oposiciones sea falsa; sin embargo lo demuestra despues, así por las latitudes de Marte, como por las longitudes del mismo planeta observadas en otras situaciones; por consiguiente las oposiciones de Marte no bastaban para determinar la figura de la orbita de Marte. El círculo excéntrico, por cuyo medio Keplero representaba con tanta puntualidad las 12 oposiciones, tenia una excentricidad total $AC = 18364$, pero *AB* era de 11332., y *BC* de 7232 no mas, suponiendo 100000 la distancia de la tierra.

III. 676 A pesar de todo esto Keplero estaba persuadido á que *AB* habia de ser igual á *BC*, porque entrevía para ello una causa física. Fuera de esto, la hypótesi que representaba muy bien las longitudes de Marte en oposicion, no concordaba, ni con las latitudes observadas en el mismo tiempo, ni con las longitudes observadas fuera de las oposiciones, porque las distancias de Marte al sol como *AF*, *AE*

eran

Plana. 398.

102

A L P T

103

P L T A N S R

F

105

A P B S R C E M T

106

S L E D K H G F

8

L

109

D E C B A a F

110

M T R D C B S E

eran defectuosas en la hypótesi circular que Keplero acababa de considerar, bien que no lo fuesen los ángulos, suponiendo *AB* de 11332, y *BC* de 7232. Los diámetros de los epicyclos en la forma de Copérnico y Tycho, eran segun sus cálculos de 3616 y 14948, este es igual á la excentricidad total 18564 menos la mitad de la pequeña excentricidad 7232, ó el medio entre *B* y *C*, porque es preciso que los dos radios de epicyclo compongan juntos la máxima excentricidad posible. La paralaxe anua que pende de estas distancias de Marte al Sol, era falsa quando se hacia $AB = BC$, conforme lo requerian al parecer esotras observaciones, y el error era en algunas ocasiones de 8′. Si Keplero hubiera tenido por despreciable un error de 8′, no hubiera pasado mas adelante en sus investigaciones, conforme lo practicó Tycho Brahe; pero estando seguro de que estos 8′ de error probaban la falsedad de la hypótesi circular, discurrió averiguar las distancias de Marte al sol, y estas distancias le manifestaron por último que la orbita de Marte no era un círculo perfecto. Fig.

677 Keplero habia determinado (673) primero las distancias de la tierra al Sol, buscó despues las distancias de Marte al Sol en tres puntos de su orbita, con sus longitudes vistas desde el sol, para averiguar á un tiempo la figura y el tamaño de dicha orbita. Declaremos el método que siguió en estas determinaciones.

Sea *S* el centro del sol; *M*, el de Marte; *B*, *C*, dos puntos de la orbita terrestre donde se haya hallado la tierra, 112.

Fig. ra, quando Marte estaba en el mismo punto *M* de su órbita, y por consiguiente á la misma distancia *SM* del sol. Las dos posiciones de la tierra, es á saber, sus longitudes y sus distancias al sol son conocidas, hemos de determinar *SM*. En el triángulo rectángulo *BSC* conocemos los dos lados *BS*, *SC* que son las distancias de la tierra al sol, y el ángulo que forman *BSC*, diferencia entre las dos longitudes de la tierra en *B* y *C*, hallaremos los ángulos *BCS*, *CBS* y el lado *BC*. El ángulo *MBS* es la diferencia entre la longitud observada de Marte y la del sol al tiempo de la observacion hecha en *B*; si de él se resta el ángulo *CBS*, que sacamos poco ha, saldrá el ángulo *MBC*; si del ángulo *MCS* restamos tambien el ángulo *BCS*, sacaremos el ángulo *MCB*. Por consiguiente en el triángulo *MCB* conocemos dos ángulos y el lado que abrazan, será, pues, facil de determinar *MB* y *MC*. Finalmente en el triángulo *MBS* conocemos dos lados *MB*, *BS*, y el ángulo *MBS* que forman, hallaremos la distancia *MS*, con el ángulo *MSB* cuyo ángulo añadido á la longitud de la tierra quando estaba en *B*, dará la longitud heliocéntrica de Marte en cada una de las dos observaciones.

678 Despues de combinar con suma constancia y sagacidad un número muy dilatado de observaciones de Tycho Brahe, sentó Keplero que la excentricidad del Sol era de 1800 para un radio de 100000. Con esto podia determinar las distancias de la tierra al sol *SB*, *SC*, para un momento qualquiera, y el ángulo *CSB*; pero con la mira de

de asegurarse todavia mas, volvió á hacer todos sus cálculos en diferentes supuestos de excentricidad, tomando cada vez cinco observaciones en lugar de tres, á fin de que la conformidad de diferentes resultados le diera mejor á conocer el verdadero. Las diferentes partes de sus investigaciones se confirmaban mutuamente, y no podia ser que cinco posiciones de la tierra diesen todas de dos en dos un mismo resultado para la distancia *SM* de Marte al Sol, á no ser que se hubiesen supuesto verdaderas las distancias *SC* y *SB* de la tierra al Sol. Fig.

679 Este método por el qual Keplero hallaba las distancias de Marte al Sol (677), le abria camino para hallar tambien la excentricidad de Marte; despues de determinadas dos distancias de Marte, la una en las inmediaciones de su afelio, la otra en las inmediaciones de su perihelio, sacó la primera de 166780 (suponiendo siempre de 100000 la distancia media del Sol á la Tierra), y la otra de 138500; por manera que la distancia media era de 152640, y la excentricidad de 14140.

680 Keplero determinó de este modo, por muchas observaciones, tres distancias de Marte al Sol *AF*, *AE*, *AD*, independientes de toda suposicion acerca de la teórica de Marte; halló tambien la excentricidad *AB* de 14140, comparando las dos distancias de Marte *AH*, *AI*, tomadas en el afelio y el perihelio, independientemente de toda hypótesi; finalmente, habia determinado la posicion de la linea de los ápsides *HI*, por un método que propon- 111.

Fig. dremos mas adelante, y era igualmente exacto fuese ó no circular la orbita.

Suponiendo, pues, la orbita circular, tenemos el triángulo *ABF*, en el qual conocemos *BF*, con la excentricidad *AB*, y la anomalía verdadera *BAF*, es facil de hallar la distancia verdadera *AF*; lo propio diremos de las otras distancias *AE*, *AD*. Las tres distancias que Keplero hallaba en esta suposicion,

eran................	166605,	163883,	148539
Las distancias observadas.	166255,	163100,	147750
Era, pues, el error.........	350,	783,	789.

681 Por consiguiente las verdaderas distancias de Marte al Sol eran mas cortas que las distancias calculadas en la hypótesi circular, y lo eran tanto mas quanto mas se arrimaban á los lados *G* y *E* de la figura. Resultaba forzosamente de aquí que la orbita era aplanada, esto es, ovalada.

De esta *ovalidad* de la orbita de Marte infirió Keplero que dicha orbita era una verdadera elipse; porque entre las curvas prolongadas ú ovaladas la elipse es la mas simple, y la primera. Esto lo confirmó despues el examen de los lugares de Marte observados en todas sus posiciones, que se hallaron conformes, igualmente que todas sus distancias, con los cálculos hechos en la elipse vulgar. Esta conclusion que Keplero aplicó despues á todos los planetas, se verifica en todos con igual puntualidad; es una conse-

cuen-

cuencia de la atraccion general de los cuerpos, y es hoy dia regla general que *los seis planetas primarios trazan elipses cuyo focus está en el centro del Sol.* Fig.

682 Por el mismo método de que se valió Keplero para hallar las distancias de Marte al Sol, así en el afelio, como en el perihelio (677), halló tambien las distancias de todos los demás planetas, y por consiguiente la *excentricidad* de cada uno, que no es mas que la diferencia entre la máxima distancia y la mínima. Estas distancias le proporcionaron hallar la ley de que hicimos mencion (222), cuya regla ha servido á los demás Astrónomos para sacar con mas puntualidad las mismas distancias. Pondremos aquí los diferentes resultados que han hallado, previniendo que los de Mr. de la Lande se fundan en las revoluciones apuntadas antes (642). Todas estas distancias suponen que la del Sol sea de 100000, pero se han apuntado las decimales quando las ha dado el cálculo.

Tablas de las distancias medias de los Planetas al sol, segun varios Autores.

Planetas.	Dist. medias segun Keplero.	Segun las tab. carol. de Street.	Segun Mr. Halley.	Segun las tab. de Mr. de la Lande.	Logaritmos de estas distancias.
Mercurio.	38806	38710	38710	38709, 88	9 5878218
Venus.	72413	72333	72333	72333, 24	9 8593379
La Tierra.	100000	100000	100000	100000	0 0000000
Marte.	152349, 5	152369	152369	152369, 27	0 1828974
Júpiter.	520000	520110	520098	520097, 91	0 7160851
Saturno.	951003, 5	953800	954007	953936, 83	0 9795196

Fig. 683 Las distancias ván espresadas, segun Halley, en partes, tales que la distancia de la Tierra tiene 100000; en las de Mr. de la Lande se han introducido dos guarismos mas para mayor puntualidad, es á saber, las diezmillonésimas de la distancia media del Sol; pero ha añadido los logaritmos, por cuyo medio ha hallado las distancias que suponen la distancia media del Sol igual á la unidad; porque esta es la forma en que se usan en los *cálculos* astronómicos.

Las distancias antecedentes de los planetas al *sol*, omitiendo los quatro últimos guarismos, son entre sí como los números 4, 7, 10, 15, 52, 95. Estos son los números mas simples con que se pueden espresar los intervalos y tamaños de las orbitas planetares, cuyos números hacen mucho papel en la astronomía.

684 *Los quadrados de los tiempos períodicos son como los cubos de las distancias.*

La distancia de la tierra al Sol es á la de Júpiter al Sol, como 10 es á 52; por consiguiente sus cubos son como 10 á 1406, ó como 1 á 140,6; pero las duraciones de sus revoluciones son de $365\frac{1}{4}$, y de $4332\frac{1}{3}$ dias, cuyos quadrados, desechando los últimos guarismos, son tambien como 1 es á $140\frac{2}{3}$; por consiguiente los quadrados de los tiempos períodicos son entre sí como 1 es á 140,6; es, pues, una misma la razon por una y otra parte, y el quadrado del tiempo períodico de Júpiter es 140 veces mayor que el quadrado del tiempo periódico de la Tierra, y el cubo de la distancia media de Júpiter al Sol es 140 ve-

veces mayor que el cubo de la distancia media de la Tierra. Fig.

Si se toman para mayor puntualidad las revoluciones siderales (642), y las distancias (682), se sacará el número 140,6874 que espresa quantas veces el quadrado de la revolucion de la Tierra, y el cubo de su distancia caben en los de Júpiter. Mr. de la Lande se ha valido de esta ley para hallar las distancias medias de los planetas conforme están en la tabla (682); dividiendo el quadrado del *movimiento* secular total del Sol, respecto de las estrellas, ó de 129597736″ por el quadrado del movimiento secular de cada planeta (642), y tomando la raiz cúbica del cociente. Se debe dar la preferencia al movimiento *secular* respecto de los tiempos de las revoluciones, porque es el movimiento que dán inmediatamente las observaciones, y del qual se sacan los períodos; conviene acudir al origen de los datos siempre que hay alguna consecuencia que sacar.

685 *Las areas son proporcionales á los tiempos.*

La observacion de los diámetros del Sol manifiesta que las areas son proporcionales á los tiempos ácia los ápsides, ó lo que es lo mismo; que el movimiento del Sol es tanto mas lento quanto mas lejos está de la tierra. El diámetro del Sol es de 31′ 31″ en estio, y de 32′ 36″ en invierno, segun las observaciones de Mr. de la Lande; esto prueba que la distancia del sol en invierno es á su distancio en verano, como 31′ 31″ es á 32′ 36″ (VI. 384). El movimiento horario del sol en invierno es de 2′ 33″;

Fig. pero 32′ 36″: 31′ 31″:: 2′ 33″ : 2′ 28″; luego el movimiento horario del sol debería ser de 2′ 28″ en estio, si este movimiento horario fuese por sí constante y uniforme, y no pendieran sus variaciones mas que de la distancia del Sol. Sin embargo este movimiento horario, segun la observacion, no es mas que de 2′ 23″; es menor de lo que debiera segun el supuesto; luego además de los 5″ de diferencia que ha de haber entre los movimientos horarios del Sol en estio é invierno, por razon de sus diferentes distancias, hay todavia una diferencia real de 5″, que no proviene de las distancias, y es un atraso verdadero en el movimiento aparente del Sol; luego el movimiento real de la tierra es con efecto mas lento en el afelio que en el perihelio. Se echa de ver que está en razon inversa de las distancias, pues se hallan 2′ 23″, en lugar de 2′ 28″ que saldrian, suponiendo el movimiento uniforme, esto es, 5″ para el exceso del movimiento horario de invierno respecto del movimiento horario del estio, además de los 5″ que ha de haber por razon de la distancia del Sol que es menor en invierno; pero 2′ 23″ es á 2′ 28″, como 31′ 31″ es á 32′ 36″, esto es, como el diámetro en el estío es al diámetro en el invierno, ó como la distancia en invierno es á la distancia en verano; luego el movimiento del Sol en estío está con el movimiento que tendria al parecer si se moviese uniformemente, en razon inversa de su distancia.

Teó-

Fig.

Teórica del Movimiento Elíptico de los Planetas al rededor del Sol.

686 Llámase *Radio vector* de un planeta la línea tirada desde el centro del Sol al centro del planeta, ó la distancia del planeta al focus de su elipse. Sea *AMDP* la orbita eclíptica de un planeta trazada al rededor del focus *S*, donde está el Sol (681); *M*, el lugar actual de un planeta para un instante dado, la linea *SM* será el radio vector. 113.

La linea de los ápsides ó el ege mayor de la elipse señala el afelio y el perihelio del Planeta (544); el *Afelio* ó el ápside superior, es el punto de la orbita donde el planeta está mas lejos del Sol; tal es el vértice *A* del ege mayor *AP*, el mas distante del focus *S*. El *Perihelio* ó el ápside inferior, es el punto de la orbita donde el planeta está mas próximo al Sol; tal es el estremo inferior *P* del ege mayor *AP*, el mas inmediato al focus *S* donde reside el Sol.

La *Anomalía* en general es la distancia de un planeta á su afelio; pero hay varios modos de medir esta distancia.

La *Anomalía verdadera* es el ángulo que forma en el focus de la elipse el radio vector con la linea de los ápsides; tal es el ángulo *ASM* que forman el ege mayor *AS* y el radio vector *SM*.

La *Anomalía excéntrica* es el ángulo que forma en el centro de la elipse el ege mayor con el radio de un círculo circunscripto, tirado al estremo de la ordenada que pasa

Fig. por el lugar verdadero del planeta. Y así, si trazamos un círculo *ANP* sobre el ege mayor *AP* de la orbita, como diámetro, tiramos la ordenada *RMN* por el punto *M*, donde suponemos el planeta, y al estremo *N* de dicha ordenada tiramos el radio *CN*, este radio determinará la anomalía excéntrica *AN* ó *ACN*.

La *Anomalía media* es la distancia al afelio suponiéndola proporcional al tiempo; es la que crece uniforme é igualmente desde el afelio hasta el perihelio. Así, un planeta que gastaría seis meses en ir desde *A* á *P*, tendría al cabo del primer mes 30 grados de anomalía media, 60 grados al cabo del segundo; y así de los demás, creciendo siempre proporcionalmente al tiempo. Si tomamos una linea *CX* para representar la anomalía media, suponiendo que esta linea dá la vuelta uniformemente al rededor del centro *C*, la linea *CX* estará al principio mas adelantada que la linea *CN*, porque *AN* crece mas despacio ácia el afelio donde el movimiento del planeta es menor que el movimiento medio, y este adelantamiento crecerá mientras que la velocidad del planeta fuere menor que su velocidad media; despues el punto *N* se acercará al punto *X*, hasta juntarse uno con otro en el perihelio *P*; allí las tres anomalías se confunden y son cabalmente de 180°.

La diferencia entre la anomalía media y la anomalía verdadera forma la equacion de la orbita ó la equacion del centro.

687 Una vez que la anomalía media es proporcional

nal al tiempo, y es una parte del tiempo de la revolucion, se podrá medir con qualquiera cantidad que creciere uniformemente. Por consiguiente no solo podemos llamar *Anomalía media* el arco *AX*, el ángulo *ACX*, y el sector ó area circular *ACX*, mas tambien el sector elíptico, ó la area *ASM*, comprendida entre el radio vector *SM*, el ege mayor *SA* y el arco de la elipse *AM*. Porque como las areas trazadas por el radio vector *SM* son proporcionales á los tiempos (685), el sector *AMS* será la sexta parte de la superficie elíptica *AMDPA* al cabo del primer mes, en el supuesto de poco ha (686), será por consiguiente su tercera parte al cabo de dos meses, y uniformemente á este tenor; por manera que la superficie ó area elíptica será la cantidad proporcional al tiempo, un quebrado igual al quebrado del tiempo, ó á la anomalía media. Se podrá, pues, decir al cabo del primer mes que la anomalía media es de 30°, ó, en general, que es un dozavo; porque entonces los 30° son la dozava parte del cielo, el arco será la dozava parte del círculo, el tiempo gastado en andarle será la dozava parte del tiempo de toda la revolucion; y finalmente la area *AMS* será la dozava parte de la area de toda la elipse; pero por lo regular la anomalía media se espresa en grados. Fig.

688 Una vez averiguado que los planetas andan elipses con areas proporcionales á los tiempos, solo falta inferir el lugar verdadero de un planeta para un tiempo dado. En conociendo lo que dura la revolucion del planeta-

Fig. neta, pongo por caso la de Mercurio, que es de 86 dias, si se pregunta qual será el lugar de Mercurio al cabo de dos dias, esto es, de la 43ma parte de su revolucion, se sabe entonces que la area del sector *ASM* comprendido entre el afelio y el radio vector *SM*, es la 43ma parte de la superficie elíptica. Esta porcion del tiempo ó esta parte de la elipse es lo que llamamos la *anomalía media*, que tambien se puede espresar en grados, tomando la 43ma parte de los 630° de todo el círculo. Porque, segun hemos dicho, podemos llamar indistintamente *anomalía media* una porcion del tiempo, una porcion de la elipse, una porcion de la circunferencia del círculo. Siempre es un quebrado que es dado, quando se busca el lugar de un planeta, pero le valuaremos en grados, para seguir la forma usada en las Tablas Astronómicas, donde todas las anomalías y todas las equaciones están espresadas en grados, minutos y segundos.

689 Quando es conocida la anomalía media, ó la superficie del sector *AMS*, se ha de buscar la anomalía verdadera, ó el ángulo *ASM* de dicho sector; esto viene á ser lo mismo que proponer ¿*dada la Anomalía media, hallar la anomalía verdadera*? Esta es la cuestion que Keplero propuso á los Geómetras, y es conocida con el nombre de *Problema de Keplero*.

690 Para resolverla, la propondremos al reves, y supondremos conocida la anomalía verdadera para inferir de ella la anomalía media; pero despues, la resolveremos tam-

tambien directamente. Primero sentaremos algunas proposiciones que necesitamos para esta resolucion. Fig.

691 *En una elipse* AMP, *á la qual se ha circunscrito un círculo* ANP; *siendo* CX *la linea de la anomalía media* (686); M, *el lugar verdadero del planeta*; RMN, *la ordenada que pasa por el lugar del planeta*; *el sector circular* ANSA *siempre es igual al sector circular* ACX *de la anomalía media.* 113.

Sea *T* el tiempo total de la revolucion del planeta, y *t* el tiempo que ha gastado en ir desde *A* á *M*. La regla de las areas proporcionales á los tiempos nos dará *t* es á *T*, como el sector *AMS* es á la superficie de la elipse; ya que *ACX* es la anomalía media, tendremos tambien *t* es á *T*, como *ACX* es á la superficie del círculo; luego *AMS* es á *ACX* como la superficie de la elipse es á la superficie del círculo. Pero *AMS* es á *ANS* (III. 577), como la superficie de la elipse es á la superficie del círculo; tenemos, pues, dos proporciones que tienen tres terminos comunes, es á saber, *AMS*, la superficie de la elipse, y la superficie del círculo; el término que parece diferente es pues indispensablemente el mismo; luego *ACX* y *ANS* son iguales entre sí.

692 *La raiz quadrada de la distancia perihelia es á la raiz quadrada de la distancia afelia, como la tangente de la mitad de la anomalía verdadera es á la tangente de la mitad de la anomalía excéntrica.*

Hemos demostrado (26) que en el triángulo rec-

Fig. rectángulo *RSM*, la tangente de la mitad del ángulo *RSM* es igual al lado opuesto *RM*, dividido por la suma de los otros dos lados *SR*, *SM*. Por consiguiente en los triángulos rectángulos *MSR*, *NCR* tenemos esta proporcion tang $\frac{1}{2}$ *MSR*: tang $\frac{1}{2}$ *NCR* :: $\frac{RM}{SR+SM} : \frac{RN}{CR+CN}$: Si en lugar de la razon de *RM* á *RN* se substituye la de *CD* á *CA*, su igual (64), y en lugar de *SR*+*SM* su valor *PR* $\frac{SA}{CA}$ (77) ; y finalmente *PR* en lugar de *CR*+*CN*, la proporcion se transformará en estotra tang $\frac{1}{2}$ *MSR*: tang $\frac{1}{2}$ *NCR* :: $\frac{CD.CA}{PR.SA} : \frac{CA}{PR}$ :: *CD* : *SA*. Si llamamos *a* el semiege de la elipse, y *e* la excentricidad *CS*, tendremos *T*. $\frac{1}{2}$ *MSR*: tang $\frac{1}{2}$ *NCR* :: *CD* : *SA* :: $\sqrt{(aa-ee)} : a+e$; dividiremos los dos últimos términos por $\sqrt{(a+e)}$, y sacaremos *T*. $\frac{1}{2}$ *MSR* : *T*. $\frac{1}{2}$ *NCR* :: $\sqrt{(a-e)} : \sqrt{(a+e)}$ :: $\sqrt{(PS)} : \sqrt{(SA)}$. Luego la tangente de la mitad de la anomalía verdadera *ASM* es á la tangente de la mitad de la anomalía excéntrica *ACN*, como la raiz quadrada de la distancia perihelia *PS* es á la de la distancia afelia *AS*.

113. 693 *La diferencia entre la anomalía excéntrica y la anomalía media es igual al producto de la excentricidad por el seno de la anomalía excéntrica.*

El sector circular *ANSA* es igual al sector de la anomalía media *ACX* (691); si de cada uno se resta la parte comun *ACN*, quedará el sector *NCX* igual al triángulo *CNS*. La superficie del sector circular *NCX* es igual al producto de *CN* por la mitad del arco *NX*; la superficie del triángulo *CNS* es igual al producto de *CN*

CN por la mitad de la altura *ST*, que es una perpendi- Fig.
cular bajada desde el focus *S* á la base *NC*, prolongada mas allá del centro *C*; por consiguiente siendo iguales las dos superficies, y siendo comun á ambas un mismo factor *CN*, los demas factores tambien serán iguales; luego el arco *NX* es igual á la linea recta *ST*. Pero en el triángulo *STC*, rectángulo en *T* tenemos $ST = CS$. sen TCS (I. 664); luego $NX = CS$. sen $TCS = CS$. sen ACN; luego la diferencia *NX* entre la anomalía excéntrica *AN* y la anomalía media *AX*, es igual al producto de la excentricidad *CS* por el seno de la anomalía excéntrica *ACN*.

694 Todas las anomalías de los planetas se cuentan *en minutos* y segundos; por consiguiente para hallar en segundos la diferencia entre la anomalía media y la anomalía excéntrica, es preciso que la excentricidad esté valuada tambien en segundos. Si la excentricidad del planeta estuviese espresada en partes de la misma especie que la distancia media, se dirá: la distancia media es á la excentricidad, como el número de segundos que hay en el radio de un círculo, $206264''$ 8 ó 57° es al número de segundos que caben en la excentricidad. Si esta excentricidad fuese dada en fracciones de la distancia media del mismo planeta, bastará mutiplicarla por los $206264''$, que componen el arco de 57° igual al radio, para sacar dicha excentricidad en segundos; el logaritmo del espresado número de segundos es 5, 3144251, se añadirá este

lo-

Fig. logaritmo constante al de la excentricidad del planeta valuada en partes de la distancia media, conforme se verá mas adelante, y tendremos el logaritmo de la misma excentricidad en segundos.

Para manifestar en qué se funda esta multiplicacion por 57° ó $206264''$, supongamos que la excentricidad fuese la doscienmilésima parte del radio ó de la distancia media, es evidente que pues hay doscientos mil segundos en un arco igual al radio, la excentricidad *valdria* un segundo. Supongamos que fuese la mitad del radio, ó $\frac{1}{2}$, valdría la mitad de $206264''$, ó $103132''$, quiero decir, que con multiplicar esta excentricidad $\frac{1}{2}$ por 206264, sacaríamos el número de segundos, que cabe en la excentricidad. Ya que la unidad es á la fraccion que espresa la excentricidad en partes del radio, como $206264''$ son á la excentricidad reducida á segundos, es evidente que con multiplicar la fraccion que contiene la excentricidad en partes del radio, por $206264''$, tendremos la excentricidad en segundos. Lo propio sucede con todas las cantidades que se hallan en los cálculos, valuadas en partes del radio; quando se las quiere convertir en segundos, se multiplican por $206264''$, ó á su logaritmo se añade el logaritmo constante 5,3144251. Lo contrario se practicará quando se quisieren reducir á decimales del radio arcos espresados en segundos (44).

695 Dentro de poco aplicaremos á un caso estas dos proposiciones; pero para mayor facilidad pondremos

en

en la tabla siguiente respecto de cada planeta, los dos logaritmos constantes que sirven para las proporciones que hay en ambas proposiciones. El primero para la anomalía excéntrica es la mitad de la diferencia entre el logaritmo de la distancia afelia y el de la distancia perihelia, se suma con el logaritmo de la tangente de la mitad de la anomalía verdadera, para sacar el de la tangente de la mitad de la anomalía excéntrica. El segundo logaritmo sirve para hallar la anomalía media; es la suma del logaritmo de la excentricidad, y del logaritmo de 57°; este logaritmo constante se suma con el del seno de la anomalía excéntrica, para sacar el de la diferencia que va de la anomalía excéntrica á la anomalía media. Finalmente, va puesto en la misma tabla el logaritmo de la mitad del ege menor, con la mira de que sirva para hallar la distancia. Este logaritmo es la semisuma de los de la distancia afelia y de la distancia perihelia. Fig.

Tambien van puestos en la tabla siguiente los logaritmos constantes para la orbita de la Luna, suponiendo su distancia media igual á la unidad, y su excentricidad 0,05505, que dá para la máxima equacion 6° 18′ 18″ 4, conforme se verá despues.

Lo-

Fig.

Logaritmos constantes conforme á las Tablas de Halley.			
Planetas.	Primer Logaritmo constante para la anomalía excéntrica.	Segundo Logaritmo constante para la anomalía media.	Logaritmo del semiege conjugado para la distancia.
Mercurio.	0, 0907135	4, 6280602	4, 5784175
Venus.	0, 0030320	3, 1583660	4, 8593270
El Sol.	0, 0072975	3, 5397344	4, 9999385
Marte.	0, 0405055	4, 2828983	5, 1810105
Júpiter.	0, 0209575	3, 9976434	5, 7155795
Saturno.	0, 0247830	4, 0703245	5, 9788450
La Luna.	0, 0239391	4, 0551824	9, 9993409

696 Hagamos una aplicacion de toda esta doctrina; supongamos que la anomalía verdadera de Marte sea $1^s\ 0^\circ\ 8'\ 40''$, y que la queramos convertir en anomalía media. El logaritmo de la distancia afelia, segun las Tablas de Halley, es 5,221516, el logaritmo de la distancia perihelia 5,140505, conforme es facil de comprobarlo por las distancias medias (682), y las excentricidades que señalaremos mas adelante; la mitad de la diferencia de estos dos logaritmos es 0,0405055, este es el logaritmo constante para la primera analogía. Las distancias que corresponden á los dos logaritmos de las tablas son 166539 y 138199, la mitad de la suma de estas dos distancias es 152369, este es el semiege de la elipse, ó la distancia media de Marte al Sol; la mitad de la diferencia entre las mismas dos distancias es 14170, excentricidad de Marte, segun las tablas de Halley, en partes de las quales cabrían 100000 en la distancia media de la Tierra al Sol. Primero se convertirá esta excen-

tri-

tricidad en quebrado de la distancia media de Marte, tomándola por unidad, diciendo: 152369 es á 1, como 14170 es á 0,0929979, cuyo logaritmo es 8,9684733; para convertirla en segundos, se hará esta proporcion: 1 es á 0,0929979, como 57° 17′ 44″ 8, arco igual al radio, es á un quarto término que es 19182″, cuyo logaritmo es 4,2828983. Fig.

Logaritmo de la excentricidad 14170.....					4,1513699
Réstese el log. del semiege 152369......					5,1828966
Diferencia............					8,9684733
Añádase el log. de 57°............................					5,3144251
Suma log. const. para la 2.ª anal. (695).					4,2828984
Log. const. para la primera anal.................					0,0405055
L. T. de la sem. anom. verd.	15°	4′	20″..		9,4302374
L. T. sem. anom. exc.	16°	28′	8″, 6.		9,4707429
Luego la anom. exc. es	32	56	17, 2		
Log. const. para la seg. anal......................					4,2828983
Log. sen. anom. exc.	32°	56′	17″ 2.		9,7353855
Log. de 10430″ ó	2°	53′	50″, 0.		4,0182838
Añad. á la anom. exc.	32	56	17, 2		
Anom. media...............	35	50	7, 2		

Fig.

Si la anomalía verdadera dada pasase de *6* signos ó 180°, se tomará lo que faltare para los 360°, ó los 12 signos, á fin de sacar la distancia al afelio por el camino mas breve, de la qual se hará el mismo uso que en el egemplo propuesto. Pero despues de averiguada la anomalía media, se tomará su suplemento para 360° á fin de que salga siempre la anomalía media qual corresponde contándola por el orden de los signos.

Este es el método por el qual se determina *la anomalía media conociendo la anomalía verdadera*; pero lo mas comun es que sea dada la anomalía media y se busque la otra. En este caso se debe averiguar con corta diferencia por las tablas, qual es la equacion de la orbita que corresponde al grado de anomalía dado; se la aplica á la anomalía media para sacar la verdadera; y esta anomalía verdadera se convierte en media por las reglas antecedentes. Quando la anomalía media que por este camino se halla es la misma que la dada, es prueba de que es exacta la equacion de que se ha hecho uso; si sale una anomalía media mayor de lo que corresponde, se rebaja algo de la anomalía verdadera supuesta, y de este modo se saca despues de dos ó tres supuestos, una anomalía media que quadra puntualmente con la que fue dada; la diferencia entre esta y la anomalía media que sirvió para hallarla, es la equacion cabal que se buscaba.

697 ***El Radio vector*** ó la distancia de un planeta al Sol, una vez conocidas la anomalía verdadera y la ano-

anomalía excéntrica, se halla por medio de esta propor- Fig.
cion: *El seno de la anomalía verdadera es al seno de la anomalía excéntrica, como la mitad del ege menor es al radio vector.*

Con tirar la linea NQ, paralela àl radio vector MS, 113.
los triángulos semejantes nos dan esta proporcion, $SM : QN :: RM : RN :: CD : CK$ ó CN; luego $SM : CD :: QN : CN ::$ sen QCN : sen CQN :: sen RCN : sen RSM; luego sen CSM : sen $NCS :: CD : SM$.

698 Con la mira de facilitar el uso de esta proposicion hemos puesto en la tabla (695) los logaritmos de cada semiege conjugado para los planetas principales, suponiendo la excentricidad, qual se halla en las tablas de Halley. Por la propiedad de la elipse (III. 85) se sabe que CD ó $\surd(SD^2 - CS^2) = \surd(CP^2 - CS^2)$, ó lo que es propio, $\surd(CP + CS).\surd(CP - CS)$; esto quiere decir que CD es igual al producto de las raíces de la distancia afelia y de la distancia perihelia; es, pues, facil de determinar este semiege, en conociendo la razon entre la excentricidad y el ege mayor; despues de egecutada esta determinacion, se infiere la distancia por medio de la proporcion antecedente.

Por egemplo, la anomalía verdadera supuesta (696) es de 30° 8′ 40″, la anomalía excéntrica 32° 56′ 17″; se pide la distancia de Marte al Sol ó el radio vector. Se sumará el logaritmo de la distancia afelia con el logaritmo de la distancia perihelia, se tomará la mitad de su

Fig. suma, que será el logaritmo del semiege conjugado de lá órbita de Marte, 5,1810105
Añad. el log. sen anom. exc. 32° 56′ 17″ 2. 9,7353855

4,9163960
Rest. log. sen anom. verd........................ 9,7008609
Log. de la dist. 164261........................ 5,2155351

114. 699 *Dada la Anomalía media, hallar la Anomalía verdadera.*

En el círculo *ANB*, circunscrito á la órbita *AMB* de un planeta, hemos visto como tomando *AX* por anomalía media, la diferencia *NX* entre la anomalía media y la anomalía excéntrica *ACN* es igual á la perpendicular *ST* (693). Si desde el punto *X* se tira una línea *XY* paralela á *NCT*, ó perpendicular á *ST*, la línea *SY* será la diferencia entre el arco *NX* = *ST*, y el seno de dicho arco, que es igual con *YT*. Esta diferencia entre el arco y el seno no pasa de medio segundo, quando el arco *NX* no pasa de grado y medio; entonces se la puede omitir, y se pueden considerar las lineas *NC*, *XS* como paralelas entre sí, en cuyo caso el ángulo *CXS* es igual al ángulo *NCX*. En el triángulo *SCX* conocemos dos lados y el ángulo que forman, es á saber, la excentricidad *SC*, el radio del círculo, esto es, *CX*, igual á la distancia media, ó al semiege de la elipse, y el ángulo comprendido *SCX* que es el suplemento de la anomalía media dada *ACX*; hallarémos, pues, el ángulo *CXS*, igual

igual á *NCX*, el qual rebajado de la anomalía media Fig. *ACX* dará la anomalía excéntrica *ACN*, cuyo suplemento es *NCS*. En el triángulo *NCS* conocemos tambien los dos lados *SC*, *CN*, y el ángulo comprendido *NCS*, hallaremos, pues, el ángulo *NSC* ó *NSP*. Finalmente, diremos por la propiedad de la elipse (III. 91), *PN* es á *PM*, ó el ege mayor es al menor, como la tangente de este último ángulo *NSP* á la tangente de la anomalía verdadera *MSP*.

700 Si el ángulo *CXS* ó el arco *NX* que discrepa muy poco de él es tan grande que su seno = *TY* sea sensiblemente menor que el arco, ó que *NX*, quiero decir, si dicho ángulo pasa de $1^{\circ}\ 30'$, se tomará la diferencia entre el arco y el seno en la tabla siguiente, en decimales del radio *CA*, y se sacará *SY*. Se buscará tambien el lado *SX* del triángulo *CSX*; hecho esto, en el triángulo *XSY* rectángulo en *Y*, conoceremos *SY* y *SX*, en partes del radio *CA* que siempre se toma por unidad, hallaremos el ángulo *SXY* el qual restado de *SXC*, dará *YXC* igual al ángulo *NCX*, que necesitábamos en el cálculo antecedente para restarle de la anomalía media.

Se echa de ver que esta cuestion pende de la quadratura del círculo, pues en su resolucion se necesita la diferencia entre un arco y su seno, y que por lo mismo el método sería dificultoso de practicar si fuese tan grande la excentricidad que el arco *NX* fuese estremadamente grande, conforme sucede en los Cometas. Pe-

Fig. ro esto se remedia por el método indirecto (*696*).
La tabla siguiente se calcúla por lo dicho (4*6* y 5 0).

Diferencia entre los arcos de círculo y sus senos en partes del radio, y en segundos de grado.

Grados	Diferencia en decimales	En segundos	Grados	Diferencia en decimales	En segundos
1	0, 0000009	0′ 0″	7	0, 0003037	1′ 3″
2	0, 0000071	0 1	8	0, 0004532	1 33
3	0, 0000239	0 5	9	0, 0006450	2 13
4	0, 0000567	0 12	10	0, 0008848	3 3
5	0, 0001108	0 23	11	0, 0011767	4 3
6	0, 0001913	0 39	12	0, 0015278	5 16
7	0, 0003037	1 3	13	0, 0019415	6 41

701 Daremos un egemplo. Dada en la orbita de Mercurio la excentricidad 0,20878, esto es, de 20878 partes de las quales hay cien mil en el semiege de la orbita de Mercurio, se pide la anomalía verdadera que corresponde á *6*0° de anomalía media. Si del quadrado del ege mayor restamos el quadrado de la excentricidad, sacaremos el quadrado del semiege menor *CG*, de donde
114. inferiremos $CG = 0{,}97796$, que sacaríamos mas facilmente todavia por el método declarado (*69*8). En el triángulo *XCS*, en el qual conocemos los dos lados y el ángulo que forman $XCS = 120°$, buscaremos el ángulo *X*, diciendo : la suma de los lados *CX* y *CS*, ó la distancia afelia, es á su diferencia, que es la distancia perihelia, como la tangente de la mitad de la anomalía media es á la tangente de 20° 42′ 8″, los quales rebajados de dicha mitad dan el ángulo *X* de 9° 17′ 52″, y el

el lado *SX* de 1,11905. La cantidad *SY* es 0,00071, Fig.
por la tabla antecedente; pero $SX : SY :: R :$ sen $2' \, 11''$; restaremos, pues, $2' \, 11''$ del ángulo *N*, y sacaremos *CXY* igual á $NCX = 9° \, 15' \, 41''$, y restando esta cantidad de la anomalía media, quedarán para el ángulo *ACN* $50° \, 44' \, 19''$, cuyo suplemento *NCS* es $129° \, 15' \, 41''$. Así en el triángulo *NCS* diremos, la distancia afelia es á la distancia perihelia, como la tangente de $25° \, 22' \, 9'' \frac{1}{2}$ es á la tangente de un ángulo el qual añadido á $25° \, 22' \, 9'' \frac{1}{2}$ da $NSP = 42° \, 36' \, 45'' \frac{1}{2}$. Para inferir de aquí la anomalía verdadera, diremos: *PN* es á *PM*, ó el semiege mayor 1 es á la mitad del semiege menor 0,97796, como la tangente *NSP* es á la tangente de *MSP*, que será de $41° \, 58' \, 38''$; esta es la anomalía verdadera que corresponde á 60° de anomalía media. La diferencia entre estas dos anomalías es la equacion de la orbita ó la equacion del centro, $18° \, 1' \, 22''$.

702 La distancia del planeta al Sol es facil de hallar al mismo tiempo que la anomalía verdadera; porque en los triángulos *PSN*, *PSM*, tomando *SP* por radio, los lados *SN* y *SM* serán como las secantes de los ángulos *PSN*, *PSM*, ó lo que viene á ser lo propio, en razon inversa de los cosenos (I. 650); luego el coseno de la anomalía verdadera es al coseno del ángulo *PSN*, como el lado *SN* hallado antes es al radio vector *SM*, que es la distancia del planeta al Sol.

Fig.

Hypótesi Elíptica simple.

703 Para simplificar las operaciones que pide la teórica exacta de Keplero (699), se ha hecho mucho uso de lo que Casini llama *Hypótesi Elíptica simple*, que abrevia muchísimo los cálculos. Consiste esta hypótesi en suponer que los ángulos en el focus superior de la elipse crecen uniformemente, y son proporcionales
115. á los tiempos, esto es, que el ángulo *AFL*, crezca siempre uniformemente en tiempos iguales, bien que las anomalías verdaderas como *ASL*, sean muy desiguales. Así, en la hypótesi elíptica simple, el ángulo *AFL* se toma por la anomalía media.

704 Seth Ward, Catedrático de Astronomía en Oxonia, dió en su *Astronomía Geométrica* publicada el año de 1656 otro modo muy sencillo de calcular la equacion en una orbita elíptica, suponiendo el movimiento uniforme al rededor de uno de los focus. Esta es la razon por que los Ingleses llaman *Hypótesi de Ward* la hypótesi elíptica simple. Segun el método de Ward se prolonga *FL*, de modo que *FE* sea igual al ege mayor *AP* de la elipse, será *LE* = *LS*, porque *FL* y *LS* tambien son iguales (III. 84) al ege mayor. Luego el triángulo *LSE* es isósceles, el ángulo *E* igual al ángulo *LSE*, y el ángulo esterior *FLS* duplo del ángulo *E*.

705 Para hallar la anomalía verdadera, y la equacion de la orbita ó el ángulo *FLS*, se debe tener presente

te (I.676) que la semisuma de los lados *FE* y *FS* es á su semidiferencia, como la tangente del semisuplemento del ángulo *LFS* es á la tangente de la semidiferencia de los ángulos *E* y *FSE*. Pero la semisuma de *FE* y *FS* es igual á *AS*, su semidiferencia igual á *PS*; la semisuma de los ángulos *FES*, *FSE* es igual á la mitad del ángulo esterno *AFL*, ó á la mitad de la anomalía media; la semidiferencia de dichos ángulos es tambien la semidiferencia del ángulo *FSE* y del ángulo *LSE* (que es igual á *LES*); es, pues, la semianomalía verdadera *ASL*. Bastará, pues, hacer esta proporcion: *La distancia afelia es á la distancia peribelia, como la tangente de la mitad de la anomalía media es á la tangente de la mitad de la anomalía verdadera.* Fig.

La distancia *SL* del planeta al Sol tambien se saca por una proporcion por medio del triángulo *SLF*, con decir: *El seno de la equacion del centro* SLF *es al duplo* FS *de la excentricidad, como el seno de la anomalía media* LFS *es al radio vector* SL.

706 Todo lo dicho hasta aquí acerca de la equacion de la orbita, nos dá á conocer tres propiedades, de las quales se nos ofrecerán muchas ocasiones de hacer memoria. 1.° La equacion de la orbita es nula en el ápside superior (afelio ó apogeo), porque ácia dicho punto el lugar medio y el lugar verdadero coinciden; pero al salir del ápside su diferencia crece con rapidez, porque siendo la velocidad verdadera la mínima, discrepa máximamente de la velocidad media. 2.° esta diferencia se vá acumu-

lan-

Fig. lando cada dia, mientras que la velocidad verdadera es menor que la velocidad media; quando son iguales, hay un punto ácia tres signos y algunos grados de anomalía media donde la diferencia que hasta entonces fue creciendo, es máxima, y donde la equacion deja de crecer, manteniéndose casi una misma algun tiempo para ir despues menguando hasta el ápside inferior (sea perihelio ó perigeo), donde el lugar verdadero y el lugar medio coinciden otra vez. 3.° La equacion del centro es sustractiva, se resta del lugar medio en los seis primeros signos para hallar el lugar verdadero, porque al salir del ápside superior la velocidad media es mayor que la velocidad verdadera, y por lo mismo el lugar medio está mas adelantado; luego se debe restar de la longitud media la cantidad de la equacion para hallar el lugar verdadero. Despues del ápside inferior todo es al revés; siendo máxima la velocidad verdadera, excede á la media, y el lugar verdadero se halla siempre el mas adelantado en la segunda mitad de la elipse ó en los seis últimos signos de la anomalía. Entonces la equacion de la orbita se añade al lugar medio para sacar el lugar verdadero, ó á la anomalía media para sacar la verdadera.

De la Equacion Máxima.

707. La *Equacion Máxima* se puede observar inmediatamente, conforme diremos muy en breve; pero quando el tamaño y la figura de la elipse es dada; quiero decir, quando

do se conoce su distancia afelia y su distancia perihelia ó su Fig.
excentricidad (679), se puede hallar por cálculo la 116.
equacion máxima, para cuyo fin basta determinar el punto *M*, donde se verifica la velocidad media. Con efecto, así que el planeta llega al punto donde su velocidad angular *DFM* (esto es, el ángulo que anda visto desde el sol) es igual á la velocidad media, ó de 59′ 8″ cada dia si es la tierra, la longitud media deja de adelantar respecto de la longitud verdadera. Entonces discrepa de ella lo mas que puede, porque hasta aquel instante la velocidad real que era menor, hacia que atrasase todos los dias el lugar verdadero respecto del lugar medio; pero así que la velocidad verdadera llega á ser igual con la velocidad media, está para excederla, está para empezar á ganar lo que habia perdido hasta entonces, el lugar verdadero se acerca al lugar medio, y la equacion de la orbita mengua. Por consiguiente toda la dificultad está en determinar el punto *M*, y la anomalía *AFM* del planeta en el instante que su velocidad es igual á la velocidad angular media. Para esto se toma una linea *FM*, media proporcional entre los dos semieges de la orbita, se traza desde el focus *F* como centro un círculo *MN* sobre el radio *FM*, cuyo círculo será igual (75) en superficie con la elipse. Supongamos un cuerpo que ande el círculo *MN* en un tiempo igual al de la revolucion del planeta en su elipse, su velocidad angular será constantemente igual á la velocidad angular media del planeta, pongo por caso de 59′ 8″ para el Sol. La area trazada

en

Fig. en el círculo será siempre igual á la area trazada en el mismo tiempo en la elipse, una vez que las areas totales son iguales y andadas en tiempos iguales, siendo unas mismas las duraciones de las revoluciones, y las areas parciales de la elipse proporcionales á las partes del tiempo. Por egemplo, si el Sol traza en un dia una area *DFR* de su elipse igual á la 365^{ma} parte de la superficie elíptica, la area *EFO* trazada en el círculo, tambien será la 365^{ma} parte de la area del círculo (que es igual á la elipse); la velocidad verdadera del Sol, ó el ángulo *DFR*, será, pues, igual á la velocidad media en *M*, esto es, al ángulo *DFO*; porque son dos sectores iguales que tienen una misma longitud *FM*, una misma superficie, y por consiguiente un mismo ángulo. Por otra parte los triángulos iguales *MED*, *MRO* que están el uno fuera del círculo, el otro dentro, manifiestan que el sector elíptico es igual al sector circular que tiene el mismo ángulo en *F*; luego para determinar el punto de la velocidad media, se ha de determinar la interseccion *M* de la elipse y del círculo que la es igual en superficie. Si tiramos desde el punto *M* al otro focus *B* de la elipse una linea *MB*, tendremos un triángulo *BFM*, en el qual conocemos los tres lados, es á saber, *BF* que es el duplo de la excentricidad, *FM* que es la media proporcional entre los dos semieges, y *BM* que es la diferencia entre *FM* y el ege mayor (porque la suma de *FM* y *MB* es igual al ege mayor (III. 84)); por consiguiente resolviendo el triángulo *BFM* buscaremos el ángulo *F* que

que es la anomalía verdadera del planeta al tiempo de la máxima equacion. Fig.

708 Supongamos, para dar un egemplo, el semiege *CA* = 38710, y el semiege conjugado = 37883, como en la orbita de Mercurio, *CF* = 7960, *BF* = 15920, *FM* será = 38294. Resolveremos el triángulo *BFM*; de la semisuma de los tres lados restaremos separadamente cada uno de los tres lados; de la suma de los logaritmos de las dos diferencias de los lados que forman el ángulo que se busca, restaremos la suma de los logaritmos de la semisuma de los tres lados, y de la diferencia del lado opuesto al ángulo que se busca, la mitad del residuo es el logaritmo de la tangente de la mitad del ángulo que se busca. En el caso particular del cálculo de la máxima equacion se reduce á esta regla: *De la distancia afelia se resta separadamente la media* FM, *y el tercer lado* BM, *se buscan los logaritmos de las dos diferencias que de aquí resultan, y se resta el logaritmo menor del mayor, de esta diferencia de logaritmos se resta la de los logaritmos de la distancia afelia y de la distancia peribelia, el residuo es el logaritmo de la tangente de la mitad de la anomalía verdadera.*

En el caso propuesto el ángulo *BFM* se halla ser de $81^\circ\ 4'\ 52''$, esta es la anomalía verdadera al tiempo de la máxima equacion, de donde se puede inferir (696) la anomalía media $104^\circ\ 45'\ 41''$, y su diferencia que es la equacion del centro, será $23^\circ\ 40'\ 49''$: esta ha de

ser

Fig. ser la equacion máxima de la orbita de Mercurio.

116. 709 Declarado el modo de calcular la observacion, declaremos como se observa. Desde el instante que un planeta sale de su afelio *A*, hasta que llega al punto *M* de su máxima equacion, su velocidad es menor de lo que sería su velocidad media, la anomalía verdadera menor que la anomalía media, discrepa de ella mas y mas; quando el planeta despues de pasado el perihelio *P* se halla en el punto *G*, á nueve signos de anomalía, su distancia verdadera *AFG* al afelio es tambien menor que su distancia media, la cantidad de la máxima equacion. Si se conocieren dos longitudes verdaderas del planeta observadas en G y *M*, discreparán una de otra la cantidad del ángulo *GFM*, que es la suma de las dos anomalías verdaderas. Pero la suma de las dos anomalías medias será mayor el duplo de la equacion, pues cada distancia verdadera es menor que la distancia media, la cantidad de la máxima equacion; en todos tiempos es facil de calcular la suma de las dos anomalías medias, aunque no se conozca el lugar del afelio *A*, porque la suma de dos anomalías medias es igual al movimiento medio del planeta en dicho intervalo de tiempo, y se halla facilmente en conociendo lo que dura la revolucion (642). Así, el exceso del movimiento medio calculado, respecto del movimiento verdadero observado dá el duplo de la equacion máxima, con tal que las dos observaciones se hayan hecho en *M* y *G*, esto es, en el tiempo de la velocidad media (707). El movimiento verda-

dadero será el mayor, si se toma la primera observacion Fig. antes del perihelio, y la segunda despues. El dia 7 de Octubre de 1751 el lugar verdadero del Sol observado por el Abate la Caille antes del perigeo, contando tres dias de observaciones examinadas y comparadas unas con otras, se

halló de....................................	6^s	13°	$47'$	$13''$	7
El dia 28 de Marzo esta longitud verdadera fue de.........................	0	8	9	25	5
La diferencia entre estas dos longitudes, ó el movimiento verdadero del Sol, era pues........................	5	24	22	11	8
Pero en el mismo intervalo el movimiento medio debia ser por el cálculo...	5^s	20°	$31'$	$43''$	2
Diferencia, dupla de la máxima equacion................................		3	50	28	6
Cuya mitad es la eq. de la orbita...		1	55	14	3

Esta sería con efecto la máxima equacion de la orbita, si en ambas observaciones el Sol se hubiera hallado puntualmente en los puntos de su máxima equacion. Pero despues de calculadas por las tablas cada una de estas dos equaciones, se halló que faltaban 18″, 6 para que la suma de las dos equaciones que se verificaban el dia 7 de Octubre, y 28 de Marzo fuese puntualmente el duplo de la máxima equacion; y para esto bastaba conocer con poca diferencia su valor. Se añadirán, pues, estos 18″, 6 á la cantidad hallada, y sacaremos la equacion que resul-

Fig. sulta de las dos observaciones 1° 55′ 33.″

710 Como poquísimas veces tenemos dos observaciones hechas puntualmente en los puntos *M* y *G* de la velocidad media, no se suele sacar en el primer cálculo la cantidad cabal de la máxima equacion. Pero despues de determinada con corta diferencia, conforme se verá mas adelante, la equacion y el lugar del ápside, se calcúla para los dos tiempos de observaciones la equacion de la orbita, y se calcúla tambien la máxima equacion (707), entonces se sabe quánto la equacion dada por las dos observaciones, habia de discrepar de la máxima.

711 Despues de determinada por observacion la equacion máxima, para inferir de ella la excentricidad, lo mas acomodado es hacer una regla de falsa posicion, ó suponer desde luego conocida la excentricidad que se busca, para inferir de ella la máxima equacion (707). Si saliere mayor de lo que debe, se disminuirá la excentricidad supuesta, y se hará de nuevo el cálculo. Este método para determinar la excentricidad por medio de la equacion máxima suele ser mas acomodado que el que usó Keplero (679).

712 La máxima equacion del Sol, ó de la órbita terrestre es la que se puede determinar con mas frecuencia y facilidad. El Abate la Caille la determinó de 1° 55′ 32.″ Por lo que mira á la de los demás planetas, no siempre tiene uno á su disposicion dos longitudes heliocéntricas observadas en las distancias medias, y no es

po-

posible hallarlas respecto de Mercurio. Por este motivo hay varios métodos para egecutar esta determinacion, que no podemos declarar aquí, y acuda el que quisiere verlos á la Obra de Mr. de la Lande. Fig.

713 Sin embargo, pondremos á la vista los resultados que por ellos han sacado quatro Autores distintos acerca de la equacion máxima de cada planeta; igualmente que las excentricidades que se pueden inferir (708 y 711), y se infieren con efecto de estas máximas equaciones observadas, bien que tambien se pueden determinar sin el socorro de la equacion máxima.

Las excentricidades que ván en la tabla siguiente suponen la *distancia* media del sol á la tierra 100000, *del mismo modo* que las distancias medias (682); pero *Mr. de la* Lande las ha añadido decimales, quando se las ha dado el cálculo. Pero los logaritmos de las excentricidades suponen la distancia media de cada planeta igual á la unidad, porque suelen servir comunmente en esta forma (696). Entre todas las excentricidades de la última columna no se han calculado directamente mas que las de Mercurio y Marte; las otras se han sacado de la máxima equacion observada que está en la segunda tabla. Se la ha añadido la excentricidad de la Luna, qual asegura Mayer que se la han dado las observaciones.

Tabla de las Excentricidades, segun diferentes Autores.

Planetas.	Excentricidad segun Keplero.	Segun Halley.	Log. de la excentr. en parte de la dist. med.	Excentric. segun los cálculos de Mr. de la Lande.
Mercurio.	8150	7970	9, 3136351	7960
Venus.	501	504, 985	7, 8439409	510, 2
El Sol.	1800	1692, 40	8, 2285030	1680, 207
Marte.	14115, 5	14170	8, 9684732	14208, 1
Júpiter.	25074	25078, 6	8, 6832183	25277, 3
Saturno.	54143, 5	54381, 5	8, 7558994	53210
La Luna.				0,0547218

Tabla de las Máximas Equaciones de las órbitas planetarias, segun varios Autores.

	Boulliaud. 1645.	La Hire. 1702.	Halley. 1719.	Casini. 1740.	Segun las tab. de Mr. de la Lande.
Mercurio.	24° 17′ 20″	24° 16′ 52″	23° 42′ 36″	24° 2′ 58″	23° 40′ 49″
Venus.	0 54 36	0 50 0	0 48 0	0 49 6	0 48 30
El Sol.	2 2 41	1 55 42	1 56 20	1 55 51	1 55 31, 6
Marte.	10 36 12	10 40 40	10 40 2	10 39 19	10 41 47
Júpiter.	5 34 0	5 36 54	5 31 36	5 31 17	5 34 1
Saturno.	6 37 10	6 30 00	6 32 4	6 31 40	6 23 19
La Luna.					6 18 32

Métodos para determinar el lugar del Afelio de un planeta.

714 Hay tres métodos para esto, el primero y mas sencillo de todos sirve para el Sol, tambien se puede aplicar en algunas ocasiones á los planetas, y es como sigue.

Quando hay muchas observaciones de un planeta hechas en diferentes puntos de su órbita, se han de buscar las que dan dos puntos diametralmente opuestos; y si los tiempos de dichas observaciones discrepasen puntualmente una media revolucion, será cierto que la una de ellas está

en

en el afelio y la otra en el perihelio. Por consiguiente comparando de dos en dos muchas observaciones, se dará indefectiblemente con dos que señalarán el lugar de los ápsides. Fig.

Sea *A* el afelio de un planeta, y *P* el perihelio, la parte *ABP* de la elipse es igual á la parte *ACP*, ambas son andadas en el tiempo de la media revolucion, pongo por caso en $182^{d}\ 15^{h}\ 7'\ 40''$, si se trata del Sol, por lo que veremos despues (721). Aquí tomamos la revolucion anomalística, esto es, respecto del apogeo; pero en una primera aproximacion puede bastar la revolucion trópica (642), suponiendo el afelio inmobil en el discurso de una media revolucion. 117.

Si se toma otro punto qualquiera *D*, y el punto opuesto *E*, la parte *DACE* de la elipse pedirá mas tiempo que la parte *DBPE*, porque la primera incluye el afelio, esto es, el trecho donde el movimiento del planeta es el mas lento, siendo así que la parte *DBE*, en la qual está el perihelio, es andada con mas rapidez y en menos tiempo.

Por consiguiente los puntos *A* y *P* de los dos ápsides son los únicos que por estar diametralmente opuestos respecto del focus de la elipse, forman tambien dos intervalos de tiempos iguales. Estaremos, pues, seguros de conocer el lugar de los ápsides, si hallamos dos longitudes que estando diametralmente opuestas como *A* y *P*, correspondan tambien á tiempos distantes uno de otro una media revolucion, esto es, la mitad del tiempo que necesita el pla-

 ne-

Fig. neta para volver á su ápside, y bastarán entre muchas observaciones de un planeta, dos que cumplan á un tiempo con estas dos condiciones.

715 El uso de este método pende de la proposicion siguiente que sirve para hallar una cantidad, la qual añadida al tiempo de la observacion, dá el del paso por el afelio.

La diferencia de las velocidades, afelia y perihelia, es á la velocidad perihelia, como la diferencia entre el intervalo de tiempo de las dos observaciones, y la media revolucion anomalística, es al tiempo que gastará el planeta para llegar á su afelio.

117. Sea a el movimiento diurno en el afelio; p, el movimiento diurno en el perihelio; c, la diferencia determinada por observacion entre el tiempo por DPE, y la media revolucion anomalística; t, la cantidad que se busca, ó el tiempo que corresponde al arco AD. Tendremos en virtud de esto, $p : a :: t : \frac{ta}{p}$, esto es, la velocidad perihelia es á la velocidad afelia, como el tiempo por AD es al tiempo por PE. Si á la media revolucion anomalística desde A á P, se añade el tiempo por AD, y se resta el tiempo por PE, resultará $t - \frac{ta}{p}$ que será la diferencia entre el intervalo observado y la media revolucion anomalística, cuya diferencia hemos llamado c; luego $t - \frac{ta}{p} = c$, ó $tp - ta = pc$, de donde sale esta proporcion $p - a : p :: c : t$, y por consiguiente la proposicion que habíamos de probar.

716 *Egemplo.* El lugar del Sol observado en el Cabo de Buena-Esperanza por el Abate la Caille el dia 30 de Ju-

Junio de 1751, á $0^h\ 2'\ 55''$ de tiempo medio en el Cabo, ó el dia 29 á $22^h\ 58'\ 40''$ de tiempo medio reducido al meridiano de París, era de $3^s\ 8^\circ\ 9'\ 2''\ 3$; y el dia 29 de Diciembre á $22^h\ 58'\ 45''$, era de $9^s\ 8^\circ\ 30'\ 5''\ 0$. Como el apogeo debió caminar $32''$, 7 en este invervalo, se ha de añadir esta cantidad á la primera longitud para reducirla, respecto del apogeo, al mismo estado que si el apogeo fuese inmobil, y tendremos $3^s\ 8^\circ\ 9'\ 35''\ 0$, cuyo punto opuesto habia de ser $9^s\ 8^\circ\ 9'\ 35''$, menos adelantado $20'\ 30''$ que el lugar verdadero observado. El dia 30 de Junio necesita el Sol $8^h\ 36'\ 10''$ para andar dicha cantidad; luego el dia 30 de Junio á $7^h\ 34'\ 50''$ el Sol habia de estar cabalmente en el punto opuesto al lugar que se observó despues el dia 29 de Diciembre. El intervalo de tiempo medio entre estos dos instantes es de $182^d\ 15^h\ 23'\ 55''$, esto es, $16'\ 13''$ mas largo que la media revolucion anomalística que el Abate la Caille supuso de $182^d\ 15^h\ 7'\ 42''$; esto prueba que el Sol no habia llegado todavia á su apogeo al tiempo de la primera observacion. Si hacemos la proporcion siguiente que acabamos de demostrar (715): el exceso de la velocidad del Sol perigeo respecto de la velocidad del sol apogeo, que es de $4'$, es á la velocidad perigea $61'\ 12''$, como $16'\ 13''$ de tiempo que queremos tener de menos en el intervalo de las dos observaciones, son á $4^h\ 8'\ 7''$, tendremos lo que le falta al Sol el dia 30 de Junio para adelantarse lo que es menester. Se añadirá esta cantidad al Fig.

Fig. dia 30 de Junio $7^h\ 34'\ 50''$, y tendremos el momento del paso del Sol por el apogeo el dia 30 de Junio de 1751 á $11^h\ 42'\ 57''$ tiempo medio en París. La longitud del Sol para el mismo instante es facil de determinar por la observacion, es de $3^s\ 8^\circ\ 39'\ 56''$; este es el lugar del apogeo del Sol que resulta de este cálculo; este es al mismo tiempo el lugar verdadero y el lugar medio del sol el dia 30 de Junio de 1751, á $11^h\ 42'\ 57''$, tiempo medio en París. De donde se saca la longitud media (723) para el último dia del año de 1749 á mediodia medio en París, $9^s\ 10^\circ\ 0'\ 46''\ 5$.

717 Tambien se puede hallar el lugar del afelio por medio de observaciones que disten una de otra un quadrante de círculo no mas, quando se conoce la equacion del centro, y está determinada con toda certeza por observaciones hechas en las distancias medias (707 y sig.). Basta tomar dos observaciones hechas la una ácia el afelio, la otra en la distancia media ó muy cerca para conocer exactamente el lugar del afelio. Se calculará para cada una de estas observaciones la equacion del centro, suponiendo el lugar del afelio qual se conoce, y se tomará la diferencia entre estas dos equaciones, si ambas observaciones estuvieren del mismo lado del afelio, ó su suma si la una fuere antes y la otra despues del afelio. La diferencia ó la suma de estas dos equaciones será la cantidad que el movimiento verdadero debe discrepar del movimiento medio que siempre se supone conocido en el intervalo de las dos obser-

servaciones; si este movimiento verdadero calculado discrepare mucho del movimiento medio, esto es, si discrepare mas que el movimiento verdadero observado, será señal de haber supuesto el lugar del afelio demasiado cerca de la observacion hecha en la distancia media. Fig.

718 Con efecto, sea un planeta que está en *B* en su media distancia, que tenga como Júpiter $5^{\circ}\frac{1}{2}$ de equacion del centro, y en *D* á 6° de su afelio, que suponemos conocido al poco mas ó menos, teniendo medio grado de equacion del centro, la diferencia de estas dos equaciones es 5°, este es el exceso que el movimiento medio ha de llevar al movimiento verdadero en el intervalo de las dos observaciones. Supongo que entre los dos puntos *B* y *D* haya cabalmente un quadrante de la revolucion de Júpiter en tiempo (como unos tres años), por manera que el movimiento medio sea de 90°; el movimiento verdadero ha de ser por el cálculo antecedente de 85°, esto es, 5° menor que el movimiento medio, y supongo que la observacion le haya dado de 86°, menor 4° que el movimiento medio, esto es, menos diferente del movimiento medio que por el cálculo. En virtud de esto, discurriremos del modo siguiente: Si apartamos en nuestro cálculo el afelio *A* de la observacion hecha en *B*, la equacion en *D* será mayor, estando mas lejos del afelio; pero la equacion en *B* no variará sensiblemente, porque ácia las distancias medias apenas varía la equacion. Por consiguiente la diferencia de las dos equaciones en *D* y *B*, llegará á 117.

Fig. ser menor de lo que era en el primer supuesto, y se acercará mas á la observacion, por la qual acabamos de suponer que no habia mas que 4° de diferencia entre el movimiento verdadero y el medio, en lugar de 5° que daba el cálculo.

Luego esta diferencia entre el movimiento verdadero y el medio, que el cálculo dió mayor de lo que corresponde, nos está diciendo que el lugar del afelio supuesto en dicho cálculo, estaba demasiado inmediato á la observacion *B*. Le podemos apartar algunos minutos para ver qué influjo esto tendrá en la diferencia entre el movimiento verdadero y el movimiento medio, y hallar finalmente por medio de una ó dos pruebas el lugar del ápside *A*, de que nos hemos de valer á fin de que la diferencia calculada concuerde con la diferencia observada.

719 El tercer método para hallar *el lugar del afelio* de un planeta es el que Mr. de la Lande ha practicado respecto de Mercurio y Venus, y supone que se haya observado la máxima digresion de Mercurio quando está á sus distancias medias del Sol, y la distancia ó el radio vector varía rápidamente. Si la distancia media y la excentricidad fueren yá conocidas, será facil de calcular dónde se ha de colocar el afelio, para que el radio en el qual está el planeta, sea cabalmente qual corresponde á la digresion observada.

117. Sea *C* el lugar de Mercurio en su distancia media, ó visto desde la tierra *T* en el rayo *TC* que toca la orbita, siendo entonces la máxima digresion el ángulo *STC*, y la distancia al afelio *ASC*. Si en las tablas de que usa el cal-

calculador el lugar del afelio estuviese mal señalado, de Fig.
modo que le señaláran en *D*, con llevar el punto *D* á *A*, la linea *SC* llegaría á *SG*, y la elongacion de Mercurio sería igual al ángulo *STG*, mayor por lo mismo que la elongacion *STC*. Por consiguiente, si por el cálculo de las tablas saliera una elongacion menor de lo que debe ser, se deberá acercar el afelio al lugar de la observacion dejando siempre á Mercurio en la misma longitud *SFG*, ó si se quiere guardando la misma longitud media. Así, en el caso de que se quiera aumentar la elongacion para que concuerden las tablas con la observacion, se debe aumentar el lugar del afelio, si la anomalía no llega á 6 signos, y disminuirla si Mercurio está en los últimos 6 signos de su anomalía. Un grado de error en el lugar del afelio causa una alteracion de $\frac{1}{250}$ en la distancia del Sol; y como la máxima digresion viene á ser entonces de 21°, resultarian $5'$ de error en la misma digresion. Pero es cierto que se la puede observar con diferencia de 15 ó $20''$, luego entonces es conocido el lugar del afelio de Mercurio con diferencia de 3 ó $4'$, por medio de la máxima digresion observada entre 3 y 4 signos, ó entre 8 y 9 signos de anomalía media.

El dia 24 de Mayo de 1764 á $8^{h}\ 7'\ 50''$ tiempo medio, observó Mr. de la Lande la longitud de Mercurio $2^{s}\ 26^{\circ}\ 50'\ 35''$, estaba entonces en su máxima digresion á $22^{\circ}\ 51'\ 12''$ del Sol, nuestro rayo visual tocaba su órbita en la distancia media ácia $9^{s}\ 8^{\circ}$ de anomalía. Cal-

Fig. Calculó esta longitud por las tablas de Halley y la halló 1′ 14″ mayor de lo que correspondía; pero con añadir en dichas tablas 14′ $\frac{1}{2}$ á la longitud del afelio sin mudar la longitud de Mercurio, la anomalía era menor igualmente que el radio vector, la elongacion de Mercurio era tambien menor, y la longitud de Mercurio concordaba con la observacion. Síguese de aquí que la longitud del afelio era menor de lo que debiera en las tablas de Halley, por cuyo motivo Mr. de la Lande la ha añadido 10′ en sus tablas, suponiéndola de 8ˢ 13° 49′ 30″ para 1764.

Hallar el movimiento de los Apsides y la Revolucion Anomalística de un Planeta, por las observaciones.

720 La revolucion de un planeta respecto de su ápside, el tiempo que gastó en volver á él, ó el intervalo entre su paso por el afelio y el paso siguiente, se llama la *Revolucion Anomalística* (714), porque la anomalía vuelve á empezar en cada paso por el ápside. Esta revolucion anomalística siempre es algo mayor que la revolucion respecto de los equinoccios, porque el movimiento de los ápsides se hace por el orden de los signos; determinaremos primero la del Sol ó la de la Tierra, por ser una de las mas fáciles de averiguar.

Si el lugar del ápside de la Tierra estuviera exactamente fijo en el cielo, la revolucion anomalística sería igual con la revolucion sideral (642); pero como el apo-

apogeo del Sol tiene algun movimiento progresivo en el orden de los signos, conforme lo manifiestan las observaciones, y se infiere de la Teórica de la atraccion, es preciso, para averiguar su revolucion anomalística, comparar dos pasos del Sol por su apogeo, y no dos regresos á una misma estrella, ni dos pasos por el equinoccio (549). Fig.

721 De todo lo que los Astrónomos modernos han indagado acerca de este punto resulta que

La revolucion anomalística del Sol, ó la diferencia entre dos pasos consecutivos del Sol por su apogeo es de $365^d\ 6^h\ 15'\ 24''$, esto es, $26'\ 35''$ mayor que el año trópico, y el movimiento del apogeo $1^\circ\ 49'\ 10''$ en un siglo, ó $65''\frac{1}{2}$ al año respecto del equinoccio.

722 Los afelios de los demas planetas tienen tambien su movimiento, pero no está averiguado con la misma puntualidad, por ser muy pocas las observaciones antiguas que nos han quedado de los planetas. Fuera de esto, este movimiento es tan poco perceptible, que no se puede determinar con bastante precision, excepto el de Marte. Lo manifestará la diferencia que se nota entre las determinaciones de Casini y Halley, que espresaremos dentro de poco en una tabla.

Hallar las Épocas de las longitudes medias de los Planetas.

723 Una vez determinado por lo dicho (714 y 719) el lugar del afelio de un planeta, estará averiguada por el mismo método una longitud media. Fuera de esto, el dia que

Fig. que un planeta está en su ápside, su longitud verdadera, su longitud media y la longitud de su ápside son cabalmente una misma cosa; están, pues, averiguadas todas tres en teniendo averiguada una de ellas.

Daremos un egemplo. El dia 15 de Febrero de 1743 á $19^h\ 17'\ 40''$, tiempo medio, se observó una oposicion de Marte, y la longitud media para el momento de la observacion era, segun Mr. de la Lande, de $4^s\ 26^o\ 27'\ 21''$; desde aquel instante hasta el dia 1 de Enero de 1744 á medio dia medio, Marte debió andar $15^s\ 17^o\ 16'\ 53''$, por razon del movimiento anuo. Si se añade este movimiento á la longitud media observada, tendremos la longitud media para principio del año de 1744, $10^s\ 13^o\ 44'\ 14''$ sacada de la observacion, esto es lo que llamamos *Época de los movimientos medios para* 1744.

724 Las épocas de que se hace uso en nuestras tablas astronómicas son para el dia 1 de Enero á medio dia de tiempo medio, en París, quando se trata de años bisiestos; pero en los años comunes se toma el medio dia del dia antecedente, que es el 31 de Diciembre. Por egemplo, la época del Sol para 1750 se halla por la observacion de los equinoccios (553) de $9^s\ 10^o\ 0'\ 43''\ 4$, esta es la longitud media del Sol el dia 31 de Diciembre de 1749 á medio dia medio. Se ha adoptado este método con el fin de simplificar el uso de la tabla de los movimientos medios para los dias del mes; porque en esta

ta tabla en virtud de la disposicion precedente, basta restar un dia en los dos primeros meses de los años bisiestos para hacer uso de ella en qualquiera tiempo, cuya correccion sería indispensable hacer en diez meses, si todas las épocas se hubieran calculado para el dia 1 de Enero. Con efecto, en las tablas de los movimientos medios para cada dia del mes, se suele poner al dia 1 de Enero el movimiento de un dia, por egemplo, $59' \, 8''$ si es para el Sol. Esto supone que la época está fijada para la víspera; si es para el medio dia mismo del dia 1 de Enero, no hay nada que añadir á la época para hallar la longitud media el dia 1 de Enero; se deberá, pues, rebajar un dia de la fecha propuesta ó $59' \, 8''$ del movimiento que la tabla señalare, y así de los demas dias, hasta el dia 1 de Marzo; entonces el dia intercalar añadido al mes de Febrero, es causa de que todos los movimientos medios de los dias siguientes son $59' \, 8''$ menores, y no hay que hacerles ninguna correccion mas, siendo así que se les deberia añadir el movimiento de un dia todo lo demas del año, si los movimientos hubieran sido cabales en el discurso de los dos primeros meses. Fig.

Quando se conoce la época de un año comun, se la debe añadir el movimiento medio para 365 dias, y queda sacada la época para el año comun siguiente. Si suponemos que la época de 1750 fue $9^s \, 10^\circ \, 0' \, 43'' \, 4$, y se la añaden $11^s \, 29^\circ \, 45' \, 40'' \, 5$, movimiento del Sol para 365 dias, saldrán $9^s \, 9^\circ \, 46' \, 23'' \, 9$, época para 1751.

Fig. 1751. Pero si el año siguiente fuere bisiesto, se añadirá un dia mas, esto es, el movimiento para 366 dias; así, á la época de 1751 se añadirán $0^s\ 0^o\ 44'\ 48''\ 8$, y saldrán $9^s\ 10^o\ 31'\ 12''\ 7$ para la época del año bisiesto 1752. La razon de esta diferencia consiste en que esta última época empieza un dia mas tarde que la de los años comunes.

725 Por el método antecedente tambien se hallaría que la época de las longitudes medias del Sol para el año comun 1700 es de $9^s\ 10^o\ 7'\ 19''\ 6$, rebajando del precedente el movimiento para 52 años. Si se rebaja tambien el movimiento secular que es de $45'\ 55''\ 6$ ademas de las cien revoluciones cumplidas, para 100 años Julianos de los quales hay 25 bisiestos, debería salir la época para 1600. Pero como el año de 1700 era comun, y el año de 1600 era bisiesto, por la regla del Calendario Gregoriano que á su tiempo declararemos, la longitud ó la época de 1700 que es para el dia 31 de Diciembre antecedente, se halla con un dia menos y arrimada á 1600 (724). Se debe, pues, añadir el movimiento de un dia á la época de 1600 hallada por la regla antecedente, á fin de sacar dicha longitud para el dia 1 de Enero á medio dia (y no para el dia 31 de Diciembre antecedente), por este camino se hallará la época de 1600, $9^s\ 10^o\ 20'\ 32''$. En general, quando se quisiere inferir la época de un año secular bisiesto mas remoto, de la de un año secular comun, se deberá restar

de

de esta el movimiento secular, y añadirla el movimiento diurno. Fig.

Asimismo, para hallar la época del año secular comun de 1800, por medio del año secular comun de 1700, no basta añadirle el movimiento secular 45′ 55″ 6, porque este movimiento supone 25 años bisiestos, siendo así que no hay sino 24 en cien años: pero se debe rebajar el movimiento de un dia, ó lo que es lo mismo añadir 11ˢ 29° 46′ 47″ 3 á la primera longitud. De este modo se hallará la época del Sol para 1800 por la de 1700, añadiéndola dicho movimiento secular despues de quitarle un dia, y saldrán 9ˢ 9° 54′ 6″ 9 para la época de 1800.

726 La época de un año secular comun, qual es 1700, añadiéndola el movimiento para 4 años Julianos, de los quales uno sea bisiesto, esto es, 1′ 50″ 2 dá la época de 1704. Si se empieza contando desde una época de bisiesto, como 1704, para hallar la de 1708, será lo mismo, porque en ambos casos hay un dia ademas de los 4 años comunes; pero para hacerse cargo de la igualdad de estos dos casos, es preciso hacer dos consideraciones diferentes. En el primer caso la época para 1700 era para el dia 31 de Diciembre antecedente, la de 1704 para el dia 1 de Enero; por consiguiente aunque los quatro 1700, 1701, 1702, 1703, hayan sido comunes, hay no obstante un dia de mas entre las épocas de 1700 y 1704, por razon del diferente modo de contar-

Fig. tarlos (724). En el segundo caso la época de 1704 y la de 1708, son á la verdad ambas para el dia 1 de Enero; pero hay un dia mas en el discurso del año bisiesto de 1704; así, el intervalo de las épocas crece tambien un dia, y se halla el mismo que entre las de 1700 y 1704.

En general, quando se toma el movimiento para 4, 8, 12 &c. ó un número de años divisible por 4, sea que se empiece por una época comun, 1700, 1701, 1702, 1703, 1800, ó por una época bisiesta, siempre se halla exactamente la época que se pide. Esta es la razon porque hemos tomado el movimiento de 52 años cabales para hallar la época de 1700, por medio de la de 1752 (725), bien que la una fuese comun y la otra bisiesta. Pero si acaso el Calendario hubiese padecido una ó dos interrupciones en el intervalo, como si se pasara de 1700 á 1800 ó de 1699 á 1799, se debería rebajar del movimiento el valor de un dia. Quando se va de 1700 á 1800, como este último año es comun, y su época es para 31 de Diciembre igualmente que la de 1700, siendo así que al año de 1700 se le ha quitado un dia, la diferencia de las dos épocas debe ser forzosamente un dia menor; luego se ha de restar el movimiento diurno del movimiento secular. En el caso de pasar desde 1699 á 1799, tambien se debería rebajar el movimiento de un dia, porque al de 1700 se le ha quitado un dia, y los 100 años que hay desde 1699 has-

hasta 1799 no tienen mas que 24 bisiestos. Por esta razon aunque el año de 1800 sea un año comun, se sacarán puntuales las longitudes de los años siguientes con añadir al año de 1800 el movimiento para un año, dos años &c. tomándole en la tabla que está inmediatamente despues de las épocas. Fig.

Para pasar de la época de 1600 á la de 1500, no basta rebajar el movimiento secular, se debe añadir despues el movimiento de diez dias, porque en 1500 se seguía el Calendario Juliano, ó el estilo antiguo, y en 1600 ya se seguía el nuevo. Como el Calendario Gregoriano quitó diez dias del año de 1582, segun se verá quando tratemos del Calendario, el intervalo de 1500 á 1600 es diez dias menor que el de cien años Julianos, ó de 36525 dias al qual corresponde el movimiento secular. Por consiguiente se quitan diez dias de mas quando se rebaja el movimiento secular; luego se debe añadir el movimiento que corresponde á estos diez dias. Por egemplo, la época del Sol para 1600 es $9^s\ 10^\circ\ 20'\ 32''\ 3$; si restamos $45'\ 55''\ 6$, movimiento secular del Sol, y añadimos despues $9^\circ\ 51'\ 23''\ 3$, movimiento para diez dias, sacaremos $9^s\ 19^\circ\ 26'\ 0''$, época de 1500.

727 Una vez hallada la época de 1500, ya no hay mas variedad en el Calendario, basta restar el movimiento secular $45'\ 55''\ 6$, para hallar la época de 1400; y prosiguiendo la misma sustraccion, se sacan las épocas de los años seculares antecedentes.

Fig.

728 Egecutando de este modo sustracciones continuadas del movimiento secular, se llega al año 100 de Christo, despues al año 0, y despues al año 100 antes de Christo; así desde el año 100 de nuestra era al año 100 antes de Christo hay 200 años de distancia. Segun el modo de computar que siguen los mas de los *Chronologistas*, se debería restar un año de la suma de los años antes y despues de Christo. Por egemplo, el equinoccio observado por Hyparco el año 602 de Nabonasar, cae al dia 24 de Marzo del año 146 antes de Christo segun los Chronologistas; si se le compara con el de 1765, saldran 1911 para la suma de los años, y no hay sin embargo mas que un intervalo de 1910 años, porque el año en que Christo nació se debe llamar *cero*, y no el año 1 antes de Christo; en virtud de esto hemos de decir que el equinoccio de que acabamos de hablar, se refiere al año 145 antes de Christo, y no al año 146.

Épo-

Épocas de los Movimientos medios de los cinco Planetas principales y de sus Afelios para 1750; con los movimientos seculares segun Casini y Halley, y conforme á las tablas que publicarémos.

Epocas de 1750.

	Casini				Halley				Diferencia		Por nuestras tablas			
Mercurio	8^s	13°	19′	5″	8^s	13°	7′	45″	−11′	20″	8^s	13°	9′	50″
Venus	1	16	19	21	1	16	19	23	+ 0	2	1	16	19	4
Marte	0	21	58	43	0	21	58	30	− 0	13	0	21	59	17
Júpiter	0	4	0	59	0	4	5	17	+ 4	18	0	4	2	26
Saturno	7	20	41	56	7	20	26	24	−15	32	7	20	38	53

Movimiento secular de los Planetas.

	Casini				Halley				Diferencia					
Mercurio	2^s	14°	16′	54″	2^s	14°	2′	13″	−14′	41″	2^s	14°	12′	10″
Venus	6	19	11	2	6	19	11	52	+ 0	50	6	19	12	12
Marte	2	1	41	56	2	1	42	20	+ 0	24	2	1	42	10
Júpiter	5	6	21	30	5	6	28	11	+ 6	41	5	6	27	30
Saturno	4	23	29	28	4	23	6	0	−23	28	4	23	14	30

Afelios para 1750.

	Casini				Halley				Diferencia					
Mercurio	8^s	13°	41′	18″	8^s	13°	27′	12″	−14′	6″	8^s	13°	33′	3″
Venus	10	7	38	0	10	7	18	31	−19	29	10	8	13	0
Marte	5	1	36	9	5	1	31	38	− 4	31	5	1	28	24
Júpiter	6	10	14	33	6	10	33	46	+19	13	6	10	22	31
Saturno	8	29	13	31	8	29	39	58	+26	27	8	29	53	30

Movimiento secular de los Afelios.

	Casini				Halley				Diferencia					
Mercurio	0^s	2°	13′	20″	0^s	1°	27′	37″	−45′	43″	0^s	1°	57′	40″
Venus	0	2	23	20	0	1	34	13	−49	7	0	4	10	0
Marte	0	1	59	38	0	1	56	40	− 2	58	0	1	51	40
Júpiter	0	1	35	42	0	2	0	0	+24	18	0	1	43	20
Saturno	0	2	9	44	0	2	13	20	+ 3	36	0	2	23	20

Fig. Con esto queda declarado como de una sola época se infieren todas las demas, y como se halla una época por observacion con los demas elementos de un planeta, y hemos dado los resultados de los métodos que para esto hay, quales se hallan en las tablas de diferentes Astrónomos, con las diferencias que entre ellas se reparan. Daremos aquí la época del Sol que no está en la Tabla antecedente.

Epoca del Sol para 1750 segun Casini.	9	10	0	35
Segun las tablas de Flamsteed.............	9	10	0	21
Segun las últimas tablas de Mayer......	9	10	0	34″7
Segun las tablas del Abate la Caille....	9	10	0	43,4

729 Quando están averiguadas por observacion ó por los cálculos precedentes las épocas de la longitud media (723), se puede determinar la longitud media para otro dia qualquiera del año, añadiéndola el movimiento diurno (642), tantas veces como dias han pasado desde la época. Supongamos que se haya hallado para el año de 1760 la época del Sol ó su longitud media el dia 1 de Enero á medio dia medio $9^s\ 10^\circ\ 34'\ 53''$, y se quiera determinar la longitud media para el dia 31 de Enero á medio dia medio; se añadirá el movimiento diurno tomado 30 veces, ó $29^\circ\ 34'\ 10''$, á la época de la longitud media, y saldrá la longitud media para el dia 31 de Enero.

Nudos é Inclinaciones de los Planetas.

730 Despues de declarado lo que es el nudo de un

un planeta, y la inclinacion de su órbita (613 y 626), Fig.
y el efecto que de esto resulta para nosotros, nos toca proponer ahora un método para averiguar la situacion de los nudos, y la inclinacion de las órbitas planetares.

Quando un planeta visto desde la Tierra no tiene ninguna latitud, tampoco la tendría visto desde el Sol, entonces está en su nudo (613), pues está en el plano de la eclíptica; basta, pues, observar la longitud geocéntrica del planeta, al tiempo que no tiene ninguna latitud, de esta observacion se inferirá su longitud vista desde el Sol (633), y este será el lugar del nudo.

731 El dia 14 de Mayo de 1747, á $10^h\ 50' 43''$, de tiempo verdadero, estando Marte muy próximo á su nudo descendiente, el Abate la Caille observó la longitud de este planeta $7^s\ 6^\circ\ 15'\ 10''$ reducida á la eclíptica, y su latitud boreal de $54''$. La longitud del Sol para el mismo instante, determinada por observaciones del mismo dia, y que hubiera bastado tomar en las tablas, era de $1^s\ 23^\circ\ 38'\ 10''$; luego el ángulo en la Tierra, ó el ángulo de elongacion *LTS*, era de $162^\circ\ 37'\ 0''$; la paralaxe de la órbita anua ó el ángulo en el planeta *TLS*, 103.
era entonces, por las tablas de Casini, de $11^\circ\ 11'\ 57''$; añadiendo esta cantidad á la longitud geocéntrica observada $7^s\ 6^\circ\ 15'\ 10''$, sale la longitud heliocéntrica de Marte $7^s\ 17^\circ\ 27'\ 7''$. Síguese de aquí que el ángulo de comutacion, que es la diferencia entre esta longitud y la de la Tierra, ó el ángulo *LST* era de $6^\circ\ 11'\ 3''$; ege-

Fig. cutando la proporcion de antes (631), hallaremos que $54''$ de latitud geocéntrica correspondian á $19''\frac{1}{2}$ de lati-
118. tud heliocéntrica. El Abate la Caille resuelve despues un triángulo *PAL*, rectángulo en *L*, cuyo ángulo *A* es de $1^{\circ}\ 51'$, igual á la inclinacion de la órbita de Marte *AP* respecto de la eclíptica *AL*, y el pequeño lado *PL* de $19''\frac{1}{2}$, latitud heliocéntrica de Marte, su otro lado *AL* es (III. 709 *B*) de $604''$ ó $10'\ 4''$, esta es la distancia de Marte á su nudo vista desde el Sol; luego el *nudo* descendiente de Marte visto desde el Sol estaba á $7^{s}\ 17^{\circ}\ 37'\ 11''$.

732 Repárese en el cálculo antecedente que con observar muchos dias de seguida la latitud de Marte se podria señalar el tiempo en que se halló sin latitud, escusar la resolucion del último triángulo, y no suponer conocida la inclinacion.

733 Tambien se puede buscar el lugar del nudo por medio de observaciones hechas á distancias iguales de los nudos, quando la latitud heliocéntrica se ha hallado de una misma cantidad; porque el medio entre las dos longitudes heliocéntricas halladas en ambos casos, será el lugar del nudo, suponiéndole fijo en el intervalo de las dos observaciones.

Por egemplo, el dia 13 de Marzo de 1693, á $17^{h}\ 50'$, el lugar verdadero de Saturno visto desde la Tierra, estaba en $8^{s}\ 22^{\circ}\ 56'\ 30''$, y su latitud boreal era de $1^{\circ}\ 24'\ 50''$; el dia 3 de Mayo de 1699, á $15^{h}\ 50'$,

su

su longitud era de $11^s\ 1^\circ\ 0'\ 50''$, y su latitud austral $1^\circ\ 22'\ 20''$. Reduciendo al Sol (631) estas dos latitudes observadas, se saca para las dos latitudes heliocéntricas de Saturno $1^\circ\ 24'\ 10''$, y $1^\circ\ 24'\ 28''$, que Casini supone iguales, porque una diferencia de $18''$ no éra reparable en las alturas meridianas tomadas con los quadrantes de círculo de su tiempo, pero nosotros llevaremos en cuenta dentro de poco esta diferencia. Las longitudes heliocéntricas de Saturno calculadas para el mismo tiempo (633), eran de $8^s\ 17^\circ\ 4'\ 37''$ y $10^s\ 25^\circ\ 16'\ 49''$, cuyo medio es $9^s\ 21^\circ\ 10'\ 43''$, esta es la longitud del nudo que resulta segun Casini, de las dos observaciones. Fig.

734 En el intervalo de la una de las dos observaciones á la otra, que es de mas de 6 años, el lugar del nudo habia variado como unos $3'\ 4''$, de donde resulta en la latitud una diferencia de $7''$, que tenia la latitud de menos que si el nudo se hubiese mantenido inmobil, los quales, para mayor precision, se deben añadir á la segunda latitud heliocéntrica, porque hubiera sido mayor en el mismo punto del cielo, si el nudo de Saturno hubiera estado $3'\ 4''$ menos adelantado en la segunda observacion. En virtud de esta segunda correccion, la latitud se hubiera hallado de $1^\circ\ 24'\ 35''$ el dia 3 de Mayo de 1699, $27''$ mayor que la primera latitud, estos $27''$ hacen $11'\ 32''$ que se han de rebajar de la longitud heliocéntrica de Saturno, la qual, segun cálculos mas exac-

Fig. tos, debía ser el dia 13 de Marzo de 1693 de $10^s\ 25^\circ\ 22'\ 6''$; con este se conoce la longitud donde se hubiera hallado en 1699, si hubiese tenido la misma latitud $1^\circ\ 24'\ 10''$ que en la primera observacion. Luego dicha longitud será de $10^s\ 25^\circ\ 10'\ 34''$, esta es la longitud donde se hubiera hallado Saturno en 1699 con una latitud de $1^\circ\ 24'\ 10''$ igual á la de 1693 en el supuesto de que el nudo se hubiese mantenido inmobil. Pero la primera longitud habia de ser de $8^s\ 17^\circ\ 16'\ 6''$, la diferencia es $2^s\ 7^\circ\ 54'\ 28''$, cuya mitad $33^\circ\ 57'\ 14''$ es la distancia de Saturno á su nudo en 1693, la qual añadiéndola á su longitud $8^s\ 17^\circ\ 16'\ 6''$ da para la del nudo $9^s\ 21^\circ\ 13'\ 20''$. Luego el lugar del nudo será de $9^s\ 21^\circ\ 13'\ 20''$ el dia 13 de Marzo de 1693, tiempo de la primera observacion, $2'\frac{1}{2}$ mas adelantado de lo que calculó Casini.

735 Para dar á conocer todos los resultados de las investigaciones en que se han empeñado los Astrónomos acerca de los nudos de los planetas, hemos puesto en las tablas siguientes las longitudes de los nudos, y su movimiento quales se hallan en las tablas de Casini y *Halley* y segun la teórica de la atraccion, y segun las *determinaciones* de Mr. de la Lande. El signo — señala un movimiento retrogrado respecto de las estrellas *fijas*; la tercera columna de la segunda tabla es el movimiento anuo respecto de las estrellas fijas segun la Teórica; la quarta contiene este movimiento respecto de los equinoccios, es-

to

to es, la suma ó la diferencia entre 50″ 3 y los números de la columna antecedente.

Tabla de la longitud del Nudo de cada planeta para 1750, y de su movimiento secular segun las tablas de Casini y Halley.

	Segun Casini		Segun Halley		Segun nuestras tablas
	Nudo en 1750	Movimiento secular	Nudo en 1750	Movimiento secular	Nudo en 1750
Mercurio	1ˢ 15° 25′ 20″	1° 24′ 40″	1ˢ 15° 21′ 58″	1° 23′ 20″	1ˢ 15° 21′ 15″
Venus	2 14 27 45	0 56 40	2 14 23 42	0 51 40	2 14 26 18
Marte	1 17 45 45	0 56 40	1 17 56 21	1 3 20	1 17 36 30
Júpiter	3 7 49 57	0 40 9	3 8 15 49	1 23 20	3 8 16 0
Saturno	3 22 1 4	1 35 11	3 21 20 5	0 30 0	3 21 31 17

Tabla del Movimiento anual de los Nudos de cada Planeta respecto de las Estrellas fijas, con arreglo á la doctrina de la atraccion, y á las tablas de Casini y Halley, con el movimiento respecto de los equinoccios, conforme á lo que se enseñará en la Astronomía física.

	Segun las tablas de Casini	Segun las tablas de Halley	La Teórica dá	Movimiento respecto de los equinoccios	Segun nuestras tablas
Mercurio	0	0	− 5″ 0	45″ 3	45″
Venus	− 17	− 19	− 20 4	29 9	31
Marte	− 17	− 12	− 10 5	39 8	39, 8
Júpiter	− 27	0	+ 7 2	57 5	60
Saturno	+ 6	− 32	− 8 7	41 6	30

736 La *Inclinacion de un planeta* es el ángulo que el plano de su órbita forma con el plano de la eclíptica (614); la latitud heliocéntrica (627) del mis-

Fig. mismo planeta, quando está á 90° de sus *nudos*, es igual á su inclinacion, porque entonces está el planeta tan distante como puede del plano de la eclíptica.

737 Por consiguiente para determinar la inclinacion de una órbita basta observar la *latitud* del planeta quando está á 90° de los nudos, y *reducir* esta latitud observada ó geocéntrica, á la latitud heliocéntrica; pero como esta última reduccion supone conocida la paralaxe de la grande órbita, se procura evitar esta condicion por el método siguiente.

738 Se escoge el tiempo en que el sol se halla en el nudo del planeta, esto es, nos parece á la misma longitud que el planeta quando está en su nudo, porque enton-
119. ces la Tierra pasa en *T* por la linea de los nudos *NST*, y con esto es muy facil la determinacion del nudo. Supongamos que el planeta esté entonces en el punto *A* de su órbita, de modo que bajando la perpendicular *AB* al plano de la eclíptica, ó de la órbita de la Tierra prolongado hasta el planeta, la linea *TB* que señala su lugar reducido á la eclíptica sea perpendicular á la linea *TSN* en la qual están el nudo y el Sol, siendo de 90° el ángulo de elongacion *BTS*; entonces las lineas *AT* y *BT* son perpendiculares á la comun seccion *TN*, la una en el plano de la órbita, y la otra en el plano de la eclíptica. Luego forman una con otra el mismo ángulo que los dos planos, esto es, un ángulo igual á la inclinacion que se busca (I. 531). Pero el ángulo *ATB* es lo mismo que la

la latitud del planeta visto desde la Tierra (614); luego *la latitud observada será la inclinacion misma de la órbita.* Como sucede pocas veces que el Sol esté en el nudo al mismo tiempo que el planeta está á 90° del Sol, y esta última condicion solo se verifica respecto de los planetas superiores, vamos á dar una regla mas general para determinar las inclinaciones. Fig.

739 Supongo que se haya observado la latitud de un planeta visto desde la Tierra, sea la que fuere, con tal que el Sol esté en el nudo ó muy cerca. Sea *P* el planeta en un punto qualquiera *P* de su órbita, manteniéndose siempre la Tierra en *T* en la linea de los nudos *TSN*. Se baja la perpendicular *PL* desde la órbita del planeta al plano de la eclíptica, desde los puntos *P* y *L* se tiran las perpendiculares *PR* y *LR* á la seccion comun de los dos planos, esto es, á la inclinacion de la órbita respecto del plano de la eclíptica (I. 531); el ángulo *LTP* será igual á la latitud geocéntrica del planeta, el ángulo *RTL* igual á la elongacion del planeta (629). Los dos triángulos rectilineos *RTL* y *PTL* rectángulos en *R* y *L* darán las dos proporciones siguientes (I. 664 y 665):

$$\left.\begin{array}{l} TL:RL::R:\text{sen } RTL \\ TL:PL::R:\text{tang } LTP \end{array}\right\}\text{luego } RL:PL::\text{sen } RTL:\text{tang } LTP.$$

Pero del triángulo *PRL* rectángulo en *L*, se saca $RL: PL :: R : \text{tang } PRL$; luego comparando la tercera proporcion con esta última, sacaremos $\text{sen } RTL : \text{tang } LTP ::$

R:

Fig. *R* : tang *PRL*, esto es, que *el seno de la elongacion es al radio como la tangente de la latitud geocéntrica observada es á la tangente de la inclinacion.*

740 El dia 12 de Enero de 1747 á $6^h\ 6'\ 33''$ de la mañana, el Abate la Caille observó la longitud de Saturno, $6^s\ 26^\circ\ 12'\ 52''$, y su latitud boreal $2^\circ\ 29'\ 18''$, el sol estaba entonces á $9^s\ 21^\circ\ 47'$, esto es, en el nudo de Saturno, ó no faltaban mas que $12'$ segun las tablas de Casini, de donde no puede resultar ningun error sustancial en el cálculo. Aplicando á esta observacion la analogía precedente, se halla la inclinacion de la órbita de Saturno $2^\circ\ 29'\ 45.''$

741 Quando se determina el lugar del nudo de un planeta por medio de dos latitudes iguales (733), ora se tomen estas dos latitudes antes ó despues del paso de un planeta por sus límites, ora se tomen antes ó despues del paso por el nudo, las mismas observaciones pueden determinar á un tiempo, no solo el nudo, mas tambien la inclinacion de la órbita.

El dia 13 de Marzo de 1693 á $17^h\ 50'$ Casini observó la longitud de Saturno $8^s\ 22^\circ\ 56'\ 30''$, y su latitud geocéntrica boreal $1^\circ\ 24'\ 50.''$ De estas observaciones saca Mr. de la Lande que el lugar heliocéntrico de Saturno era $8^s\ 17^\circ\ 16'\ 6.''$ El lugar del Sol era $11^s\ 24^\circ\ 23'\ 18''$, y por consiguiente la elongacion $88^\circ\ 33'\ 12''$, y la comutacion $82^\circ\ 52'\ 48''$; luego haciendo la proporcion demostrada (631), se saca que la latitud he-

heliocéntrica de Saturno era de $1^{\circ}\ 24'\ 12''\ 4$. Esta observacion comparada con la del dia 3 de Mayo de 1699 dá (734) $9^{s}\ 21^{\circ}\ 13'\ 20''$ para el lugar del nudo; restando de este lugar el de Saturno visto desde el Sol $8^{s}\ 17^{\circ}\ 16'\ 6''$, se saca la distancia de Saturno á su nudo descendiente, $33^{\circ}\ 57'\ 14''$ vista desde el sol, que es el arco *LA* de la eclíptica. Por consiguiente en el triángulo esférico *PAL* rectángulo en *L*, conocemos los lados *LA* y *PL*; haremos, pues, esta proporcion (III. 709 *E*): *el seno de la distancia al nudo es al seno total, como la tangente de la latitud es á la tangente del ángulo A*, y sacaremos la inclinacion verdadera de la órbita de Saturno $2^{\circ}\ 30'\ 50''\ 6$. Fig. 118.

742 Este método que determina á un tiempo la inclinacion y el nudo de un planeta por dos observaciones de latitudes iguales, es menos exacto que el método por el qual se determina cada una de estas dos cosas separadamente por medio de una observacion hecha en el nudo para determinar el nudo, y de una observacion hecha en uno de los límites para determinar la inclinacion de la órbita. Y de hecho, si las dos observaciones correspondientes están cerca del nudo, determinan mal la inclinacion de la orbita; porque entonces la latitud es pequeña, y no se debe determinar una cantidad mayor por otra menor. Si las dos observaciones se hubieren hecho cerca de los límites, no son muy á propósito para determinar la posicion del nudo. Por egemplo, á 30° del nudo la latitud de un planeta no es mas que la mitad de su inclinacion; si en la latitud observada hu-

Fig. hubiere un error de $10''$, habrá un error de $20''$ en la inclinacion que se determinare; luego dicha observacion será la mitad menos ventajosa, que si se hubiese observado el planeta en sus límites. Fuera de esto, como la variacion de latitud de un dia para otro no es entonces mas que los $\frac{87}{100}$ de la que se esperimenta en los nudos, habrá un octavo menos de exactitud en el lugar del nudo que si se hubiese observado el planeta en su nudo. Si se toman las dos latitudes correspondientes é iguales á 45° de *los nudos*, como entonces la latitud no es mas que los $\frac{7}{10}$ de la inclinacion, un error de $7''$ en la observacion de las latitudes que se comparan, causará un error de $10''$ en la inclinacion, y al mismo tiempo el error que se padeciere acerca del lugar del nudo será mayor en la razon de 10 á 7, que el que se pudiera padecer, observando el planeta en el nudo.

743 Para hacerse cargo de la ley que guardan estas
118. diferentes ventajas, es menester considerar que la latitud crece como el seno de la distancia al nudo, porque en un triángulo esférico qual es *PAL*, tenemos esta proporcion: sen PL : sen PA :: sen A : 1 (III. 698). Pero como los dos últimos términos son constantes, el seno de PL y el de PA estarán siempre en una misma razon uno con otro; por consiguiente la latitud PL que por razon de su pequeñez es proporcional á su seno, crecerá como el seno de la distancia PA al nudo. Pero por lo probado (III. 352) la corta variacion de un seno es á la de su arco, como el coseno del arco es al radio; quiero decir, que á 30° del nudo, siendo el

co-

coseno los $\frac{87}{100}$ del radio, la variacion del seno no es mas Fig. que los $\frac{87}{100}$ de la del arco, ó de la que el mismo seno esperimentaba en su nacimiento (quando el arco y el seno eran ambos muy pequeños y crecian igualmente). Luego una vez que *PL* crece como el seno de la distancia al nudo, y la variacion de este seno es proporcional al coseno, el pequeño incremento que le sobreviene á la latitud de un grado á otro tambien será proporcional al coseno del argumento de latitud. Y como la posicion del nudo se observa por medio de la latitud, con tanta mayor precision, quanto mas rápidamente crece entonces la latitud, la ventaja que hay en determinar el lugar del nudo por medio de la latitud, tambien es proporcional al coseno del argumento de latitud. Así, á 60° del nudo la ventaja queda reducida á la mitad, siendo así que á 30° no se perdia mas que los $\frac{13}{100}$ ó la mitad del quarto de la ventaja que se consiguió en el nudo.

744 Por lo que mira á la ventaja que se halla en determinar la inclinacion por medio de una latitud observada, es proporcional al seno mismo de la distancia al nudo, porque la latitud observada sigue la misma razon. Si de una latitud de un grado se quiere inferir una inclinacion que es de dos, conforme sucede quando se ha observado á 30° del nudo, se corre riesgo de cometer en el resultado un error duplo del error de la observacion misma, quiero decir, que no se halla sino la mitad de la ventaja que el calculador se prometia. Esta es la razon por qué los

Au-

Autores puntuales que refieren determinaciones de las inclinaciones planetares, ponen cuidado en espresar quál era la distancia al nudo.

745 Hemos dicho que quanto mas rápidamente crece la latitud, tanto mas exacta sale la determinacion que por ella se hace del lugar del nudo. La razon es la misma que dimos para otra determinacion (552).

746 Entre las oposiciones ó conjunciones que se toman para determinar la inclinacion de un planeta superior, se escogen aquellas en que la latitud geocéntrica es máxima, á fin de que el error que se pueda cometer en la determinacion sea mínimo; esto se practíca respecto de otro elemento qualquiera; se escoge el caso en que su efecto es máximo, el mas multiplicado, el mas notable.

747 La tabla siguiente contiene los resultados de las investigaciones que se han hecho hasta el dia de hoy acerca de este punto.

Tabla de la inclinacion de las Órbitas, y de la máxima reduccion á la eclíptica.

	Keplero.	Halley.		Casini.		Tablas de Mr. la Lande
	Inclinacion.	Inclinacion.	Reduccion.	Inclinacion.	Reduccion.	Inclinacion.
Mercurio.	6° 54′ 0″	6° 59′ 20″	12′ 49″	7° 00′ 00″	12′ 52″	7 0 0
Venus.	3 22 0	3 23 20	3 0	3 23 20	3 0	3 23 20
Marte.	1 50 30	1 51 0	0 54	1 50 54	0 54	1 51 0
Júpiter.	1 19 20	1 19 10	0 27	1 19 30	0 29	1 19 10
Saturno.	2 32 0	2 30 10	1 38	2 30 36	1 39	2 30 20

748 Tendrá su utilidad poner á la vista del lector la comparacion y la diferencia entre las tablas de Casini, de

de Halley, y de Mr. de la Lande, para dar á conocer la incertidumbre que puede haber en los diferentes elementos de las tablas astronómicas. Si quiero saber, por egemplo, quánto la equacion del centro de Mercurio es diferente en las tablas de Casini y Halley, reparo que en la columna de Mercurio, y al lado de la voz *Equacion*, hay — 20′ 22″, esto significa que se han de restar 20′ 22″ de la equacion máxima qual está en las tablas de Casini, para sacar la de las tablas de Halley, &c.

Tabla de lo que se les debe rebajar ó añadir á los números que contienen las tablas de Casini, para sacar los de las tablas de Halley.

Elementos de las tablas.	Mercurio.	Venus.	Marte.	Júpiter.	Saturno.
Longitud media 1750.	−11′ 20″	+ 0′ 2″	− 0′ 13″	+ 4′ 18″	−15′ 32″
Longitud del Afelio.	−14 6	−19 29	− 4 31	+19 13	+26 27
Longitud del Nudo.	− 3 22	− 4 3	+10 36	+25 51	−41 0
Movimiento secular.	−14 41	+ 0 50	+ 0 24	+ 6 41	−23 28
Movimiento del Afelio.	−45 43	−49 7	− 2 58	+24 18	+ 3 36
Movimiento del Nudo.	− 1 20	− 5 0	+ 6 40	+43 11	−65 11
Equacion.	−20 22	− 1 6	+ 0 43	+ 0 19	+ 0 24
Inclinacion.	− 0 40	0 0	+ 0 6	− 0 20	− 0 26

Tabla de lo que se les debe quitar ó añadir á los números de las tablas de Halley, para sacar los de las nuevas tablas de Mr. de la Lande.

Elementos de las tablas.	Mercurio.	Venus.	Marte.	Júpiter.	Saturno.
Longitud media 1750.	+ 2 5	− 0 19	+ 0 47	− 2 1	+12 29
Longitud del Afelio 1750.	+ 5 51	+ 54 29	− 3 14	−11 15	+13 32
Longitud del Nudo 1750.	− 0 43	+ 2 36	−19 51	+ 0 11	+11 12
Movim. secul. del Planet.	+ 9 57	+ 0 20	− 0 10	− 0 41	+ 8 30
Movim. secul. del Afelio.	+30 3	+155 47	− 5 0	−16 40	+10 0
Movim. secul. del Nudo.	− 8 20	0 0	+ 3 0	+16 40	+20 0
Equacion.	− 1 47	+ 0 30	+ 1 45	+ 2 25	− 8 45
Inclinacion de la órbita.	+ 0 40	0 0	0 0	0 0	+ 0 10

Fig.

De los Diámetros aparentes de los Planetas.

749 El *Diámetro aparente* de un planeta es el ángulo en el qual le vemos, valuado en minutos y segundos; es el ángulo cuya cuerda ó subtensa es, tomando por radio la
120. distancia del planeta á la tierra. Sea *T* la tierra, donde está el observador; *AB*, el diámetro de un planeta; *TA* y *TB*, los rayos visuales tirados desde la tierra á los dos limbos opuestos del disco del planeta; el ángulo *ATB* es el diámetro aparente del planeta.

Los diámetros de los planetas se determinan por el tiempo que tardan en atravesar el meridiano. Porque si se observa en un anteojo el instante que el primer limbo del Sol está en el meridiano, ó en un hilo perpendicular á la direccion de su movimiento, y su segundo limbo llega al mismo hilo dos minutos mas tarde; estos dos minutos de tiempo señalarán que el diámetro del Sol es de $30'$, en el supuesto de que está en el equador; hemos visto qué diferencia hay (54) quando el sol no está en el equador.

750 *Los diámetros de un planeta son en razon inversa de su distancia.*

Si el planeta *AB* estuviera en *CD*, de modo que la distancia *TD* fuese la mitad de la primera distancia *TB*, el ángulo *CTD* en el qual le veríamos, sería duplo del ángulo *ATB* ó *ETD*, en el qual le víamos antes. Tomemos *AB* ó *CD* por radio; es constante que *TB* será la cotangente del ángulo *ATB*, y *TD* la cotangente del ángulo

CTD;

CTD; pero las cotangentes son en razon inversa de las tangentes; luego *TB* : *TD* :: tang *CTD* : tang *ETD*. Pero los ángulos pequeños son proporcionales á sus tangentes; luego *CTD* : *ETD* :: *TB* : *TD*; y quiere decir, que el diámetro aparente en el segundo caso es al diámetro aparente en el primero, como la primera distancia es á la segunda. Fig.

751 Los diámetros aparentes de los planetas sirven para hallar sus diámetros verdaderos, ó sus tamaños reales, una vez que se conozca su distancia. En el triángulo *TAB* rectángulo en *B*, tenemos esta proporcion: *R* : sen *ATB* :: *TA*: *AB*; por consiguiente se determinará el diámetro verdadero *AB* con multiplicar la distancia *TA* por el seno del ángulo *ATB*, que es el diámetro aparente del planeta.

752 Se halla mucha variedad entre los diferentes Autores acerca de la determinacion del diámetro del Sol; como este elemento es de suma importancia, merece se determine con la mayor escrupulosidad. Este motivo determinó á Mr. de la Lande á valerse del mayor anteojo que se hubiese usado para esta investigacion, y halló despues de observar muchísimas veces el diámetro del Sol, que su diámetro quando es apogeo es de $31' \, 30'' \frac{1}{2}$.

753 Quando está averiguada la razon que hay entre los diámetros de los planetas, se pueden determinar sus volúmenes ó tamaños respecto de la Tierra; basta tomar el cubo del diámetro ó triplicar su logaritmo (I. 625). Por egemplo, el diámetro de la Tierra visto desde el Sol, es de $18''$, el de Mercurio es de $6'' \, 9$ á la misma distancia.

Fig. Si dividimos 6″ 9 por 18″, sacaremos 0,3889, este es el diámetro de Mercurio, suponiendo que el de la Tierra sea 1. El cubo de este quebrado decimal es 0,05881 que vale con corta diferencia $\frac{1}{17}$. Esto nos manifiesta que el volumen de Mercurio es la 17^{ma} parte del de la tierra.

754 Ya se sabe que el volumen de un *planeta* no es lo mismo que su densidad, esta la determinaremos en lá Astronomía Física, bien que la pondremos anticipadamente en la tabla que sigue. La densidad multiplicada *por el volumen*, dá la masa, el peso, la cantidad de materia, ó *la* fuerza de atraccion; tambien la espresa la tabla siguiente.

Acerca de esta tabla prevenimos que las quatro densidades señaladas con estrellas, son las últimas que se pueden determinar por un cálculo inmediato, las *demás se han señalado* por congetura.

755 Las distancias en leguas no son verdaderas sino con diferencia de una trigésima parte, porque penden de la paralaxe del Sol, en la qual hay quizá un error de un tercio de segundo.

En la misma tabla ván señaladas las velocidades que han de adquirir los cuerpos pesados en el primer segundo, en la superficie de cada planeta, en el supuesto de que los cuerpos anden en la Tierra 15 pies 1038 en un segundo debajo del equador; es la medida de la gravedad en cada planeta, es proporcional á la masa dividida por el quadrado del radio, conforme probaremos en otro lugar.

756 La distancia de los planetas á la Tierra que están

tán en las últimas columnas de la tabla en leguas, no son otra cosa que la suma y la diferencia de la distancia media de la tierra, y de cada planeta al Sol (682) convertidas en leguas á razon de 2865 para el diámetro de la tierra. Fig.

De estas distáncias se podria sacar con facilidad la velocidad de cada planeta. Por egemplo, la circunferencia de la órbita terrestre, suponiéndola circular, ha de tener 206280000 leguas; por consiguiente la velocidad de la Tierra en su órbita es de 564754 leguas por dia, 23531 por hora, 392 por minuto, y $6\frac{1}{2}$ por segundo. Por lo que mira á la velocidad diurna del movimiento de rotacion, no es mas que de 238 toesas por segundo debajo del equador, la misma con corta diferencia que la de una bala de artillería de 24 que se regula de 250 toesas en el primer segundo.

Tabla de los Diámetros aparentes de los Planetas, vistos á la distancia media entre el Sol y la Tierra, y de sus verdaderos diámetros, suponiendo de 9'' la paralaxe del Sol, con sus volúmenes, sus densidades, sus masas y sus distancias.

Planetas.	Diám. en min. y seg.	Diám. en leguas.	Diámetros respecto de la Tierra.	
El Sol.	32′ 2″, 0	305918	Ciento y siete diám. de la tierra ó....	106,778
La Tierra.	18 , 0	2865	....	1,000
La Luna.	4 , 915	782	Un tercio ú $\frac{11}{35}$ del diám. de la tierra.	0,3141
Mercurio.	7 , 0	888	Un tercio ú $\frac{7}{18}$ ó	0,3889
Venus.	16 , 7	2658	Trece catorce avos........................	0,9278
Marte.	11 , 14	1814	Cinco octavos, ó.........................	0,6333
Júpiter.	3 13 , 7	30832	Diez diám. y tres quartos	10,761
Saturno.	2 51 , 7	27329	Nueve diám. y medio	9,539
Anillo de ♄	6 40 , 6	63771	Veinte y dos diám. de la tierra.	22,25

	Grueso ó volumen respecto de la Tierra, con corta diferencia.	Con mayor exactitud, y en decimales.	Densidad respecto de la tierra.
El Sol.	Ciento y doce mil veces mayor.	1217480	0, 25285 *
La Luna.	La quadragésimanona parte de la tierra.	0, 02036	0, 68706 *
Mercurio.	La décimaséptima parte.	0, 05881	2, 0377
Venus.	Quatro quintos de la tierra.	0, 7986	1, 2749
Marte.	La quarta parte de la tierra.	0, 2540	0, 7292
Júpiter.	1246 mayor que la tierra.	1246	0, 23147 *
Saturno.	868 mayor que la tierra.	867, 95	0, 09032 *

	Masa respecto de la tierra.	Velocidad de los graves en su superficie cada segundo.	Distancias á la tierra en leguas. La menor.	Distancias á la tierra en leguas. La mayor.
El Sol.	307831	407 pies, 69	32278900	33382000
La Tierra.	1	15 , 10	....	....
La Luna.	0, 01399	2 , 83	77577	91454
Mercurio.	0, 1198	11 , 96	20122000	45539000
Venus.	1, 01818	17 , 82	9083000	56578000
Marte.	0, 1852	6 , 97	17193000	82854000
Júpiter.	288, 44	37 , 66	137920000	203581000
Saturno.	78, 39	13 , 01	280352000	346012000

De

Fig.

De la Rotacion y Figura de los cinco Planetas principales.

757 Mercurio está siempre muy lejos de nosotros, y muy envuelto en los vapores del orizonte ó en el crepúsculo, para que podamos reparar manchas en su disco, y averiguar lo que dura su rotacion. Aun sus fases son dificultosas de observar; se necesitan para esto grandes anteojos, se debe angostar su abertura para templar el demasiado resplandor de Mercurio, y su creciente se distingue muy bien quando ☿ está en la parte inferior de su órbita.

758 Las fases de Venus se vén facilmente con anteojos aunque cortos. Venus se vé siempre en forma de creciente, ó de elipse. La rotacion de este planeta es dificil de observar, Casini dice que dura 23 horas.

759 Por las manchas que se han reparado en el disco de Marte queda determinado que dá la vuelta al rededor de su ege en $24^h\ 39'$ A este planeta nunca se le vé en forma de creciente.

760 El globo de Júpiter es muy reparable por su aplanamiento, por sus fajas, y el corto tiempo que gasta en concluir su rotacion. De las observaciones mas recientes y hechas con instrumentos muy perfectos parece resultar que entre el diámetro de Júpiter del un polo al otro, y el diámetro de su equador, hay la razon de 13 á 14, y esta razon concuerda con la teórica.

761 En el disco de Júpiter se reparan unas fajas 121.

Fig. obscuras, que en algunos tiempos son poco perceptibles, y tampoco están igualmente bien señaladas en toda la estension del globo de este planeta.

762 La duracion de la rotacion de Júpiter es de $9^h\ 56'$.

763 Saturno está muy apartado de nosotros para que podamos observar su rotacion. Huyghens creyó que duraba 10^h, como la de Júpiter, infiriéndolo del cotejo que hizo entre la distancia y el período del primer satélite de Saturno, con los del primer satélite de Júpiter.

Del Anillo de Saturno.

764 El *Anillo de Saturno* es el descubrimiento mas estraño que se ha hecho en el cielo con los anteojos astro-
122. nómicos. La figura le pinta qual se le vé con los anteojos mas grandes; hay tiempos en que su ancho es todavia mayor; pero hay tambien tiempos en que no se le vé, y Saturno parece enteramente redondo.

765 Este Anillo es muy delgado, casi plano, concéntrico con Saturno, igualmente distante de su superficie en todos sus puntos. Se sostiene por la gravedad natural y simultanea de sus partes, del mismo modo que una puente bastante grande para abrazar la tierra, se sostendria sola sin pilares. La parte del anillo mas inmediata á Saturno es mas luminosa que las demás. Casini observó que el anchor del anillo estaba dividido en dos partes iguales por un rasgo

go obscuro cuya curvatura era la misma que la del anillo; Fig.
pero Short ha observado en el anillo fenómenos mas singulares todavia. La figura primera representa Saturno rodeado 122.
de su anillo en su abertura media. La segunda representa dos 123.
aspectos diferentes del anillo, 1.° quando el anillo es mas abierto pasando un poco los bordes de Saturno, y formando una elipse *MNOP*, en la qual está inscripto el globo de Saturno, 2.° quando parece estremadamente delgado, conforme lo dá á entender la elipse *MSO*; entonces está oblicuo respecto de nuestra vista, y Saturno se acerca á la fase redonda.

766 El grueso de las asas *A* y *B*, está dividido en dos partes, la parte inferior *A* parece que tiene una luz continua sin interrupcion; á la parte esterior *B* la dividen muchas lineas que parecen concéntricas con la superficie del anillo, y dán á sospechar que hay muchos anillos puestos en un mismo plano. Estas diferentes lineas negras que separan las camas del anillo en la parte *B*, se arriman y confunden ácia los puntos *C* y *E*, porque allí es muy delgado el anillo, por razon de la oblicuidad del ojo. La faja obscura *EE* que se vé sobre el disco de Saturno, parece ser la sombra del anillo.

767 El diámetro del anillo de Saturno es al diámetro del globo de Saturno, como 7 á 3; el espacio *AF* que hay entre el globo y el anillo, es con corta diferencia igual al anchor del anillo, ó un si es no es algo mayor. Será, pues, el anchor del anillo como $\frac{1}{3}$ del diámetro de Saturno.

Hay

Fig. 768 Hay ocasiones en que el anillo de Saturno desaparece. Quando Saturno está ácia los 20° de Virgo ó de Piscis, el plano de su anillo está dirigido ácia el centro del Sol, y no está alumbrado sino en su grueso, que no es tan grande que se le pueda percibir desde tan *lejos*; Saturno parece entonces redondo y sin anillo. En este caso se vé una faja obscura que atraviesa Saturno de medio á medio, y es efecto que causa la sombra de su anillo en su disco.

Basta que el sol esté elevado sobre el plano del anillo un ángulo de 8′ para que parezca alumbrado; este anillo no desaparece por falta de luz, sino por espacio de un mes; es á saber, quince dias antes, y quince dias despues del paso de Saturno por el punto del cielo que está á 5^s 20° ú 11^s 20° de longitud.

769 El anillo de Saturno tambien desaparece quando el plano del anillo pasa por nuestro ojo, estando dirigido ácia la tierra; entonces no vemos mas que su grueso que es tan poco, ó reflecte tan poca luz que no le podemos percibir. Tambien debe desaparecer el anillo quando su plano pasa por entre el Sol y nosotros, porque entonces su superficie alumbrada no está vuelta ácia nosotros. Mientras que Saturno está entre 11^s 20° y 5^s 20° de longitud, el Sol alumbra la superficie meridional del anillo; si la tierra está entonces elevada sobre la superficie septentrional, no puede ver la luz del anillo, y este será uno de los tiempos de la fase redonda. Esta es la razon por

por qué pueden desaparecer las asas dos veces en un mismo Fig.
año, y tambien aparecer dos veces; y así se ha observado con efecto.

De la Aberracion de los Planetas.

770 La aberracion se verifica en los planetas igualmente que en las estrellas fijas, pero es mas facil de calcular, una vez que se conoce su movimiento y su distancia.

La aberracion de un planeta siempre es igual al movimiento visto desde la tierra durante el tiempo que gasta la luz para venir desde el planeta á la tierra.

Sea *C* el lugar del planeta, que suponemos inmobil 124.
mientras que la tierra pasa de *A* á *B*, dando á la Tierra la suma de sus movimientos ó su diferencia; por manera que el movimiento del planeta visto desde la Tierra, que es el resultado de los dos movimientos, sea igual al ángulo *ACB* en el tiempo que la luz ha llegado de *C* á *B*. Por lo dicho (IV.70) el ojo llegado á *B* recibe dos impresiones, la una en la direccion *CB*, la otra en la direccion *FB*, y por lo mismo no esperimentará mas que una impresion compuesta en la direccion de la diagonal *DB*, y el planeta le parecerá en *D*, en lugar de parecerle en *C*; la diferencia es el ángulo *CBD* igual al ángulo *ACB*, esto es, al movimiento del planeta visto desde la tierra.

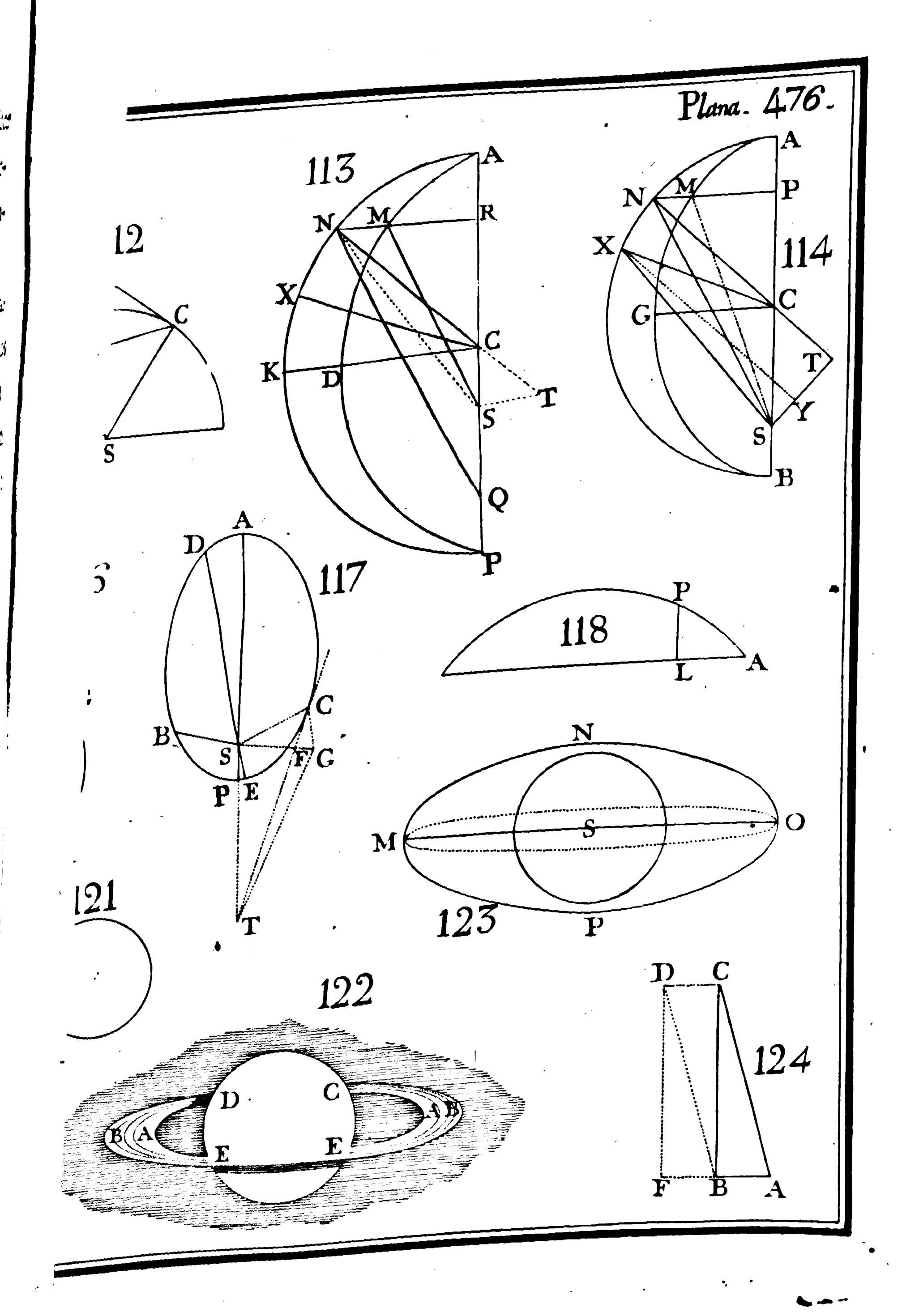
771 Por egemplo, la luz gasta 8′ 8″ en venir desde el Sol hasta nosotros, el movimiento del Sol en estos 8′ es de 20″, de donde se sigue que el Sol tiene 20″ de aberracion

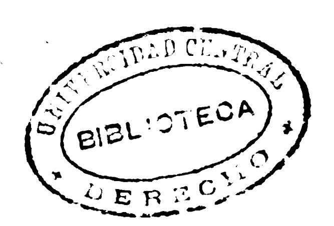
en

Fig. en longitud en todos tiempos. Y como la aberracion hace parecer el planeta del lado ácia el qual se encamina la Tierra, opuesto al lado ácia el qual parece que el planeta se encamina, síguese que si la longitud es creciente, la aberracion la disminuye, y se la deberá restar de la longitud calculada para inferir la longitud aparente. Lo mismo decimos de la latitud, de la ascension recta, de la declinacion, con tal que se tome el movimiento geocéntrico en latitud, en ascension recta, en declinacion en el discurso del tiempo que gasta la luz para llegar hasta nosotros.

772 Si llamamos *m* el movimiento diurno visto desde la tierra; *d*, la distancia del planeta á la Tierra, la aberracion será $\frac{m.\,d.\,8'}{24^h}$ ó $\frac{m.\,d.\,20''}{59'}$. Por consiguiente añadiendo el logaritmo constante 0,95292 al del movimiento diurno geocéntrico del planeta espresado en minutos, y al de su distancia á la Tierra, suponiendo la del Sol igual á la unidad, se sacará el logaritmo de la aberracion espresada en segundos.

Aber-


Plana. 476.
113
A
R
N
M
X
C
K
D
T
S
Q
P
12
C
S
114
A
N
M
P
X
C
G
T
Y
S
B
117
A
D
C
B
S
F
G
P
E
T
118
P
L
A
123
N
M
S
O
P
121
122
D
C
A
B
A
B
E
E
124
D
C
F
B
A


UNIVERSIDAD CENTRAL
BIBLIOTECA
DERECHO

Aberracion de los cinco Planetas principales, para convertir la longitud media en aparente.

Elongacion ó distancia al Sol.			Marte.	Júpiter.	Saturno.	Elongacion.	Venus.
Sig.		Grad.	Seg.	Seg.	Seg.	Grados.	Seg.
0	XII	0	−36	−28	−26	ó superior	−43
		15	−35	−28	−25	15	−41
I	XI	0	−32	−26	−23	30	−34
		15	−28	−22	−20	45	−19
II	X	0	−23	−18	−16	la mayor digresion	−14
		15	−17	−14	−11	45	− 9
III	IX	0	−12	− 8	− 6	30	0
		15	− 7	− 3	− 1	15	+ 3
IV	VIII	0	− 3	+ 1	+ 4	ó inferior	+ 3
		15	0	+ 5	+ 8		
V	VII	0	+ 2	+ 8	+11		
		15	+ 3	+10	+13		
VI	VI	0	+ 4	+11	+13		

Elongacion.	Mercurio. Afelio.	Mercurio. Distancia media.	Mercurio. Perihelio.
Grad.	Seg.	Seg.	Seg.
Conjuncion superior	−49	−51	−55
5	−48	−50	54
10	−46	−48	49
15	−43	−43	38
20	−38	−33	
25	−30		
la mayor digresion	−17	−18	−19
25	− 5		
20	+ 1	− 4	
15	+ 5	+ 5	0
10	+ 7	+ 9	+10
5	+ 9	+11	+14
Conjuncion inferior	+ 9	+12	+16

DE

Fig.

DE LOS PLANETAS SECUNDARIOS.

773 ENtre los Planetas Secundarios la Luna ocupa el primer lugar. Por consiguiente declararemos primero quanto ocurre averiguar acerca de ella, dejando para despues lo que se sabe de mas cierto acerca de los satélites de Júpiter y Saturno.

De la Luna.

774 Algunos puntos que nos quedan todavía que ventilar antes de concluir esta Obra, manifestarán que la teórica de este satélite es de muchísima importancia, por cuyo motivo, entre los diferentes asuntos que abraza la Astronomía Física, es el que de algunos años á esta parte ocupa la atencion de los mas profundos y laboriosos Matemáticos.

De las Fases de la Luna.

775 Llamamos *Fases de la Luna* las mudanzas que reparamos en su figura. Despues de desaparecer por algunos dias vuelve á dejarse ver por la tarde ácia el occidente poco despues de puesto el Sol en forma de un filete de luz ó de *creciente*, cuya luz es debil, porque la debilita el resplandor del crepúsculo. Al dia siguiente se vé la Luna á la misma hora mas elevada sobre el orizonte, y por consiguiente mas distante del Sol. Su creciente es mayor, se la vé mas facilmente y mas tiempo. Este progreso crece cada dia, la Luna se vá apartando del Sol, adelantándose ácia el orien-

oriente, su luz vá tomando mas cuerpo, y ácia el sexto dia se la vé cabalmente en forma de un semicírculo, y se dice que entonces la Luna es *Dicbotoma*, está en *Quadratura*, ó en su *Primer Quarto*. Fig.

Despues de dejarse ver en forma de un semicírculo luminoso, prosigue la Luna apartándose del Sol, y crece su luz por espacio de ocho dias, entonces se la vé perfectamente circular. Su disco entero y luminoso resplandece toda la noche, y este es el dia de la *Luna llena*, ó de la oposicion. Se la vé pasar por el meridiano á media noche, y ponerse así que nace el Sol; todo está manifestando que está entonces directamente opuesta al Sol respecto de nosotros.

Despues de la luna llena viene el menguante que dá las *mismas fases* y las mismas figuras que hemos especificado hablando del incremento de la Luna. Primero se la vé ovalada, despues dichotoma ó en forma de semicírculo, y este es el *Último Quarto*.

Luego despues mengua el semicírculo de luz, y se transforma en creciente que vá siendo cada dia mas angosto, y cuyos cuernos están siempre del lado mas distante del Sol. Entonces ha dado la Luna la vuelta al cielo, y se acerca al Sol; se la vé nacer por la mañana antes que nazca el Sol, con la misma forma que tenia el primer dia de la observacion. Finalmente, se arrima mas al Sol hasta perderse en sus rayos, y esto se llama *la Luna nueva* ó la conjuncion.

776 De una luna nueva á la que se la sigue hay unos

Fig. 29 dias y medio, conforme lo evidencia la observacion; y estos 29 dias y medio componen lo que llamamos *Mes Lunar*, *Mes Synódico* ó *Lunacion*.

777 La Luna es un cuerpo opaco que no luce de una luz propia, conforme lo demuestran los eclípses; la Luna nos tapa el Sol quando pasa por delante de él, de modo que nos deja á obscuras. Como el Sol siempre ilumina la mitad del disco lunar, no podemos ver la Luna llena sino quando vemos su mitad iluminada, y la vemos toda entera. Si estamos puestos de lado, de modo que solo podamos ver la mitad de la parte iluminada, esto es, del emisferio vuelto ácia el Sol, no veremos mas que un semicírculo de luz, la Luna parecerá un quarto, y esta es la causa de las fases de la Luna.

125. 778 Sea *S* el Sol; *T*, la Tierra al rededor de la qual se mueve la Luna en su órbita; *EO*, el globo de la Luna puesto entre la Tierra y el Sol, esto es, en la conjuncion al tiempo de la Luna nueva; entonces el Sol no ilumina mas que la parte *E*; pero para nosotros que estamos en *T* no hay mas parte visible que *O*. Así, el emisferio iluminado es cabalmente el que no vemos, y el emisferio visible es el que no baña el Sol con su luz.

Al contrario, quando la Luna está opuesta al Sol, el emisferio iluminado *L* es cabalmente el que vemos, porque estamos del mismo modo que el astro que le ilumina, no se pierde para nosotros nada de la luz con que le hiere el Sol, y su disco visible *L* es el mismo que su disco iluminado.

Es-

Esta es la razon por qué la Luna nos parece redonda y luminosa, quando está en oposicion. Fig.

Quando la Luna está á 90° del Sol, esto es, á la mitad del camino de O á L, ó de la *conjuncion á la oposicion*, el emisferio visible es *AQZ*; el emisferio que el Sol alumbra es *MZQ*. Por consiguiente no vemos mas que la mitad del emisferio alumbrado, que se vía entero, y como un círculo cabal al tiempo de la oposicion; quiero decir, que solo vemos un semicírculo de luz, qual está pintado separadamente en *N*; estando siempre del lado del Sol la redondez luminosa.

779 Quando la Luna está á 45° del Sol, esto es, en su primer *Octante*, la parte alumbrada es *CDF*, la parte visible es *BCD*; y por lo mismo no hay para nosotros mas parte visible del emisferio alumbrado que *CD*. Entonces se vé la Luna en creciente, qual está pintada en *G*; no vemos mas que la octava parte de la superficie del globo lunar, y la Luna dista del Sol la octava parte de un círculo. Este es el motivo de llamarse *Octante* esta fase; pero la parte alumbrada viene á ser la séptima parte no mas de su disco visible.

En el segundo octante, que es despues del quarto de Luna, el emisferio visible es *HIK*, el emisferio que el Sol alumbra es *IKP*. Por consiguiente solo le falta alcanzar á nuestra vista la porcioncita *IH*, para que veamos toda la parte alumbrada; entonces veremos mas de la mitad del disco lunar, y la Luna parecerá en la forma *R*.

El tercer octante *V*, que se verifica 45° mas allá de la

Fig. la oposicion, se parece al segundo octante, y el quarto *X* es el mismo que el primero *G*.

780 Para calcular puntualmente la parte alumbrada y
126. visible del disco lunar, sea *S* el Sol; *T*, el centro de la Tierra; *C*, el centro de la Luna; *AE*, el diámetro de la Luna, perpendicular al rayo solar, y que separa la porcion alumbrada *ANE*, de la porcion obscura *ADE*. El diámetro lunar *ND* perpendicular al radio *TC* de la Tierra, separa la parte visible *DAN* de la parte invisible *DEN*. Desde el estremo *A* del semicírculo luminoso *ENA* se bajará una perpendicular *AB* al diámetro *ND* de la Luna, y la linea *NB* será el anchor aparente de la parte visible del emisferio luminoso. Con efecto, de todo el emisferio luminoso *ANE* solamente la parte *AN* está comprehendida en el emisferio visible *DAN*, y el arco *AN* no puede tener respecto de nuestra vista mas anchor que *BN*, por la misma razon que el semicírculo entero *NAD* no parece mas que un diámetro *NBD*, y un emisferio entero parece en forma de un círculo ó de un plano del qual es la proyeccion (60). La porcion *NB* del diámetro visible *NBCD*, es el seno verso del arco *NA*; este arco *NA*, ó el ángulo *NCA*, es igual al ángulo *CTF*, suponiendo la linea *TF* paralela á la linea *CS*; porque el ángulo *NCA* es el complemento del ángulo *FCT*, por ser recto el ángulo *NCT*. Pero el ángulo *FCT* es el complemento del ángulo *FTC*, por ser rectángulo el triángulo *CFT*; luego el ángulo *NCA* coge los mismos grados que el ángulo *FTC*. Este ángulo *FTC* es igual á la elongacion de la Luna ó á la distancia de la Luna al

al Sol, porque se supone el Sol en la linea *TF* igualmente Fig.
que en la linea *CS*, por ser inmensa la distancia en comparacion de *CF*; luego el arco *NA* es igual á la elongacion de la Luna; luego en las diferentes fases de la Luna *el anchor del segmento luminoso de la Luna, es igual al seno verso del ángulo de elongacion,* tomando por radio el radio mismo del disco lunar, ó la semidistancia de los cuernos de la creciente.

Por egemplo, quando la Luna quatro ó cinco dias despues de su conjuncion, está á 60° del Sol, su parte luminosa *NB* parece la mitad del radio *NC* ó la quarta parte del diámetro entero *ND* de la luna, porque el seno verso de 60° en un círculo qualquiera es la mitad (I.642) del radio del mismo círculo. Si el círculo *GNH* representa el disco lunar, siendo *C* el centro de dicho círculo, y *NB* igual á 127.
la mitad del radio *CN*, será *NB* el anchor de la creciente de la Luna á 60° de elongacion.

781 De lo mismo que acabamos de decir se colige que no es exactamente el seno verso de la elongacion, sino el seno verso del ángulo esterior del triángulo formado en el centro de la Luna por los rayos que van al Sol y á la Tierra. Con efecto, hemos supuesto en la demostracion antecedente, que las lineas *CT* y *TF* tiradas al Sol, sea desde la Tierra ó desde la Luna, eran sensiblemente paralelas, esto no es así sino por razon de la inmensa distancia del Sol que está 360 veces mas lejos de nosotros que la Luna. Pero si los rayos *ST* y *SV* que vàn desde el Sol á la Tierra y al planeta no son paralelos, tendremos el ángulo esterior *TVO* del 128.

Hh 2 trián-

Fig. triángulo *SVT* igual al ángulo *NVA*, siendo uno y otro el complemento del ángulo *AVT*; y como la parte alumbrada y visible *NB* es igual al seno verso del ángulo *NVA*, se seguirá que el anchor de la parte iluminada y visible de un planeta es á su diámetro entero, como el seno verso del ángulo en el centro del planeta, esterior al triángulo formado en el Sol, en la Tierra y en el planeta es al diámetro del círculo.

127. 782 Nos falta demostrar que la curvatura *GBH* que forma la parte interior de la creciente es una *elipse, cuyo* ege mayor *GH* es igual al diámetro mismo del disco lunar. Con esta mira consideraremos que *GBH* es la circunferencia del círculo *terminador* de la luz y de la sombra, ó del círculo que separa el emisferio alumbrado del emisferio obscuro de la Luna; este semicírculo es visto de lado, en un ángulo què es el complemento del ángulo de elongacion; en la fig. 126 era el ángulo *ACT*. Pero un círculo mirado oblicuamente siempre parece una elipse (61); luego siendo *GBH* una circunferencia vista oblicuamente, es la periferia de una elipse. El ege mayor de esta elipse es el diámetro *GH* del disco lunar. Porque todos los círculos máximos de un globo se cortan en dos partes iguales, por consiguiente el círculo visible *GNH*, y el círculo terminador *GBH* sobre el globo de la Luna se cortan en dos partes iguales, y en dos puntos diametralmente opuestos; luego el diámetro *GCH* es la comun seccion de los dos círculos. Por esta razon entre los cuernos *G* y *H* de la creciente hay siempre un semicírculo de distancia, y en todos tiempos se puede medir el diámetro

de

de la Luna con medir la distancia de los cuernos. Fig.

783 Despues de la Luna nueva se vé la creciente que forma la parte luminosa, acompañada de una luz debil que se repara en todo lo restante del disco; entonces se divisa toda la redondez de la Luna, y esta luz se llama *Luz cenicienta.*

La Tierra reflecte ácia la Luna la luz del Sol, del mismo modo que la Luna la reflecte ácia la Tierra. Quando la Luna está para nosotros en conjuncion con el Sol, la Tierra está para ella en oposicion; y hablando con propiedad, es Tierra llena para la Luna, y la luz ó claridad que la Tierra arroja á la Luna es tal que esta la puede reflectir á la Tierra. Así, veríamos toda la Luna quando está en conjuncion, si no fuera porque el Sol, que vemos al mismo tiempo, absorbe enteramente aquella vislumbre terrestre reflectida al globo lunar, é impide que la Luna se dege ver.

De la Revolucion de la Luna.

784 Una vez que, segun consta, la Luna se mueve al rededor de la Tierra, y es su satélite, hemos de averiguar quanto dura su revolucion. Por ahora determinaremos este punto toscamente, digamoslo así; que para determinarle con la correspondiente puntualidad, será preciso dar primero á conocer las principales desigualdades que padece el movimiento de este satélite.

Averiguó Hyparco que en el discurso de 304 años habia 1760 meses lunares cabales, y á este periodo le llamaron el año grande de Hyparco; pero Hyparco substi-

Fig. tuyó despues á éste el período mas exacto de 126007 dias, y una hora para 4267 lunaciones; de esta determinacion se sigue que el mes lunar es de $29^d\ 12^h\ 44'\ 3''$ 26222 con muy corta diferencia.

785 Este mes Synódico de $29^d\ 12^h$, que tambien se llama *Lunacion* no se concluye hasta que la Luna despues de dar la vuelta al cielo se halla otra vez en conjuncion con el Sol. Pero como en este intervalo de tiempo el Sol mismo ha andado 29 grados con su movimiento de *occidente á oriente*, es preciso que la Luna ande 29° mas que la vuelta del cielo. Infiérese de aquí que no gastaria sino 27 dias y un tercio en andar los 360°, esto es, en volver al mismo punto del cielo. Esta revolucion de $27^d\ \frac{1}{3}$ se llama *Mes periódico*, y es el que determinaremos.

786 El eclipse mas antiguo de Luna que nos queda de los Babylonios, se refiere al dia 19 de Marzo 720 años antes de Christo, $6^h\ 48'$ al meridiano de París; el lugar de la Luna opuesto al del Sol era, segun el cálculo de Casini, $5^s\ 21^\circ\ 27'$. Compara el mismo Autor este eclipse con el del mes de Septiembre del año de 1717, en el qual el lugar de la Luna se halló de $11^s\ 27^\circ\ 34'$ el dia 9 de Septiembre (estilo antiguo) á $6^h\ 2'$ de la tarde. El intervalo es de 2437 años, de los quales 609 son bisiestos, mas 174 dias, ó de 890288 dias, menos 46 minutos. En este tiempo ha habido 32585 revoluciones de la luna, mas $6^s\ 6^\circ\ 7'$; de donde se saca que la revolucion media de la Luna

res-

respecto de los equinoccios es de $27^d\ 7^h\ 43'\ 5''$. Despues de muchos cálculos como este, llevando en cuenta las desigualdades que padeció el movimiento de la Luna en el intervalo de las observaciones cotejadas, se ha sacado que la revolucion de la Luna respecto de los equinoccios, es de $27^d\ 7^h\ 43'\ 4''\ 6480$ en este siglo, de donde se deduce el movimiento diario de la Luna de $13^\circ\ 10'\ 35''\ 02847$, y el movimiento secular $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 35''$. El movimiento secular respecto de las estrellas $1732559381''$, contando las 1336 revoluciones cabales de la Luna que hay en un siglo. Fig.

787 Para determinar la duracion de la revolucion de la Luna respecto de las estrellas fijas, se deben añadir $7''$ *á la* determinacion dada, porque en el discurso de un mes lunar los equinoccios retroceden como unos $4''$ de grado. Por consiguiente la revolucion media sideral de la Luna es de $27^d 7^h\ 43'\ 11''\ \frac{1}{2}$ en tiempo medio.

En teniendo bien averiguada la revolucion periódica, es facil de determinar la revolucion synódica, esto es, respecto del Sol, ó la duracion de una lunacion media, con decir: *La diferencia de los movimientos de la Luna y del Sol, es al movimiento de la Luna, como la revolucion periódica es á la revolucion Synódica.*

Con efecto, el movimiento de la Luna respecto del Sol ó la diferencia de los movimientos del Sol y de la Luna es lo que determina la duracion del mes synódico, siendo así que el movimiento solo de la Luna determina

Fig. el mes periódico. Luego estos dos meses están uno con otro en razon inversa de estos dos movimientos, quiero decir, como el movimiento absoluto de la Luna es á su movimiento relativo ó respecto del Sol. A principios de este siglo, la revolucion synódica era, segun *Mayer*, de $29^{d}\ 12^{h}\ 44'\ 2''\ 8921$.

788 Por medio del movimiento secular de que nos valemos en nuestras tablas, se pueden sacar estas revoluciones con quanta exactitud se quiera, dividiendo el número 40898649600000000, que es el producto de un siglo y de 360° reducidos á segundos, 1° por el movimiento secular de la Luna respecto de los equinoccios 1732564415''; 2° por el movimiento secular respecto de las estrellas 1732559381''; 3° por el movimiento secular respecto del Sol 1602961591 9''. Así se saca la revolucion periódica respecto de los equinoccios $27^{d}\ 7^{h}\ 43'\ 4''\ 6480$; la revolucion sideral, $27^{d}\ 7^{h}\ 43'\ 11''\ 5069$; y la revolucion synódica, $29^{d}\ 12^{h}\ 44'\ 2''\ 8921$.

De las quatro grandes desigualdades de la Luna.

789 Las revoluciones medias de la Luna que acabamos de determinar suponen que el movimiento de la Luna sea siempre igual é uniforme; pero no hay otro astro ninguno cuyos movimientos sean tan complicados ni tan variados. Estas desigualdades son las que vamos á considerar, ciñéndonos á lo que la observacion ha manifestado. Las principa-

pales son quatro, no entrando en cuenta el movimiento del apogeo de la Luna, y el movimiento del nudo. La primera desigualdad es la *Equacion* de la órbita, la segunda es la *Eveccion*, la tercera es la *Variacion*, la quarta es la *Equacion anua*. Fig.

790 Para sentar la teórica de la Luna se deberá acudir á los eclipses de Luna, porque estos eclipses nos parecen del mismo modo que si nos halláramos en el centro de la Tierra, al qual estos movimientos deben referirse indispensablemente; siendo así que en otra situacion qualquiera la diferencia de aspecto, ó la paralaxe hace mas dificultosas estas investigaciones (285).

Son tan grandes las desigualdades de la Luna y tan varias, que tuvieron por muy dificultoso los antiguos Astrónomos el determinar la duracion de una revolucion *Media* de la Luna, esto es, de una revolucion que no creciese ni menguase por las desigualdades periódicas de la Luna.

791 Deseando determinar esta revolucion media, por medio de los eclipses de Luna, indagaron los antiguos quantos meses ó dias se debían tomar para hallar un movimiento de la Luna que fuese siempre de una misma cantidad en el mismo intervalo de tiempo; hallaron 6585 dias, y 8 horas, que componen 223 meses lunares ó 18 años y 10 dias, quiero decir, que echaron de ver que quando entre dos eclipses de Luna habia habido un intervalo de 18 años y 10 dias, habia otro eclipse parecido al primero al cabo del mismo tiempo, quando el Sol habia

Fig. bia hecho 18 revoluciones con 10° y 40′. En el discurso de este tiempo, habian ocurrido todas las desigualdades de la Luna, y empezaban otra vez así en longitud como en latitud. Ya conoció Hyparco que este periodo de 223 lunaciones no era puntual en rigor; pero le tomaremos para que nos sirva de egemplo no mas.

792 En el discurso de estas 223 lunaciones y regresos de la Luna al Sol, repararon los antiguos que el regreso de la equacion, ó de la desigualdad de la Luna que era de unos 5°, habia vuelto á empezar 239 veces; la revolucion de la latitud 242 veces, y la de la longitud 241 vez con 10° 40′ mas. Por consiguiente la Luna se habia hallado 241 vez en el mismo grado de longitud, 239 veces en su distancia media ó en el punto de su máxima desigualdad, y 242 veces en su nudo, con corta diferencia. Esto bastaba para reparar las tres principales circunstancias del movimiento de la Luna, esto es, su movimiento medio, el movimiento de su apogeo, y el de su nudo; cuyas circunstancias eran indispensables para hallar las quatro desigualdades que nos hemos propuesto manifestar. Los métodos que dejamos declarados (662 &c. &c.) para los planetas no se pueden aplicar á la Luna, por causa del movimiento rápido de su apogeo y de su nudo.

El periodo de 223 lunaciones de que se valieron los antiguos para calcular los regresos iguales de los eclipses, restituía la Luna á una misma latitud, igualmente que á una misma longitud, ó á un mismo grado del zodíaco.

Es-

Este es el rumbo que siguieron los antiguos Astrónomos quando se dedicaron á considerar la Luna para determinar sus desigualdades. Echaron de ver que eclipses de Luna reparados en un mismo punto del cielo, y en una misma estacion del año no estaban á distancias iguales por lo que toca al tiempo; formaron una tabla de los intervalos de tiempo observados entre muchos eclipses de Luna, é indagaron si habria entre ellos dos intervalos de tiempo de todo punto iguales, halláronlo en 223 lunaciones ó 18 años. Con esto conocieron que la Luna no siempre volvía al mismo grado de anomalía ó de desigualdad, bien que volviese al mismo punto del cielo, y se hallase otra vez en oposicion con el Sol. Fig.

793 Siguiendo la Luna por espacio de un mes, fue facil de conocer que al cabo de cada 7 dias tenia cinco ó seis grados de desigualdad; que al cabo de 14 dias esta desigualdad desaparecía, y así de lo demas; que siempre habia en el mes dos puntos distantes á un tiempo una media revolucion en tiempo, y un semicírculo en longitud; esto es, dos mitades iguales andadas en tiempos iguales; por manera que las desigualdades volvían á empezar al cabo de unos 27 dias y medio. Pero con ocuparse en la misma investigacion en meses ó años distintos, luego echaron de ver que el punto de la máxima desigualdad no siempre estaba en el mismo punto del cielo, sí siempre un poco mas adelantado en el zodíaco, como unos 3° en cada revolucion, de modo que el movimiento de la Luna res-

pec-

Fig. pecto de su apogeo, ó su movimiento de anomalía era $\frac{1}{12}$ menor que el movimiento absoluto. Esta primera desigualdad que Ptolomeo halló de 5° 1′, se llama *Equacion de la órbita*, ó *Equacion del centro.*

794 Para determinar el apogeo de la Luna, se observan con un buen anteojo sus diámetros aparentes, porque su diámetro varía desde 29′ $\frac{1}{2}$ hasta 33′ $\frac{1}{2}$, segun se dirá á su tiempo; estamos, pues, seguros de que la Luna es apogea siempre que su diámetro aparente no es mas que de 29′ $\frac{1}{2}$, y que es perigea quando su diámetro es de 33′ $\frac{1}{2}$.

795 Hay un método mas exacto todavía para determinar el apogeo de la Luna por medio de su diámetro, y consiste en observar su diámetro ácia sus distancias medias, quando el diámetro es de unos 31′ $\frac{1}{2}$. Si se le halla dos veces de la misma cantidad, es señal de que en las dos observaciones la Luna estaba á la misma distancia de sus ápsides; luego con tomar un medio entre los dos tiempos de las observaciones, se sacará el tiempo en que la Luna fue apogea.

Por egemplo, el dia 15 de Septiembre de 1762 á medio dia el diámetro de la Luna era de 33′ 14″, reducido al orizonte, el dia siguiente fue mayor; pero el dia 18 á medio dia era de 33′ 14″ lo mismo que tres dias antes; esto prueba que á la mitad de este intervalo ó á las doce de la noche del 16 á 17 la Luna estuvo en su apogeo.

796 Con determinar muchas veces y en tiempos diferentes el apogeo de la Luna, se ha verificado que dá

la

la vuelta al cielo respecto de las estrellas en el discurso Fig.
de 8 años comunes y 311 dias ó 3232^{d} 11^{h} 14′ 31″ 0, y respecto de los equinoccios en 3231^{d} 8^{h} 34′ 57″, 6; por consiguiente su movimiento considerado respecto de los equinoccios es de 6′ 41″ 069815 cada día. *Síguese de aquí* que si se toma por unidad el movimiento medio de la Luna (786) respecto de las estrellas, el de su apogeo 6′ 40″, 931992 es igual al quebrado decimal 0,0084522595, cuyo logaritmo es 7,9269211; y que la revolucion anomalística de la Luna es de 27^{d} 13^{h} 18′ 34″, 022. Se saca con decir: *la diferencia de los movimientos seculares de la Luna y de su apogeo 1717915265 es á un siglo ó 3155760000″, como 360° ó 1296000″ son á 2380714″.*

797 Antes de Ptolomeo los Astrónomos se habían ceñido á observar eclipses de Luna que no podían manifestarles mas que la primera desigualdad de 5°. Pero Ptolomeo halló otra que era muy reparable en las quadraturas, y la manifestaban las distancias de la Luna al Sol. Observando con cuidado esta desigualdad, «hemos echado de ver » (dice Ptolomeo) que en las conjunciones y oposiciones, y » aun en las quadraturas, quando la Luna es apogea y » perigea, no habia mas que la primera y simple desigual» dad; pero es facil hacerse cargo de que no basta para » calcular los movimientos particulares de la Luna observa» da en los demas aspectos. La *segunda desigualdad* se re» fiere á las distancias de la Luna al Sol; aparece y desaparece

» en

Fig. » en las conjunciones y oposiciones ; es máxima en ciertas » quadraturas ; hannos manifestado esta diferencia *las observaciones* de la Luna que nos dejó Hyparco, y las que hemos hecho con un instrumento inventado á propósito para » medir las diferencias de longitud *á lo largo del zodíaco* » entre el Sol y la Luna."

Estas distancias de la Luna al Sol observadas por Hyparco y Ptolomeo, concordaban á veces con el cálculo de la primera desigualdad ; á veces tambien discordaban mas ó menos. Despues de observado con cuidado el curso de esta desigualdad, averiguó Ptolomeo que no habia ningun error ó ninguna diferencia en las quadraturas quando la Luna era apogea ó perígea ; pero que habia una diferencia de $2^\circ \frac{2}{3}$ quando la Luna en quadratura se hallaba 3 signos lejos de su ápside. Entonces la desigualdad que sería de 5° (793), se halla que es de $7^\circ \frac{2}{3}$, esto es, $2^\circ \frac{2}{3}$ mayor en virtud de la segunda desigualdad.

798 Ya que la desigualdad de la Luna iba desde 5° hasta $7^\circ\ 40'$, su cantidad media era, segun los antiguos, de $6^\circ\ 20'$; hoy dia se admite de $6^\circ\ 18'\ 32''$.

799 Horoccio esplicó esta segunda desigualdad por un término que se parece bastante á la *hypótesi* de Arzachel. Este Astrónomo Arabe que observaba en España ácia el año de 1080 creyó, despues de comparadas las observaciones de Ptolomeo y Albategnio con las suyas, que el apogeo del Sol adelantaba y atrasaba alternadamente, en el mismo tiempo que la excentricidad pa-

parecia que habia menguado notablemente, esto le dió Fig.
motivo de inventar la hypótesi siguiente.

Sea *T* el centro de la Tierra; *C*, el centro de la ór- 129.
bita ó del círculo que se supone que anda un planeta, de modo que *TCA* sea la linea de los ápsides, y *TC* la excentricidad del planeta. Si suponemos que el centro de la órbita en vez de mantenerse fijo en *C* trace la circunferencia de un circulillo *AGB*, resultarán dos efectos. 1° la linea de los ápsides *TA* mudará de posicion, y en vez de estar constantemente en la direccion *TCA*, pasará por egemplo á *TG*, y formará con la primera situacion un ángulo *ATG*. 2° la excentricidad en lugar de ser igual á *TC* llegará á ser *TG*, *TB*, &c. De esta hypótesi se valió Horoccio para representar la segunda desigualdad de la Luna.

800 Es verosimil que le sugiriese esta hypótesi á Horoccio la observacion de los diámetros de la Luna, que podian servir para dár á conocer el lugar del apogeo (795); no pudo menos de venir en conocimiento por este camino de que el apogeo de la Luna se hallaba en un lugar del cielo 25° mas adelantado quando la distancia del Sol al apogeo de la Luna era de 45° ó de 225°, que quando era de 135° y de 315°; por manera que el movimiento del apogeo no era uniforme, y padecia un balance anuo de mas de 12°; una vez conocida esta variacion del apogeo, su enlace con la variacion de la excentricidad era facil de reparar.

Se-

Fig. 129. 801 Segun la Teórica de Newton, el centro *A* de la órbita de la Luna traza un círculo *AGB*, estando la Tierra en *T*, de modo que *TC* espresa la excentricidad media de la Luna 55050; *TA*, la excentricidad máxima, y *TB* la mínima, siendo *TC* á *CB* como la excentricidad media es á la diferencia que hay entre ella y la mínima, ó como el seno total es al seno de 12° 18′ que es la máxima equacion del apogeo, tendremos *CB* = 11727, 31. Supone que si se hace el ángulo *ACG* duplo del argumento anuo, ó de la distancia entre el Sol y el apogeo de la Luna, el ángulo *CTG* será la equacion del apogeo, y *TG* la excentricidad actual de la órbita lunar. Por consiguiente en el triángulo *TCG* del qual conocemos dos lados y el ángulo que forman, diremos la suma de *TC* y *CG* es á su diferencia, como la tangente de la mitad del suplemento de *ACG*, esto es, la tangente del argumento anuo, cuyo duplo es el ángulo *ACG*, es á la tangente de la semidiferencia de los ángulos incógnitos.

Como la suma de los lados *TC* y *CD* 66777,31, y su diferencia 43322, 69 son términos constantes, la diferencia de sus logaritmos ó por mejor decir el complemento arismético de esta diferencia es el logaritmo constante que se añadirá siempre al logaritmo de la tangente del argumento anuo para sacar el de la tangente del argumento corregido. Con efecto, la semisuma de los ángulos incógnitos *G* y *T* es el argumento anuo medio, y su se-

semidiferencia es el argumento corregido, esto es, la mitad del ángulo *ACG* menos el ángulo *T*; porque la mitad del ángulo *C* despues de restado el ángulo *T* es lo mismo que la diferencia entre los ángulos *G* y *T*, pues $C = G + T$, $\frac{1}{2}C = \frac{G}{2} + \frac{T}{2}$, y $\frac{1}{2}C - T = \frac{G}{2} - \frac{T}{2}$; luego la semidiferencia hallada es el argumento anuo, menos el ángulo *T* que es su desigualdad, ó la equacion del apogeo. Fig.

En esta hypótesi que supone la excentricidad media $TC = 55050$, $CB = 11727,31$, el complemento arismético del logaritmo de la diferencia entre *TA* y *TB*, ó 98120864 es el logaritmo constante que se debe añadir á la tangente de la mitad del argumento anuo medio, para sacar el argumento anuo corregido, el qual añadido al lugar del Sol dá el lugar verdadero del apogeo de la Luna.

802 Esta hypótesi de Horoccio produce los mismos efectos que la de Ptolomeo (797). Se percibe facilmente que si el apogeo de la Luna concurre con la linea de los Sicygies, la excentricidad *TA* es bastante grande para causar una equacion de $7^{\circ}\frac{2}{3}$, estando la Luna en su distancia media y en quadratura á un mismo tiempo; habrá, pues, $7^{\circ}\frac{2}{3}$ de equacion, en esta hypótesi, conforme pedian las observaciones de Ptolomeo; pero si el apogeo de la Luna concurre con la linea de las quadraturas, la excentricidad será menor ó igual á *TB*, y la máxima equacion no pasará de 5°.

Fig. Haciendo variar de este modo la excentricidad de la Luna, se necesitaban diferentes tablas de equaciones para las diferentes excentricidades, ó era menester calcular cada vez directamente la equacion de la órbita para la excentricidad actual. Este cálculo era facil y exacto usando de un artificio que Halley discurrió.

La hypótesi elíptica simple (703) contiene con efecto un método facil para hallar la anomalía verdadera que corresponde á la anomalía media, y Halley le practicó en sus tablas de la Luna. Pero como se aparta algun tanto de la hypótesi de Kepler que es la única exacta, fue preciso hacerle una leve correccion que vamos á declarar. Halley se dedicó á calcular para las diferentes excentricidades, y las diferentes anomalías verdaderas de la Luna, qual era la anomalía media que las correspondía en la hypótesi exacta de Kepler, y en la hypótesi elíptica simple; la diferencia de estas dos anomalías medias que darian un mismo resultado respecto de la anomalía verdadera forma la pequeña cantidad de una tabla, que llama *Tabula pro expediendo calculo æquationum centri lunæ.* Por este medio, Halley, sin acudir á tablas de equacion para cada excentricidad daba un modo de calcularla por una operacion no mas. Hubiera bastado la hypótesi elíptica simple, pero como no dá el mismo resultado que la hypótesi de Kepler, habia buscado la diferencia; no la de las equaciones que correspondiesen á una misma anomalía media, sino, lo que viene á ser lo propio, la de las anomalías medias

que

que darían una misma anomalía verdadera. Fig.

Por egemplo, supongo que siendo la mitad de la anomalía media $74^{\circ}\ 3'\ 30''$ y la excentricidad 53662, queramos hallar la anomalía verdadera correspondiente. Esta anomalía calculada rigurosamente es de $4^{s}\ 24^{\circ}\ 40'\ 30''$; pero por la regla que dimos (704) la equacion sería $2'\ 10''\ 6$ menor, y sería preciso que la mitad de la anomalía media fuese $74^{\circ}\ 2'\ 24''\ 7$, para sacar $72^{\circ}\ 20'\ 15''$ para la mitad de la anomalía verdadera, se han, pues, de rebajar $1'\ 5''\ 3$ de la mitad de la anomalía media para que nos dé la anomalía verdadera $144^{\circ}\ 40'\ 30''$, esto es, para que dé el resultado correspondiente. La tabla de Halley da dicha cantidad, que pende de la anomalía media de la Luna, y de su excentricidad; por este motivo puso al principio los primeros guarismos del *Logaritmo para la equacion de la Luna.*

Este logaritmo del qual usó Halley es el complemento arismético del logaritmo de la distancia apogea dividida por la distancia perigea de la Luna, para cada excentricidad ó cada distancia del Sol al apogeo de la Luna. En el caso propuesto es $9,9533449$.

803 Se hizo mucho tiempo una doble operacion corrigiendo el lugar del apogeo, buscando la excentricidad de la Luna para cada instante dado á fin de inferir el lugar verdadero de la Luna, ó el lugar corregido por las dos primeras equaciones. Ni Flamsteed, ni Newton, ni Halley repararon que habia un método facil para calcular esta equacion, sin

Fig. apelar á una excentricidad variable, y un balance en el apogeo; este es el método de Mr. Euler que vamos á declarar.

129. Sea *L* la Luna; *T*, la Tierra; *C*, el centro medio de la órbita lunar; *G*, el centro para un momento dado; *CT*, la excentricidad media de la Luna; *CLT*, la mitad de la equacion media de la órbita; *GLT*, la mitad de la equacion para el tiempo dado, representada del mismo modo que en la hypótesi de Newton (801); *CLG* es la diferencia de estas dos equaciones, ó el efecto que obra en la semiequacion la variacion de la excentricidad y la libracion del apogeo. Para sacar con una simple operacion el ángulo *CLG* que es la mitad de la eveccion, considero que quando dicho ángulo es máximo, ó quando *LC* es perpendicular á *CG*, el ángulo *CLG* es de 40′, quiero decir que la razon entre *CL* y *CG* es tal que no pueden resultar mas de 40′ para el ángulo *L*, ó cerca de 1° 20′ para el total de la eveccion. Quando el ángulo *LCG* fuere oblicuo, el ángulo *CLG* menguará, en razon de la perpendicular *GD*, á la linea *CG* ó de sen *DCG* al radio; luego la eveccion será 80′. sen *DCG*. Pero el ángulo *DCG* = *ACL* — *ACG* es la anomalía media de la Luna, ménos dos veces la distancia del Sol al apogeo de la Luna, ó, lo que viene á ser lo mismo, dos veces la distancia de la Luna al Sol menos la anomalía media de la Luna, que forma el argumento de la eveccion; luego la semieveccion, ó el argumento *GLC* = 80′ sen (2 dis ☾ ☉ — an ☾). Esta es la forma que se la dá hoy dia en todas

das las tablas de la Luna; pero es de advertir que va acompañada por lo regular de otra equacion, como en la tabla de la quinta equacion de la Luna donde va acompañada de una equacion de 36″ que tiene por argumento el duplo del de la eveccion. Fig.

804 Esta segunda equacion de la Luna, que segun Ptolomeo, era de 1° 19′ ½, y segun Tycho, 1° 15′, es en las tablas de Flamsteed 1° 18′ 50″, en las tablas de Mayer 1° 20′ 34″; en las de Mr. Euler, 1° 18′ 49″, en las de Mr. D'Alembert 1° 18′ 18″, y en las de Mr. Clairaut 1° 16′ 12″.

805 La tercera desigualdad es descubrimiento de Tycho, y para darla bien á conocer es indispensable manifestemos como consideraba las dos primeras por el enlace que con ellas tiene la tercera.

Sea *T* el centro de la Tierra; *TF*, el radio del *excéntrico*, ó del círculo principal, que representa los movimientos de la Luna; suponémosle dividido en cien mil partes; se tomará *TB* de 2174 partes, y se trazará un círculo *TECD*, sobre el qual se hará mover el centro del excéntrico, de modo que en los sicygies, esto es, en las conjunciones y las oposiciones, el centro esté en *T* en el centro mismo de la Tierra, que en todas las quadraturas esté al contrario en *C*, á la distancia máxima de la Tierra, y que en los octantes esté en *D* y *E*. La equacion que de esto resultará ó el ángulo *BRT*, es de 1° 15′; porque 2174 es con corta diferencia el seno de 1° 15′, 130.

 sien-

Fig. siendo el radio cien mil. Esta equacion es proporcional al seno del duplo de la elongacion de la Luna al *Sol*, una vez que el círculo entero es andado en una semirevolucion, y es sustractiva en la primera quadratura, porque el movimiento de la Luna se hace desde *F* á *R*; por manera que el ángulo *FTR* visto desde la Tierra es menor que el ángulo formado en *C* al rededor del verdadero centro de la órbita lunar. Servirá esta hypótesi para esplicar la eveccion (804).

806 El epicyclo grande cuyo radio *FG* es de 5800, espresa una parte de la equacion del centro, y causa 3° 19′ de desigualdad; se supone que el centro del círculo chico *MNL* está en *G* quando la Luna es apogea, baja ácia *H* y se halla en *I* quando es perigea, y esto sucede, segun Tycho, á la mitad de los $27^d\ 13^h\ 18'$ $35''$, que componen la duracion de su revolucion anomalística.

El tercer epicyclo *MLKN* es aquel en el qual la Luna misma está colocada; su radio *GM* es de 2900, esto es, la mitad del epicyclo grande, y causa por lo mismo una desigualdad de 1° 40′. La Luna se mueve en este epicyclo, de modo que quando el centro del círculo chico es apogeo en *G*, la Luna esté en *K* en la parte inferior de este círculo chico *MNK*. Pero quando el centro del círculo chico estuviere en *H* ó en *O*, y fuere máxima la equacion de la órbita, la Luna estará en *M*, y á la distancia máxima del centro *F* del epicyclo grande;

de; porque la Luna anda este tercer epicyclo en 13^d Fig.
$18^h\ 39'\ 17''\frac{1}{2}$, mitad de su revolucion anomalística. La suma de estas dos equaciones, que corresponden á la distancia *FM*, es de $4^\circ\ 58\frac{1}{2}$; esta era, segun Tycho, la equacion máxima, que por razon de la eveccion llegaba á ser algunas veces de $7^\circ\ 28'$, es á saber $12'$ menor que en Ptolomeo y Copernic.

807 Pero, añade Tycho, he comprobado por medio de muchísimas observaciones exactas, que estos tres círculos no bastan para esplicarlas, y que en los octantes, esto es, á 45° de los sicygies y de las quadraturas, hay otra diferencia notable. He tenido que añadir un circulillo en *F* para esplicar esta *Variacion*, y supongo que el centro *F* del epicyclo grande anda no su circunferencia, sí el diámetro *VX* perpendicular al radio *BF*, en virtud de un movimiento de libracion arreglado sin embargo del mismo modo que si se hiciera en la circunferencia, esto es, proporcional á los senos de los arcos andados. Resulta de aquí una equacion que desde los sicygies hasta las quadraturas, se debe siempre añadir á la longitud media de la Luna respecto del Sol, para hallar la verdadera situacion del centro del epicyclo, pero que es sustractiva en el segundo y quarto octante. Pende, pues, esta libracion del duplo de la verdadera distancia de la Luna al Sol, y causa la *Variacion*, cuya desigualdad en los octantes llega á ser de $37'\ 4''$. Esta desigualdad la determinó Tycho con mucha precision, pues las tablas mas

Fig. modernas suponen la variacion de 37 á 40′; Mr. Clairaut la dá de 39′ 54″, Mayer de 37′ 4″; en las de Flamsteed de 40′ 34″, segun la Teórica de Mr. D'Alembert es de 37′ 50″.

808 La *Equacion anua* de la Luna, que viene á ser de unos 11′ 16″ es la última de las que las observaciones solas han manifestado. Despues de calculados muchos lugares de la Luna ó muchas observaciones de eclipses en diferentes tiempos del año, por las tablas en las quales ya se hacia uso de la equación de la órbita, de la eveccion y de la variacion, se reparó que todos estos cálculos concordaban con las observaciones en el mes de Enero y de Julio; discordaban constantemente, primero en el mes de Marzo, despues en el mes de Septiembre en direccion contraria. Bastaba esto para dar á conocer que habia una desigualdad dependiente de la equacion de la órbita solar, cuya desigualdad llegaba á su *máximo* siempre que se hallaba el Sol en sus distancias medias. Esta equacion anua es la mayor que pueda ser en las distancias medias del Sol, bien que penda de la máxima y mínima distancia, por la misma razon que la equacion de la *órbita* es nula en los dos ápsides, y máxima en las distancias medias (706). Así que la velocidad actual deja de exceder á la velocidad media, la suma de los excesos acumulados, hasta entonces, quiero decir, la equacion total está en su *máximo*; como esta equacion proviene del exceso de la velocidad debe crecer continuamente, mientras que esta

ta velocidad es mayor que la media, por corta que sea la diferencia. Fig.

Tambien reparó Flamsteed que es la Luna un satélite en el qual debe influir el movimiento de la Tierra, al rededor del qual se mueve mas lentamente quando es afelia, ó muy distante del Sol, que quando está cerca de este astro. Algunos años despues previno Halley que la Luna se movia con mas rapidez quando el Sol estaba mas distante de la Tierra, que quando estaba mas cerca.

809 No se le escapó á Newton que esta equacion era una consecuencia de su teórica; con efecto, como la gravedad de la Luna ácia la Tierra pierde algo por razon de la atraccion del Sol, perderá mucho mas quando el Sol estuviere mas próximo á la tierra. Hallándose, pues, la Luna detenida en su órbita por una fuerza menor se apartará del Sol, la órbita se abrirá mas, y el tiempo de la revolucion será mayor. Esta equacion anua que es de 11′ 49″ en las tablas de Flamsteed y de Halley, vá acompañada de dos equaciones análogas de 20′ para el apogeo, y de 9′ $\frac{1}{2}$ para el nudo, que introdujo Newton. Tambien se hallan en las nuevas tablas de Mayer, la una de 8′ 50″, la otra de 23′ 12.″

810 Es, pues, esta equacion anua segun Flamsteed de 11′ 49″; segun Mr. Euler de 11′ 20″; segun Mr. d'Alembert de 12′ 57″; segun Mayer de 11′ 16.″

Ace-

Fig.

Aceleracion del Movimiento medio de la Luna.

811 La *Equacion secular* que se hallará en las tablas de la Luna espresa una aceleracion que se ha notado muchos tiempos ha en los movimientos medios de la Luna; la duracion de su revolucion, no llevando en cuenta todas las pequeñas desigualdades, es hoy dia $22'''$ de tiempo mas corta de lo que era 2000 años ha; esto causa un grado de error en el lugar de la Luna quando se calcula para el año 300 antes de Christo, por medio del movimiento de la Luna que concuerda con las observaciones recientes, esto es, $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 35''$ por siglo.

812 Para conocer la desigualdad del movimiento medio de la Luna entre las observaciones antiguas del año de 720 antes de Christo, y las de este siglo, es indispensable conocer algunas que se hayan hecho en un siglo intermedio, y de estas hay muy pocas. Las observaciones mas notables que puedan servir para esta averiguacion son dos eclipses de Sol observados en Geffa que distaba 6 ó 7 millas del Cayro el año 977 y 978 por los Astrónomos del Rey Abu-Haly-Almanzor el Sabio, que reynaba en Egypto. Hállanse estas observaciones en un manuscrito de Ibnjunis. Para representar estos eclipses, ha hallado Mr. de la Lande que se ha de suponer en este siglo el movimiento medio secular de la Luna de $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 21''$; es á saber, $3'\frac{1}{2}$ mayor que en Casini, y aplicarle una equacion secular de $9''\ 886$ para el primer siglo. Esta equacion de $9''$ cre-

crece despues como el quadrado de los tiempos (646), Fig.
y llega á ser de $1^{\circ}\ 26'\ 24''$ para el año de 700 antes de Christo. Esta equacion secular de la Luna es causa de que la duracion de la revolucion de la Luna en este siglo no es mas que de $27^{d}\ 7^{h}\ 43'\ 4'', 648$, siendo así que era de $27^{d}\ 7^{h}\ 43'\ 5'', 1386$ dos mil años ha.

813 Manifiestan tambien la necesidad de esta equacion secular las observaciones hechas de 60 años á esta parte; *Mayer* halló el movimiento para 60 años de $1^{s}\ 10^{\circ}\ 44'\ 9''$, dos minutos mayor de lo que le dán las observaciones antiguas. Todos los eclipses del último siglo concuerdan, sin discrepar un minuto, con esta aceleracion, siendo así que los errores llegan á ser de 2 y 3 minutos quando se hace uso del movimiento medio de las demás tablas. Es, pues, la equacion secular de $9''$ para el primer siglo, ó de 1° en 2000 años, y el movimiento medio para principios del siglo XVIII es de $4^{s}\ 9^{\circ}\ 23'\ 5''$ cada año, de donde resultarian $10^{s}\ 7^{\circ}\ 53'\ 35''$ por siglo si fuese uniforme en el discurso de 100 años.

De los Nudos, y de la Inclinacion de la Órbita lunar.

814 La órbita de la Luna está inclinada á la eclíptica del mismo modo que las órbitas de los demás planetas; la Luna atraviesa, pues, la eclíptica dos veces en cada revolucion, y siete dias despues que atravesó en uno de sus nudos la eclíptica, está 5° lejos de ella. Si no fuera por esta inclinacion tendríamos un eclipse de Sol el dia

de

Fig. de la conjuncion, y un eclipse de Luna el dia de la oposicion. Pero hay años en que no hay ningun eclipse de Luna, porque en el instante de cada oposicion la Luna está distante de su nudo, y por consiguiente mas arriba ó mas abajo de la eclíptica, en la qual siempre está el *centro del Sol*, y la sombra de la Tierra.

El *Nudo ascendiente* de la Luna ó el nudo donde atraviesa la eclíptica caminando ácia el norte, se llama á veces la *Cabeza del Dragon*, y tiene esta señal ☊; la señal del nudo descendiente ó de la *Cola del Dragon* es ☋.

815 La circunstancia mas notable de los nudos de la Luna es la rapidez de su movimiento; si la Luna atraviesa la eclíptica en el primer punto de Aries ó en el punto equinoccial, conforme sucedió en el mes de Junio de 1764, diez y ocho meses despues atraviesa la eclíptica á principio de Piscis, y su nudo se halla 30° ó un signo entero mas atrás, y dará con esto la vuelta al cielo en el discurso de 18 años comunes 228 dias 4^h $52'$ $52''$. Para observar este movimiento de los nudos basta ver en qué tiempo la Luna eclipsa la estrella Régulo que está en la misma eclíptica. Quando la Luna eclipsa á Régulo (esto sucedió en el mes de Junio de 1757) está evidentemente en su nudo; pero algunos años despues se repara que en lugar de eclipsar Régulo pasa 5° mas arriba ó mas abajo al norte ó al sur de la estrella; luego el nudo de la órbita lunar no está entonces en el punto de la eclíptica donde está Régulo, sino 90° mas allá. Siempre que la Luna se ha hallado en conjuncion con alguna estre-

trella, de modo que pase muy cerca de ella, se halla el mes siguiente mas apartada de la estrella, y se vá apartando siempre mas. Al cabo de 19 años se la vé volver por los mismos puntos del cielo, y ocultar las mismas estrellas; todo esto prueba bastante que el nudo de la Luna dá la vuelta al cielo en el mismo intervalo de tiempo. Fig.

816 Quando tratáremos de los eclipses de Luna, manifestaremos que son de igual duracion los que se verifican estando la Luna á la misma distancia de la eclíptica ó de su nudo. Comparó Hyparco muchos eclipses de Luna observados desde los Caldeos hasta su tiempo, y halló que en el discurso de 5458 meses lunares la Luna habia pasado 5923 veces por su nudo. Esto probaba que el movimiento diario de la Luna respecto de sus nudos es de $13^{\circ}\ 13'\ 45''\ 39'''\frac{2}{3}$. Es muy exacto este resultado, pues segun Bouillaud es de $13^{\circ}\ 13'\ 45''\ 39'''\ 38^{IV}$, y segun Riccioli $13^{\circ}\ 13'\ 45''\ 29'''\ 28.^{IV}$ Este elemento es tan facil de determinar, comparando los eclipses de Luna observados (786) con los nuestros, que no queda ninguna duda acerca de su determinacion.

817 El movimiento total del nudo en 100 años respecto de los equinoccios es de $6963075''$ y de $6958041''$ respecto de las estrellas fijas, el de la Luna es de $1732559381''$, de donde es facil de inferir que tomando por unidad el movimiento medio de la Luna respecto de las estrellas, el de su nudo es igual al quebrado decimal 0,00401604 76 cuyo logaritmo es 7,6037988; lue-

Fig. luego el movimiento de la Luna respecto de su nudo es 1,0040160476. La revolucion de la Luna respecto del nudo se hallaría dividiendo por este último número la revolucion sideral $27^d\ 7^h\ 43'\ 11''\ 51$; porque la revolucion respecto de las estrellas es á la revolucion respecto del nudo, como el movimiento respecto del nudo es al movimiento respecto de las estrellas. Tambien se hallará con decir: *la suma de los movimientos seculares de la* ☾ *y del nudo* $1739517422''$ *es á un siglo, como* $360°$ *son á un quarto término* $2351149''\ 1709$; así esta revolucion de la Luna que respecto del nudo era de $27^d\ 5^h\ 5'\ 36''$ segun Riccioli, es segun nosotros de $27^d\ 5^h\ 5'\ 49''\ 1709$.

818 La órbita de la Luna forma con la eclíptica un ángulo de unos $5°$, esto quiere decir que quando la Luna está á $90°$ de sus nudos tiene unos $5°$ de latitud. Pero esta mayor latitud que no pasa de $5°$ en los novilunios ó plenilunios que se verifican á $90°$ de los nudos, llega á $5°\ 18'$ en las quadraturas, quando se observan tambien á $90°$ de los nudos, esto manifiesta que la inclinacion de la órbita lunar es la mínima en los sicygies, y máxima en las quadraturas.

819 Además de esta desigualdad de la latitud de la Luna observó tambien Tycho otra en los nudos de la Luna que no era perceptible en los novilunios y plenilunios; pero en las demás situaciones hallaba $1°\ 46'$ de diferencia en el lugar del nudo, de donde resultaban $12'$ mas ó menos

nos en la latitud de la Luna en las inmediaciones de los Fig. nudos.

820 Discurrió Tycho que estas dos desigualdades de la inclinacion y del nudo se podian figurar á un tiempo, suponiendo que el polo de la órbita lunar se mueve en un circulillo *ECFG*, cuyo diámetro *GC* era de 19′; suponien- 131. do que el centro *D* de este circulillo está á una distancia *DA* del polo *A* de la eclíptica igual á 5° 8′ que es la inclinacion media ó la distancia media de los polos de la eclíptica y de la órbita de la Luna; esto quiere decir que segun Tycho el arco *AD* es de 5° 8.′ La gran puntualidad de esta determinacion es digna de notarse, pues las observaciones de estos tiempos dán la inclinacion de 5° 8′ 52″, y el valor de *GD* 8′ 49.″ Se supone que el polo de la órbita lunar se mueve en la circunferencia *GEC*, de modo que esté en *G* en los sicygies, en *C* en las quadraturas, en *F* en los octes; siendo su movimiento proporcional al duplo de la distancia verdadera de la Luna al Sol. Esto supuesto, calculando el triángulo esférico *ADF* se halla que el ángulo *DAF* es de 1° 46′; esta es la máxima equacion del lugar del polo *D*, y por consiguiente del lugar del nudo de la Luna en la eclíptica, siempre distante 90° del lugar del polo. En otro punto como *H*, el ángulo *HAG* será tambien la equacion del nudo, y *AH* la distancia actual de los polos de la eclíptica y de la órbita lunar ó la inclinacion de la órbita de la Luna para el tiempo dado, siendo siempre el ángulo *ADH* igual al duplo de la elongacion de la Luna, ó de lo

que

Fig. que falta para los 180°, esto es el duplo de la distancia de la Luna á su conjuncion ó á su oposicion.

821 No alcanzó Tycho que de esta hypótesi y de esta construccion se sacaba un modo muy sencillo de corregir la latitud de la Luna con una sola equacion. Lo mismo se les escapó á otros Astrónomos de gran sagacidad, hasta que Tobias Mayer halló el camino.

822 Sea *L* la Luna; *E*, el polo de su órbita en un tiempo qualquiera; de modo que *LE* sea de 90°; el arco *LD* ó la distancia de la Luna al polo medio es mayor ó menor que la distancia al polo verdadero, toda la cantidad de la equacion de la latitud que buscamos. Si desde el polo medio *D* se baja el arco chico *DM* perpendicular al círculo *LE* prolongado hasta *M*, tendremos *LM* = *LD*, y por consiguiente *EM* será la diferencia que se busca entre la distancia al polo verdadero y la distancia al polo medio, ó entre la latitud verdadera y la latitud media. Ya que *AD* es el círculo de la latitud que pasa por los polos de la órbita de la Luna, á la qual es perpendicular en los puntos de la máxima digresion; el arco de círculo *DB* perpendicular al primero será el que pasa por los nudos de la Luna, y el ángulo *LDB* será la distancia de la Luna á su nudo ó el argumento de latitud medido en el polo de su órbita; y esto viene á ser lo mismo que si se contára en la misma órbita de la Luna. El ángulo *ADM* es igual al ángulo *LDB*, porque si de los ángulos rectos *ADB*, *LDM*, se resta la parte comun *MDB*, los residuos *ADM*, *LDB*

se-

serán iguales; luego *ADM* tambien es igual al argumento de latitud. Pero *ADE*, segun la hypótesi y las observaciones de Tycho (820), es igual al duplo de la distancia de la Luna al Sol, luego *MDE* es igual al duplo de esta distancia menos el argumento de latitud. El triángulillo rectángulo *DME* sensiblemente rectilineo, dá por la regla ordinaria (I.664), $ME = ED$. sen MDE; luego *la equacion de la latitud de la Luna es igual á 8′ 49″ multiplicados por el seno de la doble distancia de la Luna al Sol menos el argumento de latitud.* Fig.

823 De esta variacion en los nudos y la inclinacion de la órbita lunar resulta tambien una desigualdad en la reduccion á la eclíptica. Pero Mayer la ha comprehendido en la tabla de la *Variacion*, porque se ha reparado que con quitar algunos segundos á la variacion, se lograba el mismo efecto. Mr. d'Alembert repara en su teórica de la Luna que las cantidades que provienen de la equacion del nudo, y de la de la inclinacion, se destruyen mutuamente, á excepcion de una equacion de 23″ que tiene el mismo argumento que la variacion de la Luna.

824 Aunque la hypótesi que acabamos de esplicar es la única de que se hace uso en las tablas que publicaremos, no por eso dejaremos de dar á conocer como Newton, y despues de él otros insignes Matemáticos han considerado estas variaciones en la latitud de la Luna. Supuso Newton que la inclinacion de la órbita lunar padecia un balance alternativo de 9′, y el nudo una desigualdad de 1° 29′

Fig. 39″, y consideraba estas dos cosas separadamente. En esta hypótesi, se halla que quando el Sol está en el nudo de la Luna, este nudo tiene menos movimiento, porque su equacion crece hasta que el Sol está á 3 signos del nudo; entonces la equacion aditiva es de 1° 29′ 39″, entonces deja de crecer, y el movimiento del nudo es el *mismo que si no* hubiera desigualdad, esto es, igual al movimiento medio.

825 La inclinacion de la órbita lunar es máxima quando el Sol está en el nudo, entonces Newton la supone de 5° 17′ 30″; es al contrario mínima, ó de 4° 59′ 30″, quando el Sol corresponde á los límites de la máxima latitud, y está á 90° de los nudos de la Luna. De este modo mudaba Newton el ángulo de inclinacion y el lugar del nudo de la Luna; hecho esto, en conociendo la distancia de la Luna á su nudo, y el ángulo de inclinacion, buscaba la reduccion á la eclíptica y la latitud. En la Astronomía Física declarararemos el principio de estas singularidades, aquí solo hablamos de la hypótesi astronómica hallada por medio de las observaciones de Tycho, y admitida de Newton por razon de su conformidad con las leyes que descubrió.

826 Hemos dicho que Newton tambien habia introducido una equacion anua (809) de 9′ 27″ para el nudo; esta es menor que la del apogeo, en la misma razon que el movimiento medio del nudo es menor que el del apogeo. Pero la equacion del nudo es sustractiva quando las demás son aditivas, porque el movimiento del nudo es en direccion contraria á la del movimiento de la Luna y del

mo-

movimiento de su apogeo. De estas mismas equaciones se Fig. hace uso en las tablas de Mayer que publicaremos.

Del Período Caldeo de doscientas veinte y tres Lunaciones.

827 Hemos dicho (791) como los antiguos Astrónomos muchos tiempos antes de Hyparco, habian reparado el regreso constante de los eclipses al cabo de 223 meses lunares, ó de 18 años y diez dias. Para que volviesen los eclipses por el mismo orden, no obstante las desigualdades de la Luna, era indispensable que estas desigualdades tuviesen el mismo período, de donde infirió Halley que las desigualdades y los errores de las tablas, bien que no estuviesen averiguados con toda puntualidad, habian de ser unos mismos al cabo de 223 lunaciones, de modo que un error observado debia bastar para pronosticar el que se hubiese de verificar 18 años despues, no obstante la imperfeccion de las tablas de la Luna. A este período le dió Halley el nombre de *Saros* ó de *Periodõ Caldaico.*

Desde el año de 1684 se habia valido Halley de los 18 años para pronosticar los eclipses. El dia 22 de Junio (estilo antiguo) del año de 1666 se habia observado en Londres un eclipse de Sol, de cuyo eclipse se valió para pronosticar el de 2 de Julio de 1684, llevando en cuenta el mismo error que habia hallado en las tablas para el dia 22 de Junio de 1666, y su pronóstico se verificó sin discrepar un minuto. Finalmente, observó que aun fuera de los sicygies, los errores de las tablas volvian casi los mismos;

 in-

Fig. infirió de aquí que los defectos de la teórica tenían alguna regularidad, y para cerciorarse del todo, formó el proyecto que puso por obra de observar la Luna todo un período de 18 años.

828 En las tablas de Halley se halla un catálogo de los eclipses de la Luna y de Sol, que hubo desde 1701 hasta 1718; señaló para cada uno el tiempo medio del medio del eclipse, la anomalía media del Sol, el argumento anuo, y la latitud de la Luna. A fin de que sirviera esta tabla para pronosticar los eclipses en otros períodos, la añadió otras dos tablas para corregir el período; porque á la verdad no es tan puntual el regreso que se puedan sacar consecuencias ciertas.

Del Diámetro de la Luna.

829 De las observaciones mas recientes, y hechas con suma proligidad consta que el diámetro medio de la Luna es de $31' \ 29''$, los estremos son $29' \ 25''$, quando la Luna es apogea y está en conjuncion, y $33' \ 34''$, quando es perigea, y está en oposicion. Lo que aquí llamamos *Diámetro medio de la Luna* es un medio arismético entre el diámetro *máximo* y el *mínimo*.

830 De las variaciones del diámetro de la Luna se indician las de sus distancias; y con el socorro de los anteojos astronómicos los incrementos y decrementos de la distancia de la Luna. No solo mengua el diámetro de la Luna quando es apogea, mas tambien halló Horoccio ácia el año

año de 1638 que quando la Luna es apogea, no siempre Fig.
está á la misma distancia de la Tierra, de la qual dista mas si entonces está en oposicion ó en conjuncion..

Picard hizo con mucho cuidado estas observaciones del diámetro de la Luna, con la mira de averiguar la variacion en las distancias de la Luna á la Tierra; halló que la Luna perigea y en quadratura parecia en un ángulo menor que la Luna perigea y en sicygi. Este aumento del diámetro de la Luna en los sicygies, proviene de dos desigualdades en las distancias de la Luna, de que haremos mencion á su tiempo.

Estas dos desigualdades están enlazadas con las dos equaciones del *movimiento* de la Luna que hemos llamado *eveccion* y *variacion*; se han observado desde la invencion de instrumentos muy perfectos y á propósito para medir puntualmente los diámetros de la Luna en sus diferentes posiciones. Se ha observado que quando el argumento de la eveccion era de 0 signos, el diámetro era 18″ ó 20″ menor, y que quando el argumento de la eveccion es de 6 signos, es al contrario 18″ mayor, bien que la Luna esté á la misma distancia de su apogeo. Tambien se ha averiguado que quando el argumento de la variacion es nulo ó de 6 signos, el diámetro de la Luna es 14 ó 15″ mayor, y mengua otro tanto ácia 3 ó 9 signos, esto es, en los octantes á igual distancia del apogeo.

831 Como estas observaciones hechas en el siglo pasado en Inglaterra y Francia, concordasen con la teórica de

Fig. Newton, esto es, con el efecto que debe causar la atraccion del Sol; se valió de ellas Newton para corregir la paralaxe de la Luna, por medio de los dos argumentos de la eveccion y de la variacion. Segun las investigaciones de Mayer, la espresion del diámetro de la Luna para un tiempo qualquiera es la siguiente fórmula: $31' 9'' - 1' 42'' 3.$ cos anomal. $+ 5'' 4$ cos 2 anomal. $+ 13'' 7$ cos 2 dist. ☾☉ $- 20'' 2$ cos (2 dist. ☾☉ — anomal ☾).

832 Quando la Luna está mas cerca del *zenit*, está tambien mas cerca de nosotros, y su diámetro aparente parece mayor en la misma proporcion.

132. Sea *T* el centro de la Tierra; *O*, un observador puesto en su superficie; *Z*, la Luna en el zenit del observador; si la distancia *ZO* de la Luna al observador es una sesentésima parte menor que la distancia *ZT* de la Luna al centro de la Tierra, el diámetro aparente visto desde el punto *O*, será una sesentésima parte mayor que el diámetro visto desde el centro *T* de la Tierra.

Del mismo modo, si la Luna está en *L*, de suerte que su altura sobre el orizonte sea igual al ángulo *LOH*, siendo igual al ángulo *LOZ* su distancia al zenit, se echa de ver que la distancia *LO* será menor que la distancia *LT* al centro de la tierra. Este aumento será nulo en un caso no mas, es á saber, quando la Luna estará en el orizonte en el punto *H*, porque entonces estará casi á la misma distancia de *O* que de *T*. Esta es la razon porqué se llama *Diámetro orizontal* de la Luna el que se vé desde el centro de la Tier-

Tierra, por ser tambien igual al diámetro que observamos Fig. quando la Luna está en el orizonte.

En conociendo el diámetro orizontal de la Luna, es facil de hallar el *Diámetro aumentado* en razon de la altura sobre el orizonte, porque son entre sí como el lado *LO* es al lado *LT*. En el triángulo *LOT*, el ángulo *OLT* es lo que llamamos *Paralaxe de altura* (292); el ángulo *LOZ*, ó su suplemento *LOT*, que tiene un mismo seno, es la distancia aparente al zenit, el ángulo *LTO* es la distancia verdadera de la Luna al zenit, vista desde el centro de la Tierra, ó el complemento de la altura verdadera. Tenemos (I. 671) *LO* : *TL* :: sen *OTL* : sen *LOT*; luego el diámetro orizontal es al diámetro aparente, como el seno de la distancia verdadera de la Luna al zenit, vista desde el centro de la Tierra, es al seno de la distancia aparente de la Luna al zenit, vista desde el punto *O*.

833 Por consiguiente para hallar el diámetro de la Luna aumentado en razon de su altura sobre el orizonte, se hará esta proporcion: *El coseno de la altura verdadera es al coseno de la altura aparente, como el diámetro orizontal es al diámetro aparente.* La diferencia entre este y el diámetro orizontal es lo que se llama *Aumento del diámetro*, del qual daremos una tabla con las demás del Tomo X de este Curso.

834 De la demostracion precedente resulta que quando la Luna nace, su diámetro ha de parecer menor que despues que ha llegado á alguna altura; la Luna al paso que vá subiendo ha de parecer mayor á nuestra

Fig. vista, y la observacion hecha con un instrumento qualquiera hace patente á los Astrónomos, que la Luna se vé en un ángulo menor quando está en el orizonte. Sin embargo es hecho constante, y generalmente admitido que la Luna mirada con la vista sola, parece de un tamaño estraordinario quando se la vé nacer al fin del dia por detrás de edificios y montañas; á todos les parece que la Luna es entonces dos ó tres veces mas ancha que despues de llegada á mucha altura. Esto es una ilusion óptica, cuya razon se saca de lo dicho (VI. 394).

835 El diámetro de la Luna en ascension recta es la cantidad que discrepan una de otra las ascensiones rectas del limbo y del centro de la Luna.

133. Sea *P* el polo del mundo; *EQ*, el equador; *PLA*, el círculo de declinacion que pasa por el centro de la Luna y señala en *A* la ascension recta de la Luna en el equador; *PMB*, el círculo de declinacion que pasa por el borde de la Luna *M*, cuyo círculo tocando el limbo de la Luna vá á determinar en *B* la ascension recta del limbo de la Luna; será, pues, *AB* el semidiámetro de la Luna en ascension recta, y por lo que dejamos dicho (561) acerca del Sol, *se debe dividir el semidiámetro orizontal por el coseno de la declinacion verdadera de la Luna, para hallar el semidiámetro en ascension recta.*

836 Quando se quiere determinar el tiempo que gasta el diámetro de la Luna en atravesar el meridiano, *se convierte en tiempo lunar el diámetro de la Luna en ascension*

sion recta. Supongo que el atraso diurno de la Luna respecto del Sol sea de una hora; quiero decir, que gasta 25 horas de tiempo medio en andar 360° y restituirse al meridiano, el dia para el qual se calcúla. Supongo tambien que su diámetro en ascension recta sea de 30′, todo está en averiguar quánto tiempo gastará la Luna en andar 30′ con su movimiento diurno á razon de 25 horas por 360°; se hará, pues, esta proporcion: 360° *son á la revolucion diurna,* 25 *horas, como el diámetro en ascension recta* 30′, *es al tiempo que se busca, el qual será de* 2′ 5″; esto es lo que tarda la Luna en atravesar el meridiano. Los Astrónomos hacen uso á cada paso de esta cantidad en las observaciones de la Luna; quando despues de observado el paso del primer borde de la Luna por el meridiano quieren determinar á qué hora pasó el centro de la Luna; entonces al tiempo en que el primer borde pasó se debe añadir el que gastare el semidiámetro en pasar el meridiano para sacar el instante del paso del centro de la Luna por el mismo círculo. Fig.

837 Algunos Astrónomos se han persuadido á que para determinar el tiempo del diámetro, era preciso aumentar primero el diámetro de la Luna en razon de su altura sobre el orizonte (833), siendo así que se debe tomar el diámetro orizontal, ó visto desde el centro de la Tierra.

Porque quando el limbo de la Luna parece que toca el meridiano, el observador puesto en el centro de la Tierra

Fig. ra ó el que estuviere en su superficie, estarían ambos en un mismo plano y en un mismo meridiano con el borde de la Luna, y ambos ven á un mismo tiempo y sin ninguna diferencia, el limbo de la Luna en el meridiano, lo mismo diremos del limbo siguiente. *Por consiguiente* el tiempo que la Luna gasta en atravesar el *meridiano*, sería de todo punto el mismo, visto desde el centro ó desde un punto qualquiera de la superficie de la Tierra, colocado debajo de un mismo meridiano, y en ningun modo pende de la altura de la Luna sobre el orizonte.

Refiere Mr. de la Lande que acerca de esto le propuso un Sabio este argumento: "Quando observo el borde de la „ Luna en el meridiano, quiero saber quanto dista de este „ círculo el centro de la Luna, pero esta *distancia* pende del „ semidiámetro de la Luna, qual parece entonces; es, pues, „ preciso valerse para el cálculo del semidiámetro aparente, „ ó aumentado en razon de su altura sobre el orizonte."

A esto respondió Mr. de la Lande probando que la distancia del centro de la Luna al meridiano en tiempo, solo pende del tamaño aparente del semidiámetro, visto desde el centro al rededor del qual se hace el movimiento. Un arco de 15′, visto desde el centro de la Tierra, atraviesa el meridiano en un minuto de tiempo; si me arrimo bastante al obgeto para que me parezca de 30′ y no de 15′, no por esto dejará de atravesar el meridiano en un minuto, porque al mismo tiempo que el obgeto me parecerá otro tanto mayor por estar mas inmediato á mi, tambien se-

será otro tanto mayor la velocidad de su movimiento, y tanto tardarán los 30′ en pasar por el meridiano, como tardaban antes los 15′. Fig.

Movimiento horario de la Luna.

838 Llamamos *Movimiento horario* de la Luna el número de minutos y segundos que parece que la Luna anda en una hora en su órbita, mirada desde el centro de la Tierra. Este es un punto esencial para el cálculo de los eclipses.

La cantidad media del movimiento horario es de 32′ 56″, 4; se halla dividiendo en 24 partes su movimiento diurno, ó con hacer esta proporcion: la duracion de la revolucion periódica es á 360°, como una hora es al movimiento horario.

Solo la excentricidad de la órbita lunar causa en el movimiento horario de la Luna una variacion de 3′ 45″; la eveccion causa una desigualdad de 42″; la variacion causa otra de 38″.

839 Quando hay longitudes calculadas de 12 en 12 horas como se hallan en las efemérides, se puede determinar el movimiento horario con muchísima puntualidad. Con efecto quando se toma la dozava parte del movimiento de la Luna entre medio dia y la media noche siguiente, se saca el movimiento horario que se verificaba á las seis, esto es, ácia el medio del intervalo de las dos longitudes que han servido. Ha comprobado Mr. de la Lande que

Fig. que á pesar de todas las desigualdades de la Luna, las segundas diferencias son sensiblemente uniformes en el discurso de 24 horas, así el movimiento horario crece ó mengua con uniformidad desde medio dia hasta media noche; es menor, si se quiere, á medio dia, es mayor á media noche que el movimiento suponiéndole uniforme en las 12 horas; pero á la mitad del intervalo, esto es, á 6 horas, ha debido ser puntualmente de esta cantidad media entre el movimiento menor que se verificaba á medio dia, y el mayor que se verifica á media noche. Luego con tomar un medio entre el primero y el último, ó lo que es lo propio, con tomar la dozava parte del movimiento total, se sacará el movimiento para seis horas.

Por lo mismo, si se toma la dozava parte del movimiento entre la media noche y el medio dia del dia siguiente, se sacará el movimiento horario para 18 horas, así como en la operacion antecedente se sacó para 6 horas. Una vez determinado el movimiento horario para 6 horas y 18 horas, no será dificil de hallarle para otra hora qualquiera. Darémos un egemplo en el qual supondremos que sean dadas las longitudes de la Luna de 12 en 12 horas, con las diferencias apuntadas al lado que son los movimientos semidiurnos ó para 12 horas. Se multiplican estos movimientos por 5, se toman los minutos por segundos, y los grados por minutos, y se sacan de este modo los movimientos horarios que corresponden á los tiempos intermedios.

1757

Fig.

1757	Long. de la ☾	Mov. para 12ʰ	Quíntuplo ó movim. horario	
1 de Enero	1ˢ 27° 57′ 0″			
á med. noche	2 3 57 10	6° 0′ 10″	30′ 1″	el 1 á 6ʰ
2 á med. dia	2 9 55 51	5 58 41	29 53	el 1 á 18
á med. noche	2 15 53 21	5 57 30	29 47	el 2 á 6
3 á med. dia	2 21 49 56	5 56 35	29 43	el 2 á 18

Si en virtud de esto quiero sacar el movimiento horario para el dia 1 de Enero á 9^h de la noche; reparo que el movimiento horario ha menguado 8″ el dia 1 de Enero desde las 6^h hasta las 18^h, y que la hora propuesta es 3 horas mas tarde que 6 horas. Hago, pues, esta proporcion: $12^h : 8'' :: 3^h : 2''$, y restando 2″ de 30′ 1″, saco 29′ 59″ para el movimiento horario á 9^h de la noche.

840 El mismo método sirve para hallar el movimiento horario en ascension recta, y en tiempo; porque en conociendo el atraso diurno y desigual de la Luna para 24 horas, se puede determinar el atraso horario para una hora qualquiera. Supongo que el dia 1 del mes la ☾ pasó por el meridiano á 4^h 0′, el 2 á 4^h 50′, el 3 á 5^h 45′, de modo que desde el dia 1 al 2 el atraso sea de 50′, y del 2 al 3 sea de 55′, y que en virtud de esto queramos saber el atraso horario para el 2 á la hora del paso por el meridiano, esto es, á 4 50′.

Tomaremos un medio entre los dos atrasos, cuyo medio será 52′ 30″; diremos 24^h $52'\frac{1}{2}$: 52′ 30″ ::

1^h

Fig. $1^h\ 0' : 2'\ 6''\ \frac{1}{2}$ de tiempo, atraso de la Luna en una hora de tiempo, que es cabal para el dia 2 á $4^h\ 50'$.

Tambien se puede determinar este atraso para otro intervalo qualquiera, pongo por caso, para el tiempo que el diámetro de la Luna gasta en atravesar el meridiano (836), y añadiendo el atraso hallado á la duracion del paso, calculado primero independientemente de esta circunstancia, se sacará la verdadera duracion del tiempo que el diámetro de la Luna gasta en pasar el meridiano. Pero para mayor puntualidad bueno sería conocer de antemano con corta diferencia la cantidad de este atraso, ó por lo menos suponerle de antemano de $4''$ de tiempo, á fin de determinar con la mayor puntualidad quanto atrasa la Luna mientras dura dicho paso.

Paralaxe de la Luna.

841 Ya hemos dicho (285) qué cosa es la paralaxe de un astro; ahora trataremos de la paralaxe de la Luna en particular, declarando quanto acerca de ella ocurre averiguar. Pero primero propondremos los métodos que se conocen para determinar la paralaxe.

842 I El primer método hace uso de las latitudes máximas de la Luna observadas al norte y al sur de la eclíptica, para determinar la cantidad de la paralaxe.

Supongamos un observador ácia los $28^\circ\ \frac{1}{2}$ de latitud terrestre septentrional, que observe la Luna quando pa-

pasa por su zenit quando tiene 28° $\frac{1}{2}$ de declinacion bo- Fig.
real, y está á su máxima latitud 5° al norte de la eclíptica. Al cabo de 15 dias, estando la Luna en la parte opuesta del cielo y en su máxima latitud austral 5° debajo de la eclíptica, parecerá 57° distante del zenit, pues estará 28° 28′ $\frac{1}{2}$ lejos del equador del lado del medio dia. Como en el primer caso estaba 28° $\frac{1}{2}$ al norte, la paralaxe no ocasionaba variacion ninguna en la primera distancia de la Luna al equador, porque la Luna estaba entonces en el zenit, pero la paralaxe no puede menos de causar un incremento aparente en la segunda distancia, por ser la paralaxe muy considerable á 57° del zenit. Por consiguiente todo el efecto de la paralaxe contribuye para aumentar la latitud meridional de la Luna, y hacer que parezca mayor que la latitud septentrional. En lugar de parecer de 5° parecerá de 5° 50′ por lo menos; porque si la paralaxe orizontal fuese de un grado, ha de ser de 50′ á los 57° de distancia del zenit (294); si pasare de 50′ el exceso de la latitud austral, será señal de que la paralaxe orizontal pasa de un grado.

Por consiguiente las latitudes máximas de la Luna, que han de ser iguales respecto del centro de la Tierra, parecen diferentes quando se observan desde la superficie, porque la latitud meridional siempre es mayor que la otra, estando mas baja la Luna ácia el medio dia por causa de la paralaxe quando se halla en su máxima latitud meridional; la diferencia entre estas dos latitudes observadas

nos

Fig. nos dá á conocer la paralaxe total que se verificaría en el orizonte.

843 Tambien se puede practicar este método en los lugares que nunca tienen la Luna en su zenit; porque en conociendo la diferencia de las latitudes aparentes, que es la suma de las dos paralaxes de latitud, ó en conociendo la diferencia de las paralaxes, respecto de dos alturas conocidas, será facil de determinar la paralaxe orizontal. Sea P la paralaxe máxima de altura; p, la mínima; Z, la distancia máxima al zenit; z, la mínima, $P:p$ :: sen Z : sen z: luego $P-p:p$ :: sen Z — sen z : sen z, y $p=\frac{(P-p)\,\text{sen}\,z}{\text{sen}\,Z-\text{sen}\,z}$. Luego en conociendo la diferencia ó la suma de dos paralaxes, es facil de determinar cada una separadamente.

Quando se observa la Luna en dos tiempos tan diferentes, se suele hallar que la Luna está mas distante de la Tierra, ó á una latitud algo mayor en la una de las dos observaciones que en la otra. En este caso se lleva en cuenta esta diferencia, corrigiendo una de las dos observaciones, á fin de reducir la latitud á la que se hubiera observado, si la distancia al nudo y la paralaxe orizontal hubieran sido unas mismas en ambas observaciones.

844 II. Este segundo método se llama el método de las ascensiones rectas, y le declararemos proponiendo un caso muy sencillo. Supondremos en la linea equinoccial un observador observando un planeta que tambien esté en el equador; le verá pasar por su zenit, y bajar despues perpendicularmente al orizonte; la paralaxe de

de altura estará toda èn el equador, porque entonces el equador y el vertical del planeta se confunden uno con otro. Bastaría observar entonces la ascension recta de un planeta quando nace y se pone; la primera sería mayor, y la segunda menor todo el valor de la paralaxe orizontal; sería, pues, la paralaxe que se busca la mitad de la diferencia observada. Siendo otra la situacion del planeta y del observador, la paralaxe de ascension recta es menor que la paralaxe orizontal, y que la paralaxe de altura; pero se puede inferir una de otra, y lo probaremos. Fig.

845 Sea *Z* el zenit; *P*, el polo del mundo; *EQ*, el equador; *LMN*, el paralelo del astro; *M*, el lugar verdadero, y *m* el lugar aparente, mas bajo que el lugar verdadero *M*, en el vertical *ZMmT*. Si desde el polo *P* se tiran dos círculos de declinacion *PMU* y *Pmu*, el uno por el lugar verdadero del astro *M*, el otro por el lugar aparente *m*, la diferencia de estos dos círculos de declinacion, el ángulo *MPm* que forman uno con otro en el polo del mundo, ó el arco *Vu* del equador que le mide, será la paralaxe de ascension recta. Pero si en el triángulo *PMm* conocemos el ángulo *P*, será facil de determinar el lado opuesto *Mm*, quiero decir, que de la paralaxe de ascension recta observada en un tiempo ó lugar qualquiera, se inferirá facilmente la paralaxe de altura. 134.

Queda, pues, reducida la cuestion á observar la paralaxe de ascension recta, cuya operacion se hace como sigue. Quando un planeta está en el meridiano, y es nu-

Fig. la su paralaxe en ascension recta (291), se observa la diferencia entre el tiempo del paso del planeta y el de una estrella fija por el hilo de un anteojo; este intervalo de tiempo convertido en grados á razon de 15° por hora ó de $15''$ de grado por $1''$ de hora, dá la diferencia de ascension recta entre la estrella y el planeta (373).

Seis horas despues del paso por el meridiano, se vuelve á observar la misma diferencia de paso, y se infiere la diferencia de ascension recta. Pero la paralaxe disminuye la ascension recta del planeta quando está al poniente, bajándole y haciendo que parezca mas al occidente, siendo así que la paralaxe no causa variacion alguna en la ascencion recta de la estrella; luego la diferencia de las ascensiones rectas no será ya la misma que se hubiere observado en el meridiano, será mayor ó menor todo el valor de la paralaxe de ascension recta.

846 Verdad es que suponemos que el lugar verdadero del planeta se mantenga puntualmente á la misma distancia de la estrella en ambas observaciones, esto es, que no haya mas causa que la paralaxe de la diferencia que se notare entre la primera y segunda observacion, y que el planeta no haya tenido ningun movimiento propio. Es muy facil de corregir el error que de este supuesto se siga; se observará dos dias de seguida al paso del planeta por el meridiano, la diferencia verdadera de ascension recta entre la estrella y el planeta, se hallará quanto varía de un dia para otro, y por consiguiente el incremen-

to

to que en el discurso de 6 horas debiera haberle dado el movimiento propio del planeta, independentemente de las apariencias de la paralaxe. Si la observacion diere una diferencia mayor que la que resulta del cálculo, será efecto de la paralaxe de ascension recta; y se separará este efecto del que ocasiona el movimiento verdadero del planeta. Fig.

847 Para inferir con facilidad la paralaxe orizontal de la paralaxe de ascension recta observada á cierta distancia del meridiano, se hará uso de esta espresion general: Paralaxe orizontal $= \frac{\text{par asc. rec. cos declin.}}{\text{sen ang. hor. cos alt. del polo}}$.

Porque el triángulo ZPm nos dá (III. 713) esta proporcion: sen Zm : sen ZPm :: sen ZP: sen ZmP; pero $Mm = p$. sen Zm (294); luego $\frac{Mm}{p} =$ sen Zm, y $\frac{Mm}{p}$. sen $ZmP =$ sen ZPm. sen ZP. Pero $MA = Mm$. sen ZmP; luego $\frac{MA}{p} =$ sen ZPm. sen ZP ó $MA = p$. sen ang. hor. cos lat. Tambien tenemos $MA = Vu$. cos declin (54) $=$ paral. asc. rect. cos declin. Luego la paralaxe de ascension recta medida en el equador es $= \frac{p\,.\,\text{sen ang. hor. cos lat}}{\text{cos declin.}}$. Luego $p = \frac{\text{par. asc. rect. cos declin.}}{\text{seno ang. hor. cos latit.}}$. Quando se ponga en práctica esta fórmula conviene tener presente que se debe usar la declinacion aparente y el ángulo horario aparente.

848 Quando se ha observado el planeta á distancias iguales antes y despues del meridiano, se saca una diferencia dupla de la paralaxe horaria; y quando las distancias no son iguales, se saca una diferencia que es la suma de dos paralaxes de ascension recta, cada una proporcional al seno de su ángulo horario, conforme lo ma-

Fig. nifiesta la fórmula precedente. En este caso se debe dividir la diferencia hallada entre las observaciones, por la suma de los senos de los ángulos horarios, para sacar la paralaxe orizontal, ó, lo que viene á ser lo propio, se puede dividir la diferencia observada, ó el argumento de la paralaxe, en dos partes que sean entre sí como los senos de los ángulos horarios ó de las distancias al meridiano en las dos observaciones, y no admitir en la fórmula precedente mas que una de estas partes con su ángulo horario, para sacar la paralaxe orizontal.

849 Basta observar un astro 2 horas antes y 2 horas despues de su paso por el meridiano, para hallar en la ascension recta de un planeta una diferencia igual á su máxima paralaxe de ascension recta. Porque las distancias al meridiano son respecto de esta especie de paralaxe lo que las distancias al zenit para las paralaxes de altura; pero como el seno de la distancia al meridiano que corresponde á dos horas de tiempo es la mitad del radio, hay de cada lado del meridiano una paralaxe que es la mitad de la paralaxe máxima de ascension recta.

850 III. Supone este tercer método dos observadores muy distantes uno de otro que observen á un tiempo la altura de un astro en el meridiano. Propondremos
132. el caso mas sencillo, y supondremos un observador en *O*, otro en *D*, distante del primero la cantidad *OD* igual con corta diferencia á un quadrante de la Tierra. Estando el primero en *O* observaría un astro *H* en el orizonte; el se-

segundo en *D* le observaría en su zenit; en este caso el Fig.
ángulo *OHT*, que es la paralaxe orizontal, sería igual al ángulo *HTE*, ó al complemento del arco *OD* que es la distancia de los dos observadores, ó la diferencia de sus latitudes, pues suponemos que estén en un mismo meridiano.

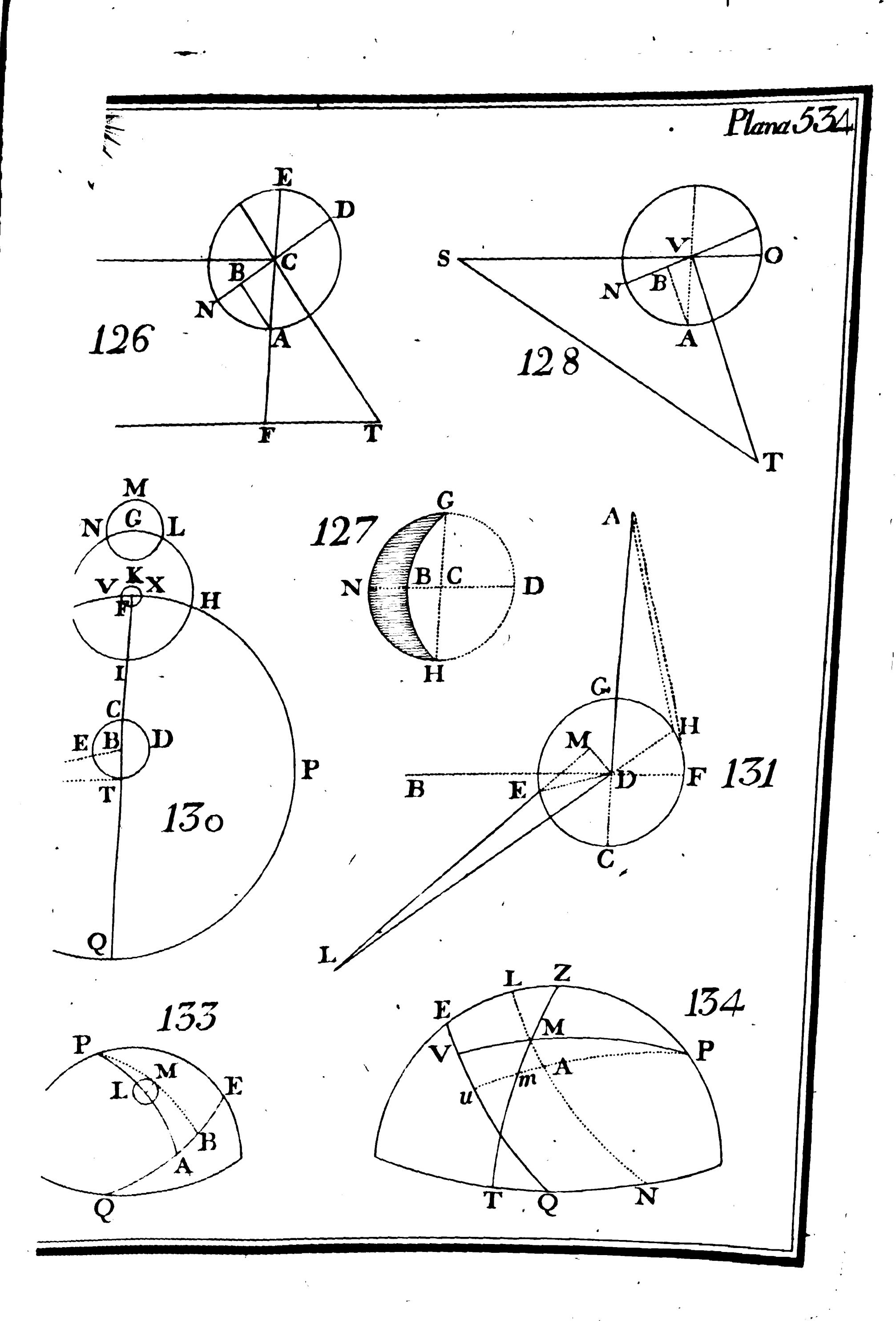
Es imposible que las circunstancias locales proporcionen en la práctica un caso tan sencillo como este; manifestarémos, pues, como se ha de practicar el método quando los dos observadores están á una distancia qualquiera, y ven el astro á qualesquiera alturas.

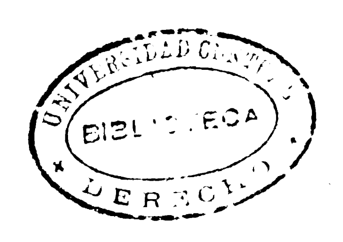
851 Supongamos, como en el año de 1751, un observador *B*, en Berlin, y otro en *C*, en el Cabo de Buena-Esperanza; *L*, la Luna que los dos observadores 135.
observaban á un mismo tiempo en el meridiano (poco importa que la observen en el mismo instante con tal que se sepa quanto hubo de variar la altura meridiana en el intervalo de los dos pasos); *CLT* es la paralaxe de altura en el Cabo donde observaba el Abate la Caille; *BLT* es la paralaxe de altura en Berlin, donde observaba Mr. de la Lande (292), la suma de estas dos paralaxes es el ángulo *CLB*, argumento total de la paralaxe orizontal; lo sería su diferencia, si ambos observadores vieran el astro al medio dia, ó ambos al norte. De estas dos paralaxes de altura, la primera *BLT* es igual á la paralaxe orizontal multiplicada por el coseno de la altura aparente en Berlin, ó por el seno de la distancia aparente al zenit que es el ángulo *LBA* (293); la segunda paralaxe *CLT* es

Fig. igual á la paralaxe orizontal multiplicada por el seno de la distancia *LCD* al zenit del Cabo. Luego la suma *BLC* que es la paralaxe total de los dos observadores es igual á la paralaxe orizontal multiplicada por la suma de los dos senos de las distancias observadas. Luego se sacará la paralaxe orizontal dividiendo el ángulo observado *BLC*, ó el argumento de la paralaxe, por la suma de los senos de las distancias al zenit.

852 Tambien se usó este método para determinar la paralaxe del Sol, ó por mejor decir la de Marte y Venus. El dia 5 de Octubre de 1751 el limbo boreal de Marte parecía á 1′ 25″ 8 debajo del paralelo de la estrella λ de Aquario en el Cabo de Buena-Esperanza, 33° 55′ al medio dia del equador, estando Marte á 25° 0′ *del zenit.* El mismo dia en Stokolmo que está á los 59° 21′ de latitud septentrional, la misma diferencia de declinacion entre el limbo boreal de Marte y la estrella λ de Aquario parecía de 1′ 57″, 7, y estaba Marte á 68° 14′ del zenit; estas dos diferencias de declinacion que deberían ser iguales discrepan una de otra 31″ 9. Si se divide esta diferencia por la suma de los senos de las distancias al *zenit* 0,4226; 0,9287, ó por 1,3513, sacaremos 23″ 6 paralaxe orizontal de Marte.

853 La operacion antecedente supone la Tierra perfectamente esférica; pero quando se trata de la paralaxe de la Luna, se debe llevar en cuenta el aplanamiento de la Tierra. Se deben rebajar entonces algunos minutos de las dos


126
E
D
C
B
N
A
F
T
128
S
V
O
N
B
A
T
M
G
N
L
K
V
X
F
H
I
C
E
B
D
P
T
130
Q
127
G
N
B
C
D
H
A
G
H
M
D
F
131
B
E
C
L
133
P
M
L
E
B
A
Q
134
L
Z
E
M
V
P
A
m
u
T
Q
N


DERECHO

dos distancias al zenit, observadas (suponiendo que el zenit del observador esté entre la Luna y el polo elevado); y multiplicar cada una de ellas por el radio correspondiente de la Tierra antes de practicar la regla que acabamos de sentar. Fig.

La elipse *BECP* representa una mitad del esferoide terrestre; *T*, es el centro; *TP*, es el ege de la Tierra; *E*, el equador; *B* y *C* son los dos observadores que supongo debajo de un mismo meridiano y observando á un tiempo la Luna en *L*; *ZMB*, *zCN* son las perpendiculares á la superficie de la elipse en *B* y *C*; el ángulo *LBZ* es la distancia aparente de la Luna al zenit, para el observador *B*; *LCz* es la distancia aparente para el observador *C*. Se calcularán los ángulos *MBT*, *NCT* que forman las perpendiculares á la superficie de la Tierra en *B* y *C*, con los radios *BT* y *CT* tirados al centro de la Tierra, conforme se verá en la Geografia; se restarán de las distancias al zenit, y quedarán los ángulos *LCD*, *LBA* ó las distancias corregidas, que servirán para lo mismo que han servido antes las distancias al zenit en la Tierra esférica (851). Ya que *TB* : *TL* :: sen *TLB* : sen *TBL* ó *ABL*, tendremos, quando el ángulo *B* fuere recto, $\frac{TB}{TL}$ igual al seno de la paralaxe orizontal en Berlin (289); asimismo $\frac{CT}{TL}$ es el seno de la paralaxe orizontal en el Cabo de Buena-Esperanza ó en el punto *C*. Luego el seno de la suma, ó del ángulo $BLC = \frac{CT}{TL}$ sen $LCD + \frac{TB}{TL}$ sen *LBA* (I. 655), suponiendo el coseno de cada paralaxe igual á la unidad; luego la distancia *TL* $= \frac{CT . \text{sen } LCD + TB . \text{sen } LBA}{\text{sen } BLC}$; y el seno de la paralaxe orizon- 136.

Fig. tal en París, ó en otro lugar qualquiera cuya distancia al centro de la Tierra fuere conocida, será igual á esta distancia ó al radio de la Tierra multiplicado por....... $\frac{\text{sen } BLC}{CT \,.\, \text{sen } LCD + TB \,.\, \text{sen } LBA}$. Mas adelante se determinarán los dos radios de la Tierra *TC* y *TB*.

854 Prevenimos que quando la Luna está en el meridiano, la paralaxe de altura, aun en el eferoide aplanado es cabalmente proporcional al seno de la distancia al zenit *LBZ*, despues de quitarla el valor del ángulo *MBT* ó *ABZ*, esto es, al seno del ángulo *LBA* ó del ángulo *LBT*; solo con considerar el triángulo se viene esto á la vista (293).

855 La paralaxe orizontal de la Luna la han determinado muchísimos Astrónomos por *el método de las máximas latitudes de la Luna*. Segun Mr. de la Lande, la paralaxe máxima de la Luna para París quando la Luna es llena y perigea, es de $61' \, 29''$, y la paralaxe mínima de $53' \, 51''$, siendo la Luna nueva y apogea.

856 No basta para los cálculos astronómicos conocer la paralaxe orizontal, es tambien preciso conocer su efecto en longitud. Daremos, pues, un método, el mas seguro de todos, para determinar la paralaxe en longitud y latitud. Llámase *el Método del Nonagésimo*.

Llamamos *Nonagésimo* el punto de la eclíptica que dista $90°$ de las dos secciones del orizonte y de la eclíptica, ó de los puntos que nacen y se ponen; así, la longitud del Nonagésimo es tres signos menor que la del punto

to ascendiente, ó del punto oriente de la eclíptica, esto es, del punto que está en el orizonte del lado del oriente. Fig. 137.

Sea el meridiano *HZEC*; el orizonte *HOBC*; la eclíptica *ENRTO* tomada en el emisferio oriental; *E*, el punto culminante de la eclíptica, esto es, el punto que pasa por el meridiano, y cuya ascension recta es la del medio del cielo (425). El punto *O* de la eclíptica, que nace en el mismo instante, es el punto oriente ó el *Horóscopo*; tomando el arco *ON* de 90°, el punto *N* es el nonagésimo. Si por el polo *P* de la eclíptica y por el zenit *Z* se tira un círculo *PZNB*, este círculo será á un tiempo círculo de latitud, pues pasa por el polo de la eclíptica, y un vertical, pues pasa por el zenit; será perpendicular á la eclíptica en *N* y al orizonte en *B*; el arco *NB* será la altura del nonagésimo. Pero por ser *NO* un quadrante de círculo y recto el ángulo *B*, el punto *O* es el polo del arco *NB*, y el ángulo *NOB* que tiene por medida el arco *NB* es tambien igual á la altura del nonagésimo. Finalmente el arco *PZ* comprehendido entre el polo y el zenit es tambien igual á la altura del nonagésimo, porque si de los arcos *PN* y *ZB* ambos de 90° se quita la parte comun *ZN*, quedará $PZ = NB$, que es la altura del nonagésimo.

Si el ángulo *OEC* fuese obtuso, el arco *EO* de la eclíptica será tambien mayor que 90°; esto sucede quando el punto *E* está en los signos ascendientes 9, 10 &c. ó la ascension recta del medio del cielo está entre 18 horas, y 24 horas ó 0 horas, y desde 0 horas hasta 6 horas, entonces

Fig. 137. ces el nonagésimo *N* está en el emisferio oriental como en la figura. Pero quando la ascension recta del medio del cielo pasa de *6* horas, y no llega á 18 horas, el ángulo *OEC* es agudo, y el arco *EO* no llega á 90° ; el nonagésimo está en *M* en la parte occidental del cielo y del otro lado del meridiano. Todo esto debe entenderse de los paises que están en el emisferio boreal de la tierra. Si se quisiere una regla mas universal, se reparará que el triángulo *OEC* situado en la parte oriental del emisferio se ha de tomar de modo que su lado *EC* que es la altura del punto culminante, jamás pase de 90.° Mediante esta precaucion, el triángulo *OEC* siempre será obtuso, el arco *OE* mayor que 90°, y el nonagésimo estará al oriente en los signos ascendientes *en general*, esto es, en aquellos donde está el Sol quando vá subiendo, ó acercándose al zenit de un dia para otro.

857 Quando se quiere determinar para un instante dado la longitud del nonagésimo, se busca la ascension recta del medio del cielo (425), ó el punto del equador que está en el meridiano ; despues la longitud del punto *E* de la eclíptica que le corresponde, con su declinacion y el ángulo de la eclíptica con el meridiano (560). Hecho esto, queda averiguada la altura del punto culminante *E* de la eclíptica, igual á la altura conocida del equador, mas ó menos la declinacion hallada.

Así, en el triángulo *EOC* rectángulo en *C*, se conoce la altura *CE* del punto culminante, y el ángulo *CEO* del meridiano con la eclíptica en el mismo punto; se busca-

cará el ángulo *EOC* diciendo : *R* : cos *CE* :: sen *E* : cos *O* (III.701); esto es, *el radio es al coseno de la altura del punto culminante, como el seno del ángulo de la eclíptica con el meridiano es al coseno de la altura del nonagésimo.* Fig.

858 Tenemos despues en el triángulo *OEC* estotra proporcion : *R* : cot *CE* :: cos *E* : cot *OE* (III.699); pero el arco *NE* de la eclíptica comprehendido entre el punto culminante y el nonagésimo es el complemento de *OE*; tendremos, pues, *R*: cot *CE* :: cos *E* : tang *NE*, ó tang *CE* : *R* :: cos *E*: tang *NE*, y quiere decir que *la tangente de la altura del punto culminante es al radio, como el coseno del ángulo que forma la eclíptica con el meridiano es á la tangente de un arco*, que se debe añadir á la longitud del punto culminante *E*, si este punto estuviere en los signos ascendientes tomados en general, y se restará en los signos descendientes para sacar la longitud del nonagésimo *N*. Los signos ascendientes tomados en general son aquellos donde se halla el Sol quando se acerca al zenit, ó su altura meridiana crece de un dia para otro. Así, un pais de la Tierra situado en el emisferio boreal á 10°, tendrá los signos ascendientes desde Capricornio hasta 26° de Aries, y desde Cancer hasta 4° de Virgo.

859 Despues de hallada la longitud del nonagésimo, y la longitud de la Luna se toma su diferencia que es la distancia de la Luna el nonagésimo; esta diferencia añadida á la altura del nonagésimo y á la latitud de la Luna, basta para determinar la paralaxe de la Luna en longitud y latitud.

Va-

Fig. 137. Vamos á demostrar algunas fórmulas muy acomodadas para el intento. Sea L el lugar verdadero de la Luna; S, su lugar aparente en el vertical ZLS; PLR, el círculo de latitud que pasa por el lugar verdadero de la Luna; PST, el que pasa por el lugar aparente; LR es la latitud verdadera; ST, la latitud aparente; y si tomamos $PI = PL$, el arco IS será la paralaxe de latitud; el arco RT de la eclíptica será la paralaxe de longitud.

Si llamamos p la paralaxe orizontal de la Luna, la paralaxe de altura LS será igual á $p . \text{sen}\, ZS$ (294). En el triángulo rectilineo rectángulo ISL tenemos $IL = SL . \text{sen}\, S$; luego la paralaxe de longitud $TR = \frac{p . \text{sen}\, ZS . \text{sen}\, S}{\text{sen}\, PS}$, calculando por lo dicho (53), y tomando PS por PI, porque siendo siempre muy grandes estos arcos, las diferencias de los senos de un grado á otro son muy cortas. En el mismo triángulo tambien tenemos $IS = IL . \cot S$ (20) $= p . \text{sen}\, ZS . \text{sen}\, S . \cot S$. Esta es la paralaxe de latitud; hemos de eliminar el ángulo S en las dos espresiones que acabamos de sacar.

En el triángulo PZS suponemos conocidos dos lados, y el ángulo que forman, es á saber PZ, PS, y el ángulo P, esto es, la altura del nonagésimo, la distancia aparente de la Luna al polo de la eclíptica, y su distancia aparente al nonagésimo. Tendremos, pues (III. 775), $\text{tang}\, S = \frac{\text{sen}\, ZPS}{\cot PZ . \text{sen}\, PS - \cos P . \cos PS}$, ó $\cot S = \frac{\text{sen}\, PS . \cot PZ - \cos PS . \cos P}{\text{sen}\, P}$, multiplicando arriba y abajo por $\text{tang}\, PZ$, sacaremos $\cot S = \frac{\text{sen}\, PS - \cos P . \cos PS . \text{tang}\, PZ}{\text{sen}\, P . \text{tang}\, PZ}$; este valor multiplicado por p. sen

sen ZS. sen S, dará el de IS paralaxe de latitud $=$ Fig. $\frac{p.\text{sen }PS.\text{sen }ZS.\text{sen }S - p.\cos P.\cos PS.\text{sen }ZS.\text{sen }S.\text{tang }PZ}{\text{sen }P.\text{tang }PZ}$; pero sen $ZS = \frac{\text{sen }PZ.\text{sen }P}{\text{sen }S}$ (III. 763). Substituyendo este valor en la paralaxe de latitud IS, sacaremos $\frac{p.\text{sen }PS.\text{sen }S.\text{sen }PZ.\text{sen }P}{\text{sen }P.\text{tang }PZ.\text{sen }S} - \frac{p.\cos P.\cos PS.\text{sen }S.\text{tang }PZ.\text{sen }PZ.\text{sen }P}{\text{sen }P.\text{tang }PZ.\text{sen }S}$; borrando todos los términos que se destruyen, la fórmula se reducirá á $\frac{p.\text{sen }PS.\text{sen }PZ}{\text{tang }PZ} - p.\cos P.\cos PS.\text{sen }PZ$; y substituyendo cos PZ en lugar de $\frac{\text{sen }PZ}{\text{tang }PZ}$, se reduce á p. sen PS. cos $PZ - p$. cos P. cos PS. sen PZ; pero tenemos cos $PZ = \frac{\text{sen }PZ}{\text{tang }PZ}$, y sen $PS =$ tang PS. cos PS; se le podrá, pues, dar esta forma, la paralaxe de latitud $= p.\cos PS.\text{sen }PZ \left(\frac{\text{tang }PS}{\text{tang }PZ} - \cos P\right)$.

860 Para sacar la paralaxe de longitud TR, volveremos á su valor, $TR = \frac{p.\text{sen }ZS.\text{sen }S}{\text{sen }PS}$ hallado antes, y substituyendo en lugar de sen ZS su valor $\frac{\text{sen }PZ.\text{sen }P}{\text{sen }S}$ (III. 713), será la paralaxe de longitud $\frac{p.\text{sen }PZ.\text{sen }P}{\text{sen }PS}$.

861 En lugar de las letras podremos sustituir las cosas que representan; por egemplo, cos PS es lo mismo que el seno de la latitud aparente ST; sen PZ es el seno de la altura del nonagésimo (856); el ángulo P, ó NPT, es la distancia aparente de la Luna al nonagésimo, pues la medida de este ángulo es el arco TN de la eclíptica comprehendido entre la Luna y el nonagésimo. Por consiguiente las espresiones precedentes de TR é IS se transformarán en estotras: par.longit. $= \frac{\text{par.oriz. sen dist. al non. sen alt.non.}}{\text{cos lat.}}$; par. lat. $= \left(\frac{\text{cotang lat.}}{\text{tang alt. non.}} - \text{cos dist. al nonag.}\right)$ (par.oriz. sen alt. non. sen lat.)

Si

Fig. 862 Si llamamos p la paralaxe orizontal; l, la latitud aparente; d, la distancia aparente de la Luna al nonagésimo; h, la altura del nonagésimo; la paralaxe de longitud será $= \frac{p . \text{sen}\, d . \text{sen}\, h}{\cos l}$, y la paralaxe de latitud $= p . \text{sen}\, h . \text{sen}\, l \left(\frac{\cot . l}{\text{tang}\, h} - \cos d\right)$.

863 Esta espresion se reduce á estotra todavía mas acomodada para la práctica, $p . \cos h . \cos l - p . \text{sen}\, l . \text{sen}\, h . \cos d$, porque $\text{sen}\, l . \cot l = \cos l$ y $\frac{\text{sen}\, h}{\text{tang}\, h} = \cos h$. Decimos que es mas acomodada, porque en el cálculo basta, si se quiere, la primera parte $p . \cos h . \cos l$, y aun $p . \cos h$, porque suponiendo l de $5°\frac{3}{4}$, no puede resultar de este supuesto mas que un error de $19''$, aun quando la paralaxe de la Luna es de $61'\frac{1}{2}$,

864 Por consiguiente la fórmula que espresa la paralaxe de latitud se compone de dos partes: la primera que es $p . \cos h . \cos l$, no pende de la distancia de la Luna al nonagésimo, y es la parte principal de la paralaxe de latitud. En el cálculo de los eclipses de Sol, por ser estremadamente pequeña la latitud de la Luna, su coseno es sensiblemente igual al radio ó á la unidad. Es, pues, la primera parte de la paralaxe de latitud $p . \cos h$. Para sacar cabal esta primera parte de la paralaxe de latitud, en todos los casos, *se debe multiplicar la paralaxe orizontal de la Luna por el coseno de la altura del nonagésimo, y por el coseno de la latitud.*

865 La segunda parte de la paralaxe de latitud es $p . \text{sen}\, l . \text{sen}\, h . \cos d$; se saca *multiplicando la paralaxe orizontal por el seno de la latitud de la Luna, el seno de la altu-*

tu-

tura del nonagésimo, y el coseno de la distancia aparente de la Fig.
Luna al nonagésimo. Esta segunda parte siempre es muy pequeña, porque el seno de la latitud de la Luna que es uno de sus factores, es apenas una décima de la unidad, aun quando la latitud está en su *máximo*, y llega á ser como nula en los eclipses de Sol; en cuya ocasion la latitud jamás pasa de medio grado, y sen l no pasa de una centésima. En eclipses de estrellas, si fuese de 6° la latitud de la Luna, y estuviese en el nonagésimo á $58\frac{1}{2}$ grados de altura, siendo de 1° la paralaxe orizontal, esta segunda parte sería de $5' 21''$, y no se podría despreciar.

866 Todavia se puede simplificar mas esta segunda parte de la paralaxe de latitud, considerando que es igual á la paralaxe de longitud hallada antes (862), multiplicada por el seno de la latitud de la Luna, y dividida por la tangente de la distancia al nonagésimo.

Y de hecho, si la paralaxe de longitud $= \frac{p.\,\text{sen}\,d.\,\text{sen}\,h}{\cos l}$ ó simplemente $p.\,\text{sen}\,d.\,\text{sen}\,h$ en los eclipses, tendremos $p = \frac{\text{par. longit.}}{\text{sen}\,d.\,\text{sen}\,h}$, substituyendo este valor de p en la espresion $p.\,\text{sen}\,h.\,\text{sen}\,l.\cos d$, será $= \frac{\text{par. longit. sen}\,l.\cos d}{\text{sen}\,d}$; pero $\frac{\cos d}{\text{sen}\,d} = \cot d$; luego tenemos par. longit. sen l. cot d, para la segunda parte de la paralaxe de latitud en los eclipses de Sol.

867 Para casos distintos de los eclipses, tenemos $p = \frac{\text{par. longit.}\cos l}{\text{sen}\,d.\,\text{sen}\,h}$; luego la segunda parte p de la paralaxe $= \text{sen}\,h.\,\text{sen}\,l.\cos d = \frac{\text{par. long.}\cos l.\,\text{sen}\,l.\cos d}{\text{sen}\,d} =$ par. long. sen l. cot d. cos l segunda parte de la paralaxe en latitud fuera de los eclipses. Esta cantidad se debe restar

de

Fig. de la primera parte $p.\cos h.\cos l$ hallada antes (864), excepto el caso en que la distancia aparente de la Luna al nonagésimo, y su distancia aparente al polo elevado de la eclíptica son de diferente especie, esto es, la una aguda y la otra obtusa. Porque entonces la segunda parte de la fórmula es aditiva, pues sen l muda de signo en siendo meridional la latitud de la Luna (suponiendo el observador en nuestras regiones septentrionales), y cos d muda de signo quando la distancia al nonagésimo es de 90.°

Los casos en que la Luna estuviese entre el polo y el zenit no pueden dar que hacer; porque el cálculo de la fórmula nos encaminaría á restar una cantidad mayor de otra menor, y nos daría una paralaxe negativa, esto mismo nos avisaría que la Luna está entre el zenit y el polo elevado, ó que la paralaxe disminuye la distancia al polo elevado, en vez de aumentarla, conforme se suponia (859). Bien se percibe que esta segunda parte se debe restar en general de la primera, quando la Luna está del lado del polo elevado, porque la latitud boreal de la Luna en nuestras regiones boreales arrima la Luna al zenit, y por lo mismo disminuye su paralaxe, y así el término que espresa casi todo el efecto de la latitud se debe restar en este caso. Si hay una excepcion para el caso en que la distancia al nonagésimo pasa de 90°, es porque entonces el vertical forma un ángulo mayor con la eclíptica, y la Luna está tan baja, que la diminucion de paralaxe que proviene de la latitud no iguala el aumento que proviene del ángulo. Aun en el punto mis-

mismo que dista $90°$ del nonagésimo, la latitud apenas causa alguna variacion en la paralaxe de latitud, porque si aumenta la altura, disminuye el ángulo del vertical con la eclíptica.

868 Esa segunda parte de la paralaxe en latitud incluye $\cos l$, esto quiere decir, que es multiplicada por el coseno de la latitud aparente; y es preciso tenerlo presente en los eclipses de estrellas fijas por la Luna, porque como la latitud puede llegar á $6°$, se podria padecer en algunos casos una equivocacion de $20''$ en la paralaxe, suponiendo el coseno de la latitud igual al radio.

869 El dia 7 de Abril de 1749 observó Mr. de la Lande la inmersion de Antares á $1^h\ 1'\ 20''$ de la mañana, tiempo verdadero en París; se pregunta ¿quál era en aquel instante la paralaxe de longitud y de latitud de la Luna? Suponemos que se ha calculado de antemano para el mismo tiempo el lugar del Sol y el de la Luna por las tablas; y que se conozca la altura del polo y la oblicuidad de la eclíptica. Los números de que hizo uso el citado Astrónomo son los siguientes.

Lugar del Sol por las tablas de Halley...........	0ˢ	17°	19′	10″
Lugar de la Luna por las tablas de Halley..........	8	5	26	2
Latitud austral de la Luna............................		3	47	20
Oblic. que se le supuso entonces á la eclíptica..		23	28	23
Altura del polo del lugar del observador.......		48	50	10
Altura del equador....................................		41	9	50

Ascension recta del Sol calculada (392)		15	57	44
El tiempo verdadero $13^h\ 1'\ 20''$ reducido á grados		195	20	0
La ascension del medio del cielo (425).		211	17	44
O restando de ella 180 grados		31	17	44
La declinacion meridional que corresponde á dicha ascension recta (560).		12	42	42
El ángulo de la eclíptica con el meridiano que corresponde á la misma ascension recta $31^\circ\ 17'\ 44''$ (560)		70	6	4
La long. que corresponde á la misma ascension recta (560), ó la long. del punto de la eclíptica que está en el meridiano (rebajando 180°)		33	32	$3\frac{1}{2}$
O añadiendo 180° que se habian rebajado de la ascension recta	7	3	32	$3\frac{1}{2}$
La altura del punto culmin. de la eclípt. ó la diferencia entre su declinac. $12^\circ\ 42'\ 42''$ y la altura del equador $41^\circ\ 9'\ 50''$		28	27	8

Se tomaría su suma si la declinacion del punto *E* estuviera ácia el polo elevado.

870 El radio es al seno de $70^\circ\ 6'\ 4''$ que es el
137. ángulo *CEO*, como el coseno de la altura del punto culminante $28^\circ\ 27'\ 8''$ es al coseno de la altura del nonagésimo ó del ángulo *NOB* (857), que sale de $34^\circ\ 14'\ 11''$. Se buscará tambien el logaritmo de la tangente de *CE*. Despues se hará esta proporcion: la tangente de la al-

altura *CE* 28° 27′ 8″ es al radio, como el coseno del ángulo *E* = 70° 6′ 4″ es á la tangente del arco *NE* de la eclíptica, comprehendido entre el nonagésimo y el meridiano, este arco se hallará de 32° 8′ 1″; restándole de la longitud del punto culminante 7ˢ 3° 32′ 3″, por estar la Luna en los signos descendientes (858), dará la longitud del nonagésimo 6ˢ 1° 24′ 2.″ Esta es la disposicion del cálculo.

T. longit.	17°	19′	10″	9,4939285
Cos. oblic. eclípt.	23	28	23	9,9624865
Tang. asc. rect.	15	57	44	9,4564150
T. verdadera en grad.	195	20	0	
Suma	211	17	44	réstense 180°
Sen. asc. rect.	31	17	44	9,7155461
Tang. oblic.	23	28	23	9,6377431
Tang. declin.	12	42	42	9,3532892
Alt. equad.	41	9	50	
Alt. *CE*	28	27	8	, ó del p.to culm.
Coseno	31	17	44	9,9317116
Seno	23	28	23	9,6002296
Cos. áng. *E*	70	6	4	9,5319412
Cotang. asc.	31	17	44	10,2161655
Cos. oblic. eclíp.	....			9,9624865
Cot. long. *E*	33	32	3	10,1786520

Sen *E*..................................	70	6	4	9,9732640
Cos. alt. *CE*.........................	28	27	8	9,9440950
Cos. alt. nonag.	34	14	11	9,9173590
Cos *E*..................................	70	6	4	9,5319412
Rest. tang. *CE*.	28	27	8	9,7339002
Tang. *NE*........................	32	8	1	9,7980410
ó..	1^s	2^o	$8'$	$1''$
Rést. de la long. del p.to culm. *E*.	7	3	32	3
Queda la long. del non. *N*.......	6	1	24	2

871 Para sacar la distancia de la Luna al nonagésimo, se debe tomar la diferencia entre la longitud de la Luna y la del nonagésimo, restando la menor de la mayor. Pero si la diferencia pasare de 6 signos, se restará la mayor de la menor añadiéndola á esta 12 signos, con esto la diferencia que se busca siempre será menor que 6 signos, y la Luna estará al oriente del nonagésimo, si se hubiere restado el nonagésimo; la Luna será occidental, si se hubiere restado su longitud de la del nonagésimo, sea que hayan servido estas longitudes solas, sea que se le hayan añadido 12 signos á una de ellas. En nuestro egemplo se restan $6^s\ 1^o\ 24'\ 2''$ de $8^s\ 5^o\ 26'\ 2''$, quedan $64^o\ 2'$ para la distancia de la Luna al nonagésimo, la Luna es oriental.

872 Despues de hallada la altura del nonagésimo y su distancia á la Luna, vamos á buscar las paralaxes de longi-

gitud y latitud por las fórmulas de antes (864 y sig.). Fig.

Log. paral. oriz. p, 57′ 16″ ó 3436″	3,5360532
Log. sen. de la alt. del nonag. b,	9,7502063
Log. sen. dist. de la Luna al nonag. 64° 2′	9,9537833
Log. de p . sen b . sen d,	3,2400428
Réstese el log. del cos. de la latitud verdadera 3° 47′ 20″,	9,9990497
Y queda el log. de 29′ 2″ paralaxe de long. con corta diferencia,	3,2409931

Sumando esta paralaxe con la distancia verdadera de la Luna al nonagésimo 64° 2′, se sacará la distancia aparente 64° 31′ 2″ que servirá en el cálculo del número siguiente.

Log. de la paral. oriz. p, 57′ 16″	3,5360532
Log. cos. de la alt. del nonag.	9,9173603
Log. de 47′ 21″, paral. de lat. con corta diferencia,	3,4534135

Se sumará esta paralaxe con la latitud verdadera 3° 47′ 20″, porque la latitud de la Luna está opuesta al polo elevado de la eclíptica, y saldrá la latitud aparente 4° 34′ 41″ de la qual se debe hacer uso en el cálculo siguiente para proceder con mas exactitud.

Fig.

873 Log. de la par.or. ó de *p*, 3436″ 3,5360532
Log. sen *b* alt. del nonag. 34° 14′ 11″ 9,7502063
Log. sen *d* ó distancia aparente de la Luna
al nonag. 64° 31′ 2″ 9,9555505

Log. *p* . sen *b* . sen *d*, 3,2418100
Réstese el log. cos. lat. ap. *l* 4° 34′ 41″ 9,9986121
Queda el log. de la paral. de long.
mas exacta 1750″ 4, ó 29′ 10″ 4, 3,2431979

Estos mismos números servirán para la paralaxe en latitud.

Log. *p*,	3,5360532	Log. *p*,	3,5360532
Log. cos *b*,	9,9173603	L. sen lat. ap.	8,9020962
L. cos lat. ap.	9,9986121	Log. sen *b*,	9,7502063
		L. cos dis. ap. *d*	9,6337106
L. 2831″, 6..	3,4520256	Log. 66″, 4,	1,8220663
Esta es la primera parte de la paralaxe en latitud (864).		Esta es la segunda parte.	

Despues de sumadas una con otra estas dos partes de la fórmula, porque sen *l* y cos *d* son de una misma especie (867), se sacará con exactitud la paralaxe total en latitud 2898″ ó 48′ 18.″

874 Para sacar la longitud aparente de la Luna, se añade la paralaxe de longitud á la longitud verdadera, si la Luna es oriental, ó si se ha restado el nonagésimo; la paralaxe es sustractiva, si se ha restado el lugar de la Luna de la longitud del nonagésimo.

Equa-

Fig.

Equacion de la Paralaxe en el esferoide aplanado.

875 Ya hemos insinuado, y lo probaremos de propósito en los elementos de Geografia, que la Tierra es un esferoide aplanado ácia los polos, siendo su aplanamiento como de $\frac{1}{230}$, de donde se sigue que los diferentes puntos de la superficie de la Tierra no están á la misma distancia de su centro, y que la paralaxe orizontal de la Luna que pende de la distancia que hay desde el centro de la Tierra á la superficie, no será una misma en dichos puntos.

876 La elipse *POE* representa un meridiano terrestre; *P*, el polo elevado; *O*, el lugar del observador; *ON*, la vertical ó la perpendicular al orizonte y á la superficie de la Tierra en *O*; *CNH*, la meridiana orizontal, ó la comun seccion del meridiano con el orizonte; *CON*, el ángulo de la vertical con el radio *CO*, que en París es de $15'$ á $19'$, y le llamaremos *a*. La perpendicular *ON* es sensiblemente igual con el radio *CO*, por razon de ser muy pequeño el ángulo *CON*; la paralaxe cuya base fuese *ON* sería una cienmilésima parte menor que la paralaxe orizontal, cuya base es *CO*; pero aquí se puede despreciar esta diferencia, que no llega á $\frac{1}{30}$ de segundo, porque el coseno de un ángulo de $15'$ no discrepa del radio sino 0,0000096, que en un grado no pasa de $\frac{1}{30}$ de segundo. Si el observador *O* estuviera en *N*, vería la Luna en el mismo vertical donde la vé desde el punto *O*, y 138.

Fig. en el mismo punto de azimut sobre el orizonte; pero este azimut donde la Luna parece, vista desde el punto *O* ó el punto *N*, quando la Luna no está en el meridiano, es distinto de aquel donde parecería, si se la observára desde el centro *C* de la Tierra; los radios tirados desde el punto *C* y el punto *N* hasta la Luna, forman entonces un ángulo que llamaremos *Paralaxe de Azimut*. Si el radio dirigido ácia la Luna fuere perpendicular á *CN*, esta linea *CN* será la subtensa ó la medida de la paralaxe de azimut; porque en los arcos muy pequeños los senos y las tangentes no discrepan sensiblemente de los arcos; y si llamamos p la paralaxe orizontal que corresponde al radio *CO* ú *ON*, tendremos 1 ó *CO* : sen a ó *CN* :: p : paralaxe de azimut. Por consiguiente esta paralaxe que corresponde á *CN* será $= p$. sen a, estando la Luna en el orizonte y teniendo 90° de azimut, esto es, estando en el primer vertical.

877 Si la Luna se aparta ácia el norte y su azi-
139. mut contado desde el medio dia pasa de 90°, el ángulo cuya base es *CN*, menguará. Sea *CN* la misma linea que antes, trazada separadamente, y que coge orizontalmente desde el medio dia al norte desde el centro de la Tierra hasta la vertical; diríjase el radio *CMR* ácia el punto del orizonte al qual la Luna corresponde, y que señala el azimut de la Luna, igual al ángulo *NCM*, que llamaremos z; la perpendicular *NM* bajada desde el punto *N* á *CR* será la medida de la paralaxe de azimut, en lugar de *CN*. Porque,

que, lo mismo es, por lo que toca á esta paralaxe, que se mire la Luna desde el punto C ó desde el punto M, estando ambos puntos en un mismo vertical, y por otra parte es mejor en orden á la medida de esta paralaxe considerar la Luna como vista desde el punto M. Pero $MN = CN \cdot \text{sen}\, NCM$, ó $CN \cdot \text{sen}\, z$; la paralaxe que corresponde á CN es $p \cdot \text{sen}\, a$; luego la que corresponde á MN es $p \cdot \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, z$; este es el valor general de la paralaxe de azimut, estando la Luna en el orizonte, con un azimut igual á z. Fig.

878 Mas adelante se verá que la paralaxe de azimut de que se hace uso en el cálculo de los eclipses, se ha de medir en un arco de círculo máximo, tirado desde el centro de la Luna, paralelamente al orizonte ó perpendicularmente al vertical; este arco pequeño no varía, sea la que fuere la altura de la Luna, porque en todos los casos le forma el concurso de las lineas que ambas son tiradas desde los puntos M y N á la Luna, ó en el plano del orizonte, ó en un mismo plano cuya parte NM es orizontal, y que van á juntarse en la Luna. Por consiguiente la paralaxe de azimut para una altura qualquiera de la Luna será $p \cdot \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, z$.

879 Esta paralaxe de azimut ocasiona una leve variacion en la paralaxe de altura. Con efecto, si el observador estuviera en N, la medida de la paralaxe de altura sería NO, y sería $p \cdot \cos h$ por la regla comun. Pero la altura verdadera vista desde el centro C de la Tierra es algo me- 138.

Fig. menor, si la Luna está al medio dia del primer vertical; y algo mayor si la Luna está al norte ó del lado del polo elevado, pues el radio tirado desde el punto *C*, no tiene la misma inclinacion que el radio tirado desde el punto *N*; luego se le debe hacer una correccion á la paralaxe de altura determinada por la regla comun.

139. Sea *L* la Luna fuera del meridiano; *CML*, el plano del vertical en el qual está la Luna, de modo que el ángulo *LCM* sea la altura de la Luna vista desde el centro de la Tierra, estando á un tiempo la linea *CM* en el plano del orizonte, y en el plano del vertical de la Luna; sea tambien el arco pequeño *NM* perpendicular á *CM*. La altura de la Luna vista desde el centro *C* de la Tierra es menor que la altura vista desde el punto *N* ó el punto *M*, la cantidad del ángulo *CLM*; porque como el arco pequeño *NM* es perpendicular á *CM*, lo es tambien á *LM*, porque es indispensablemente perpendicular al plano del vertical *LMC*, y á todas las lineas tiradas al punto *M* de dicho plano. Por consiguiente por ser la linea *NM* como infinitamente pequeña respecto de la gran distancia *LM*, las lineas *LM* y *LN* son sensiblemente iguales. Está, pues, colocado el punto *M* del mismo modo y á la misma distancia de la Luna *L*, que el punto *N*; luego la altura de la Luna vista desde el punto *N* ó vista desde el punto *M* es sensiblemente una misma. Pero la altura de la Luna vista desde el punto *M*, que es el ángulo *LMR*, es mayor que la altura vista desde el punto *C*, esto es, que

que el ángulo *LCM*, la cantidad del ángulo *CLM*, porque en el triángulo *CLM*, el ángulo *LMR* = *LCM* + *CLM* (I. 394): luego la altura de la Luna vista desde el punto *C* es menor que la altura vista desde el punto *N*, la cantidad *CLM*. Fig.

880 Quando la Luna está fuera del meridiano, el ángulo *CLM* es menor que quando la Luna está en el meridiano, en razon del coseno del azimut al radio.

Porque quando la Luna está en el meridiano (en el supuesto de que su altura y su distancia sean las mismas que en el caso antecedente), el punto *M* cae en *N*, el ángulo *LCN* es la altura de la Luna; porque es preciso figurarse el *vértice L* del triángulo *CLM* levantado *perpendicularmente* al plano de la figura. Si en ambos casos se considera el valor del ángulo *CLM*, se echará de ver que el ángulo *CLM* tiene por base la linea *CM*, quando la Luna está fuera del meridiano, y que en el meridiano tiene por base la linea *CN*. Como por otra parte todo lo demas es igual, sea la distancia *CL*, sea la inclinacion del radio *CL* á la base *CN* ó *CM*, y las lineas *CM* y *CN* son estremadamente pequeñas, los angulillos serán entre sí como sus bases *CN* y *CM*. Pero en el triángulo *CMN* rectángulo en *N*, *CN* es á *CM* como el radio es al coseno del ángulo *NCM* que es el azimut de la Luna; luego la diferencia *CLM* entre las alturas de la Luna vistas desde el punto *N* y desde el punto *C*, quando la Luna está fuera del meridiano, es á la misma diferencia quando la Luna está en

el

Fig. el meridiano, á igual altura, como el coseno del azimut es al radio.

881 El ángulo *MLC*, en el caso de ser el mayor que pueda y de tener por base toda la linea *CN*, sería igual á p. sen a (876); porque entonces sería la paralaxe de azimut. Por consiguiente si tuviese por base y por medida el arco pequeño *CM*, con llamar z el azimut *NCM*, tendríamos esta proporcion $1 : \cos z :: p . \text{sen}\, a : CLM$; luego el ángulo *CLM* sería igual á $p . \text{sen}\, a . \cos z$, en el caso de ser *CL* perpendicular á *CM*. Pero por causa de la oblicuidad de la linea *CL* y del ángulo *LCR* sobre la base *CM*, que disminuye el ángulo *CLM*, su medida no es mas que *MS* que es á *MC*, como el seno de la altura *MCS* es al radio, ó como sen b : 1; luego el ángulo *CLM* es igual á $p . \text{sen}\, a . \cos z . \text{sen}\, b$, equacion de la paralaxe de altura en el esferoide aplanado.

Esta correccion es aditiva á la paralaxe calculada para el punto *N*, quando la Luna está entre el primer vertical y el polo elevado; en todos los demas casos, se la resta de la paralaxe calculada por el método ordinario, y queda determinada la verdadera paralaxe de altura en el esferoide aplanado.

138. 882 Quando se calcula la paralaxe de altura por la fórmula $p . \cos b$ (294), se supone el centro de la Tierra en *N* sobre la vertical *ON*, y se halla la diferencia entre el lugar visto desde el punto *O* y el lugar visto desde el punto *N*, con la misma paralaxe ori-

orizontal, que tiene por base $ON = OC$, así en la Tierra esférica, como en el esferoide. Pero como es preciso reducir al centro C el lugar de la Luna, es indispensable restar de la paralaxe $p \,.\, \cos b$ la correccion $p \,.\, \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \,.\, \cos z$, que es aditiva quando el azimut contado desde el punto del medio dia ó del punto opuesto al polo elevado pasa de 90°. Fig.

Hemos, pues, conseguido en la Tierra aplanada igualmente que en la Tierra esférica, reducir al centro C de la Tierra el lugar visto desde el punto O, mediante una leve alteracion de altura y azimut; veamos como se puede hacer la misma reduccion mediante una leve alteracion en la declinacion sola, ó en la longitud y la latitud.

883 El método en el qual se hace uso de las paralaxes de longitud y latitud (859) por medio del nonagésimo, requiere una correccion por causa del aplanamiento de la Tierra, que vamos á determinar.

Si prolongamos mas abajo del orizonte la normal ZON, 138.
perpendicular á la superficie de la Tierra en el punto O, donde está el observador, irá á cortar en K el ege de la Tierra $PCKM$; por consiguiente un observador puesto en K vería la Luna en el mismo círculo horario, á la misma distancia del meridiano, y á la misma ascension recta que si estuviera en C, porque los puntos C y K están colocados sobre el ege de la Tierra y sobre el plano de todos los círculos de declinacion que se cortan en la comun seccion PCM; por lo mismo parecerá que la Luna no muda el plano de su círcu-

Fig. culo horario, ni su ascension recta, quando pasare el ob-
138. servador de *C* á *K*.

Se usa, pues, primero la paralaxe que corresponde á la linea *OK*, para reducir al punto *K* el lugar visto desde la superficie de la Tierra; y como los puntos *O* y *K* están en un mismo vertical y en la linea tirada desde el zenit, basta para esto la regla que sirve para la Tierra esférica ó la fórmula *p*. cos *b* (294), tomando solamente una paralaxe que corresponda al radío *OK*, en lugar de la que correspondia á *ON*, habra seguridad de que no hay error ninguno en la paralaxe de ascension rectà calculada de este modo. Toda la diferencia que el aplanamiento ocasionare consistirá en la paralaxe de declinacion, de la qual vamos á tratar, siempre en el supuesto de que la paralaxe orizontal que sirviere, convenga al intervalo *OK*, y no al radio *OC* ú *ON*, que nos sirvió en el método precedente.

884 El observador supuesto en *K*, y el que estuviere en el centro *C* de la Tierra, no ven la Luna á una misma distancia del equador y del polo: la distancia al polo vista desde el centro *C* es el ángulo *LCP*, pero vista desde el punto hypotético *K*, es el ángulo *LKP*, menor que *LCP*. La diferencia de estas dos distancias al polo es el ángulo *CLK*; es, pues, este ángulo, que valuaremos dentro de poco (888), la correccion que requiere el aplanamiento de la Tierra, y por ser el ángulo esterior *PCL* igual á los dos interiores *PKL* y *CLK*, se debe añadir es-

esta pequeña equacion CLK á la distancia de la Luna al polo P hallada para el punto K, si se la quiere reducir al centro C y determinar la verdadera distancia de la Luna al polo, que es el ángulo LCP. Fig. 138.

Síguese de aquí que quando la Luna estuviere del lado del polo elevado, ó fuere septentrional su declinacion, estando el observador en los paises septentrionales, ó meridional, y observada en los paises meridionales, la equacion del aplanamiento será sustractiva de la declinacion vista desde el punto K, para sacar la declinacion vista desde el centro C de la Tierra. Quando la Luna estuviese respecto del equador, del lado del polo bajo, á la declinacion reducida al punto K se la añadirá la equacion del aplanamiento, para inferir la verdadera declinacion vista desde el centro de la Tierra. Pero en ambos casos siempre se deberá restar de la paralaxe de declinacion la misma equacion CLK, para sacar la paralaxe de declinacion respecto del centro de la Tierra, á no ser que esté la Luna entre el zenit y el polo elevado.

885 Por consiguiente para determinar en el esferoíde la situacion de la Luna respecto del centro C de la Tierra, se egecutan dos reducciones, la una desde O á K, y la otra de K á C. La primera de O á K nos proporciona la comodidad de no suponer mas que las reglas ordinarias, es á saber, que la paralaxe de altura es como el coseno de la altura aparente. La segunda tiene la circunstancia de ser muy leve, y de reducirse tambien á una re-

Fig. regla muy simple (888) por lo que es muy facil de usar.

La primera de estas paralaxes, que es la mayor, reduce el lugar visto desde el punto *O* al que se observa desde el punto *K*, situado perpendicularmente debajo de *O*. Esta reduccion no supone mas que la paralaxe en la esfera, porque el ángulo *OLK* es proporcional al seno de la distancia al zenit contándola desde la linea *ZOK*; tomando, pues, el punto *K* por centro, y haciendo uso de la paralaxe orizontal que corresponde á la longitud *OK*, se sacará por la regla comun (294) la paralaxe de altura *OLK*, que dará la altura vista desde el punto *K*, luego que esté determinada la altura vista desde el punto *O*. Tambien se determinarán la longitud y latitud vistas desde el punto *K* por medio de las que se hubieren observado en la superficie de la Tierra, por las fórmulas de antes (862).

Despues se han de sacar estas mismas cantidades vistas desde el punto *C*, porque hemos de referir al centro de la Tierra todos los movimientos celestes para quitarles sus desigualdades. Como el punto *K* no es uno mismo en distintas latitudes, tambien variará la cantidad *CK*, y la cantidad *OK*. Veamos como se determinan.

886 La paralaxe que conviene á *OK* siempre será mayor que la paralaxe orizontal cuya medida es *OC*; en París la diferencia es de unos 17″, que se han de añadir á la paralaxe orizontal de París para sacar la que corres-

pon-

ponde al centro K, ó á la distancia OK, y poder operar Fig. por las reglas comunes de las paralaxes esféricas. En las tablas de la Luna se hallará la de las cantidades correspondientes á NK, y en los elementos de Geografia daremos una tabla del radío CO de la Tierra para cada latitud, y del ángulo $COK = a$; de lo qual se pueden inferir los lados CN y NK.

887 Este exceso NK de la nueva paralaxe se puede 138. calcular, con tal que se conozca el ángulo COK del radío con la vertical (898). En el triángulo NCK, tenemos: el radío es á la tangente del ángulo NCK, como CN es á NK; luego $NK = CN$ tang. NCK. Pero $CN = p$. sen a (876), y NCK es igual á la latitud del lugar O, porque está opuesto en el vértice al ángulo de la altura del polo P, y es el complemento del ángulo OKP que forma la linea vertical con el ege de la Tierra; luego $NK = p$. sen a. tang lat. En París donde el valor medío de p es de $57' 40''$, la cantidad p. sen $15'$ tang $48° 50' = 17'' 3$, que se habran de añadir á la paralaxe media para París, para sacar la paralaxe sobre OK (883).

888 Para determinar la equacion de la declinacion ó el ángulo CLK, se bajará al rayo LK de la Luna la perpendicular CV la qual, por razon de su pequeñez, será la medida del ángulo CLK; este ángulo señala la diferencia entre las distancias al polo LCP, LKC, ó entre las declinaciones vistas desde los puntos C y K. La perpen-

Fig. dicular CV será igual á CK. cos declin; porque en el triángulo rectilineo CKV, rectángulo en V, tenemos: CV es á CK, como el seno de CKV es al radio; pero CKV ó PKL es la verdadera distancia de la Luna al polo, y su seno es el coseno de la verdadera declinacion; luego $CV = CK$. cos declinacion. Por lo que mira á CK, se sacará su valor por medio de esta equacion $CN = p$. sen a (876); porque en el triángulo CKN tenemos: CK es á CN, como el radio es al seno del ángulo CKN, que es el complemento de la latitud del punto O; luego $CK = \frac{CN}{\text{cos lat.}}$; pero $CN = p$. sen a, luego $CK = \frac{p \cdot \text{sen } a}{\text{cos lat.}}$; substituyendo, pues, este valor de CK en el de $CV = CK$. cos declin, sacaremos el valor de CV y del ángulo CLK, $\frac{p \cdot \text{sen } a \cdot \text{cos declin.}}{\text{cos alt. polo}}$. Esta es la equacion de la declinacion.

889 Supongamos como en Paris el ángulo a de 15′, y la latitud geográfica de 48° 50′; supongamos tambien la paralaxe orizontal media de 57′ 40″, será $CV = 23''$. cos declin. Si la declinacion de la Luna fuere de 28°, la equacion de la declinacion, ocasionada por el aplanamiento de la Tierra, será de 20″, 2, sustractiva del lado del polo elevado, y aditiva á la declinacion de la Luna, si estuviere la Luna del lado del polo inferior, para sacar la verdadera declinacion vista desde el centro C de la Tierra, en lugar de la que se halló para el punto K por las operaciones precedentes. Bien se echa de ver que la correccion CLK de la declinacion siempre se debe añadir á

la

la distancia de la Luna al polo elevado que es el ángulo *PLK*, para sacar la verdadera distancia *PCL*, aun quando la Luna está entre el polo y el zenit, porque el ángulo esterior *PCL* siempre es mayor que el ángulo interior *CKL*. Fig.

890 Si se reduce al punto *K* el lugar aparente de la Luna, no hay correccion que hacer á la ascension recta (883), y la equacion de la declinacion es igual á $\frac{p.\,\text{sen}\,a.\,\text{cos decl.}}{\text{cos alt. polo}}$ (888) $= 23''$ para la latitud de París. Resta saber quanto esta corta variacion de la declinacion puede influir en la longitud y latitud de la Luna, ó, lo que viene á ser lo propio, qué razon hay entre la variacion de la declinacion y las variaciones de la latitud y de la longitud. Sea *A* el polo del equador ó 140.
el polo del mundo; *C*, el polo de la eclíptica; *B*, el lugar verdadero de la Luna; *AB*, su distancia al polo del mundo; *BC*, su distancia al polo de la eclíptica; y *BL*, la leve variacion que padece la declinacion de la Luna (888) sin que varíe el ángulo *A*; hemos de averiguar qué variacion padecerá la latitud de la Luna. Con esta mira tiraremos el círculo de latitud *CL*, y el pequeño arco perpendicular *LN*, y será *BN* la variacion de latitud; pero *BL* es á *BN* ó $dAB : dBC ::$ sen AB. sen BC : cos AC — cos AB . cos BC (III. 798), luego $BN = BL \left(\frac{\cos AC - \cos AB \,.\, \cos BC}{\text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, BC}\right)$. Pero en lugar de *BL* se ha de escribir $23''$. cos declin. ó $23''$ sen $AB = \frac{p.\,\text{sen}\,a.\,\text{cos declin.}}{\text{cos alt. polo}}$ que era el valor de *CV* (888), con esto el aplanamiento de latitud será $BN = 23''$

Fig. $\left(\frac{\cos AC}{\operatorname{sen} BC} - \frac{\cos AB \cdot \cos BC}{\operatorname{sen} BC}\right) = \frac{p \cdot \operatorname{sen} a}{\cos \text{alt. polo}} \left(\frac{\cos 23°}{\cos \text{lat.} ☾} - \operatorname{sen} \text{declin.}\right.$ tang. lat.), esto es, $23'' \frac{\cos 23° 28'}{\cos \text{lat.} ☾} - 23''$. sen decl. tang. lat ☾. El signo — se transformaría en + si la declinacion y la latitud de la Luna fuesen de signos diferentes. En estos cálculos se debe hacer uso de la latitud verdadera ó vista desde el centro de la Tierra.

891 La segunda parte de esta fórmula $23''$ sen declin. tang lat. no puede pasar de $1'', 3$ para París; por consiguiente en muchos casos se puede omitir enteramente, y bastará para la correccion de la latitud de la Luna, el término $23'' \cdot \frac{\cos 23°}{\cos \text{lat.} ☾}$. Este término varía muy poco, porque el coseno de la latitud de la Luna apenas discrepa de la unidad, y por consiguiente se puede admitir una correccion constante de $26'', 6$ para París quando la paralaxe orizontal es de $57' 40''$; en las demas latitudes será de $\frac{p \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos 23° \frac{1}{2}}{\cos \text{alt. polo}}$, conforme lo está diciendo la fórmula. Por lo que mira á los signos, son los mismos que para la declinacion (884); quiero decir, que en los países septentrionales, si la latitud de la Luna es septentrional, se restará esta correccion de la latitud de la Luna refiriéndola al punto *K*, para sacar su latitud verdadera vista desde el centro *C* de la Tierra. En nuestras regiones septentrionales, se la restará de la paralaxe de latitud (863), determinada por las reglas ordinarias; sin embargo se la debería añadir si la Luna estuviese entre el polo y el zenit. Supongo que en el cálculo de la paralaxe ordinaria, se haya hecho uso de una paralaxe orizontal des-

despues de añadirla p. sen a. tang. alt. polo, que es el valor de NK (887). Fig.

892 La correccion de la longitud que pende de la variacion de declinacion, es igual al angulillo esférico LCN; pero $NL = LCN$. sen CL (53); luego $LCN = \frac{NL}{\text{sen } CL}$; pero en el triángulo rectilíneo rectángulo BLN, tenemos $NL = BL$. sen B (I. 664); luego $LCN = \frac{BL.\text{sen } B}{\text{sen } CL}$. Por la propiedad de los triángulos esféricos (III. 713) tenemos: sen B: sen AC :: sen C: sen AB; luego sen $B = \frac{\text{sen } AC.\text{ sen } C}{\text{sen } AB}$, substituyendo este valor de sen B, se saca $LCN = \frac{BL.\text{ sen } AC.\text{ sen } C}{\text{sen } CL.\text{ sen } AB}$ esto es $= \frac{BL.\text{ sen } 23° \text{ cos longit.}}{\text{cos lat. ☾ cos declin.}}$; pero $BL = \frac{p.\text{ sen } a.\text{ cos declin.}}{\text{cos alt. polo}}$ (888); luego LCN ó la correccion de la longitud es igual á $\frac{p.\text{ sen } a.\text{ sen } 23° 28' \text{ cos long. ☾}}{\text{cos alt. polo cos latit. ☾}}$, y como el coseno de la latitud de la Luna es casi siempre igual á la unidad, con corta diferencia, será sin diferencia de un segundo, la longitud de la Luna $\frac{p.\text{ sen } a.\text{ sen } 23°}{\text{cos alt. polo}}$ cos long. ☾. Para París será al poco mas ó menos $19''$. cos long.

893 Esta correccion de la longitud se resta de la longitud verdadera vista desde el centro C calculada por las tablas, para hallar la longitud vista desde el punto K, mientras que la Luna se aparta del polo elevado. Con efecto, hemos visto que se debe añadir la equacion de la declinacion para sacar la distancia verdadera al polo, reducida al centro de la Tierra (889), ó se la debe restar de la verdadera para sacar la que se vé desde el punto K, siempre que la Luna está del lado del polo elevado. Pero si se acerca la Luna al polo elevado mientras que ella se 138.

Fig. aparta con su movimiento propio, se disminuye su longitud; luego esta correccion es sustractiva de la longitud verdadera de la Luna vista desde el punto *C*, para reducirla al punto *K*, siempre que la Luna se aparta del polo elevado; ó, lo que viene á ser lo mismo, dicha porcion de la paralaxe se debe restar de la longitud verdadera vista desde el centro *C*, que las tablas dán, para sacar la que se vé desde el punto *K*, á la qual se aplican despues las fórmulas ordinarias que penden del nonagésimo.

894 Por consiguiente para todos los países cuya altura de polo es septentrional, la correccion de la longitud es sustractiva, ó lleva el signo — quando la declinacion boreal de la Luna mengua, ó crece la declinacion meridional: esto sucede quando la Luna está en los signos descendientes, ó tiene 3, 4, 5, 6 7 y 8^s de longitud. Lleva el signo + en los signos ascendientes 9, 10, 11, 0, 1, 2, y esto es verdadero considerando el punto de la eclíptica al qual corresponde la Luna, aun quando el movimiento de la Luna en su órbita tuviese otra direccion; esto podría suceder si la Luna estuviese muy cerca del solsticio, y del nudo. Es pues, regla general que la correccion se reste de la longitud verdadera, siempre que la Luna estuviere en los signos descendientes 3, 4 &c. y que se reste en los otros seis para los países que están al norte del equador.

Es todo al revés para los países que están al medio dia del equador; y no hay nada que variar en esta regla aun quando la Luna se halla entre el zenit y el polo.

Si

895 Si el lugar de la Luna fuere mas adelantado que el del nonagésimo, la paralaxe de longitud será aditiva, y lleva el signo +; si no, lleva el signo —; luego combinando este signo con el del aplanamiento que acabamos de indicar, se determinará puntualmente la longitud aparente en la tierra aplanada, vista desde la superficie de la Tierra ó desde el punto *O*. Fig. 138.

896 En la tabla siguiente están todas las cantidades que se necesitan para los cálculos precedentes en diferentes latitudes, introduciendo en ellos el valor de los radios de la Tierra como *CO*, que calcularemos en otro lugar. Estos números son los que dán la hypótesi de Bouguer y la de Maupertuis, suponiendo que el aplanamiento de la Tierra sea $\frac{1}{178}$ y la paralaxe de la Luna de 60$'$ debajo del equador. Los números de la tabla se podrán aumentar ó disminuir, conforme se supusiere una paralaxe orizontal mayor ó menor que 60$'$, ó un aplanamiento mayor ó menor que $\frac{1}{178}$.

En la primera columna están los grados de latitudes geográficas, ó las alturas del polo. La segunda y tercera señalan la diferencia entre el radio del equador y el radio *CO* que corresponde á cada latitud, suponiendo que el del equador sea 1°; quiero decir, que en estas dos columnas se halla lo que se debe rebajar de la paralaxe orizontal debajo del equador, para sacar la paralaxe en una latitud dada en ambas hypótesis. Si se supusiera el aplanamiento de la Tierra menor que $\frac{1}{178}$, se disminuirán estos números en la misma proporcion.

Fig. En las columnas quarta y quinta están los valores de KN en segundos; esto es, la cantidad que se debe añadir á la paralaxe orizontal hallada ya por medio de una de las columnas antecedentes para cada latitud, á fin de sacar la paralaxe que corresponde á OK, de la qual hicimos uso antes (886 y sig.). Este valor de NK igualmente que el de CK es de $48''$ debajo del polo, ó por lo menos infinitamente cerca del polo, porque el radio del círculo osculador remata en K en aquella distancia, por mas cerca que se esté del polo.

En la sexta y séptima columna está el segmento CK en segundos; esta es la cantidad que multiplicada por el coseno de la declinacion dá la equacion de la declinacion (888) y por consiguiente la de la longitud y de la latitud (891 y 892).

En la octava y novena columna está la equacion de la latitud, ó el efecto del aplanamiento en latitud para cada altura del polo, en las mismas hypótesis, esta equacion es constante para cada latitud geográfica (891).

En la décima columna están los 90 primeros grados de la longitud de la Luna, y en la última la correccion de la longitud para la latitud de París no mas (892). Esta equacion es la misma para los otros tres quadrantes (893), no hay mas diferencia que la de los signos; tomando el suplemento, el exceso respecto de $180°$, ó el complemento para $360°$, segun fueren los casos, del mismo modo que para buscar el seno de una longitud, ó calcular la declinacion del Sol (539).

Equa-

Equaciones de la paralaxe para esferoides aplanados, suponiendo $\frac{1}{178}$ de aplanamiento, y 60′ de Paralaxe.

Alt. del polo	Se restará de la par. debajo del equador.		NK Fig. 138		CK Fig. 138		Paralaxe en latitud		Long. de la Luna	Paral. de long. en París
Grados	*Bouguer*	*Maupertuis*	*Bouguer*	*Maupertuis*	*Bouguer*	*Maupertuis*	*Bouguer*	*Maupertuis*		
0	0″, 0	0″, 0	0″, 0	0″, 0	0″, 0	0″, 0	0″, 0	0″, 0	0°	12″, 0
10	0, 5	0, 6	1, 0	1, 2	5, 7	7, 0	5, 2	6, 4	10	11, 8
20	1, 9	2, 4	4, 0	4, 7	11, 7	13, 8	10, 7	12, 7	20	11, 3
30	4, 2	5, 1	9, 0	10, 1	18, 1	20, 2	16, 6	18, 6	30	10, 4
40	7, 2	8, 3	11, 4	16, 7	25, 0	26, 0	22, 9	23, 9	40	9, 3
50	10, 8	11, 9	2, 45	23, 8	32, 0	31, 0	29, 2	28, 5	50	7, 7
60	14, 4	15, 2	3, 33	30, 3	38, 5	35, 0	35, 3	32, 3	60	6, 0
70	17, 4	17, 9	4, 11	35, 7	43, 8	38, 0	40, 1	35, 0	70	4, 1
80	19, 5	19, 6	4, 65	39, 3	47, 3	39, 9	43, 3	36, 8	80	2, 1
90	20, 2	20, 2	48, 2	40, 5	48, 2	40, 5	44, 2	37, 1	90	0, 0

897 Podrá parecer estraña la suma diferencia que hay entre las dos hypótesis de Bouguer y Maupertuis sobre las quales va fundada la tabla, bien que el grado de aplanamiento sea uno mismo. Esta diferencia en el valor de *CK* llega á ser de $7'' \frac{7}{10}$ debajo del polo, porque los radios de curvatura son muy diferentes en dichas hypótesis, bien que sea el mismo el grado de aplanamiento. No obstante es muy leve la diferencia que de esto resulta en la paralaxe, porque la equacion *CK* de la declinacion crece con la equacion *NK* de la paralaxe, y la una compensa la otra, por manera que el resultado es siempre uno mismo con diferencia de un segundo al poco mas ó menos, en ambas hypótesis.

898 El ángulo de la vertical con el radio tirado des-

Fig. desde París al centro de la Tierra, es de 19′ 30″ por la tabla calculada en la hypótesi de Bouguer; pero no sería de 15′ en la hypótesi de una elipse comun con un aplanamiento de $\frac{1}{230}$, del qual se hará uso para las tablas de la Luna. Este mismo ángulo es de 18′ 28″ quando para determinar la figura de la Tierra, se hace uso de los grados del Norte y del Perú no mas, suponiendo elíptica su figura. Finalmente es de 19′ $\frac{1}{4}$ en la hypótesi de Maupertuis; hémosle tomado de 15′ en números redondos en los cálculos antecedentes, y en las tablas de la Luna se verá que es de 14′ 49″.

De la Libracion de la Luna.

899 Consta por las observaciones que la rotacion de la Luna es uniforme, y que dura lo mismo cabalmente que su revolucion, esto es, $27^d\ 7^h\ 43'\ 5''$ (786); de aquí se sigue que vemos siempre un mismo emisferio de la Luna. Esta uniformidad es causa de una particularidad estraña que reparamos en el disco aparente de la Luna, pareciéndonos que este astro tiene una *Libracion* ó especie de balance, como si empezase á moverse al rededor de su ege. La libracion se hace primero de occidente á oriente, despues de oriente á poniente; por manera que diferentes regiones que parecen colocadas cerca del limbo occidental ú oriental de la Luna, se ocultan y dejan ver alternadamente.

900 Una de las causas principales de este balance procede de la desigualdad del movimiento de la Luna en la cir-

circunferencia de su órbita que es una elipse. Y con efecto, es evidente que si la Tierra ocupára el centro de un círculo cuya circunferencia fuese la verdadera órbita de la Luna, y gastára la Luna en dar la vuelta al rededor de su ege lo mismo que tardaría en andar la circunferencia de dicho círculo, pasaría constantemente por nuestros ojos ó por el centro de la Tierra el mismo plano de un meridiano lunar, y por consiguiente veríamos todos los dias el mismo emisferio de la Luna. Pero como la órbita de la Luna es una elipse en cuyo focus está la Tierra, y es uniforme por otra parte el movimiento de dicho planeta al rededor de su ege; ó lo que es lo propio, como un meridiano qualquiera de la Luna traza continuamente al rededor del ege ángulos proporcionales á los tiempos, síguese que el plano del mismo meridiano no puede dirigirse constantemente al centro de la Tierra, y que debe apartarse al uno y otro lado de esta direccion hasta cierto punto. Fig.

901 Sea *ALP* la órbita de la Luna, cuyo focus *T* está en el centro de la Tierra. Si suponemos primero la Luna en *A*, es constante que el plano de uno de sus meridianos *MN*, prolongado, pasará por el punto *T*, ó por el centro de la Tierra. Pero si la Luna no tuviera rotacion alguna al rededor de su ege, como adelanta cada dia en su órbita, el mismo meridiano *MN* siempre se mantendría paralelo á sí mismo, y en llegando la Luna á *L*, dicho meridiano se vería en la situacion *PQ*, esto es, paralelamente á *MN*. El movimiento de rotacion de la Luna al rededor de su ege, 141.

que

Fig. que es uniforme, es causa de que varie la situacion del meridiano *MN*; y como traza ángulos proporcionales á los tiempos, que corresponden á quatro ángulos rectos en el discurso de una revolucion periódica, se hallará por consiguiente en una situacion *mLn*, tal que el ángulo *QLn* que forma con *PQ*, sería á un ángulo recto ó de $90°$, como el tiempo que la Luna gasta en andar el arco *AL* es á la quarta parte del tiempo periódico. Pero el tiempo que gasta la Luna en andar el arco *AL* es á la quarta parte del tiempo periódico, como la area *ATL* es á la area *ACL* ó á la quarta parte de la area elíptica; luego el ángulo *QLn* tendrá con un ángulo recto la misma razon. Y por ser la area *ATL* mucho mayor que la area *ACL*, del mismo modo será el ángulo *QLn* mayor que un ángulo recto. Pero yá que *QLT* es un ángulo agudo, el ángulo *QLn* que es obtuso será mayor que el ángulo *QLT*, y por tanto estando la Luna en *L*, el mismo meridiano *MN* cuyo plano pasaba por el centro de la Tierra quando la Luna estaba en el punto *A*, yá no se dirigirá al punto *T* ó ácia el centro de la Tierra. Queda, pues, probado que el emisferio visible de la Luna, ó que está vuelto ácia la Tierra en *L*, ya no es de todo punto el mismo que se vía quando la Luna estaba en *A*, y que por lo mismo mas allá del punto *Q* de la circunferencia del disco, se verán algunas regiones que antes no parecian. Finalmente, en llegando la Luna al punto *P* de su órbita donde es perigea, como su meridiano *MN* habrá concluido puntualmente una media revolucion, entonces el pla-

plano del mismo meridiano pasará puntualmente por el centro de la tierra. Se verá, pues, entonces el disco de la Luna en el mismo estado que quando estaba apogea en *A*; de donde se deduce que los límites de la libracion de la Luna son el apogeo y el perigeo, y que este fenómeno se puede observar dos veces en cada lunacion ó en cada mes periódico. Fig.

902 Si la superficie de la Luna fuese igual y lisa como la de un cristal, no reflectiría la luz ácia todos los lados, solo nos reflectiría una imagen del Sol casi imperceptible, y aun puede ser que no se distinguiera á no ser por el resplandor ó la viveza de los rayos de luz que el Sol arroja, *lo* que no será así si la Luna es de todo punto *semejante* á la Tierra. Pero como su superficie desigual está toda llena de montañas y profundidades que reflecten la luz del Sol ácia todas partes, de aquí proviene que nos envia mucho mayor cantidad de rayos, que es lo que indispensablemente se necesitaba para que la Tierra estuviese iluminada por las noches.

Estas desigualdades que llamamos montañas en la superficie de la Luna, son de bastante consideracion, bien que no se parecen á la mayor parte de las que hay por lo comun en la Tierra, porque en la Luna hay realmente una multitud de montes disformes, valles profundos, y cavernas ó abismos tan grandes que quizá no se hubieran sospechado jamás á no haber logrado medirlos exactamente. Por otra parte, si la Luna no tuviera en su superficie tales desigual-

da-

Fig. dades, si todas sus partes estuvieran perfectamente á nivel, conforme sucede con las aguas del mar quando está en calma, es evidente que la linea que en las quadraturas y demás fases señalaría el término entre la luz y la sombra, sería una linea recta, ó una porcion de elipse regularísima, puntualmente al reves de como nos la representan los anteojos de larga vista; su curvatura no es uniforme, antes bien sumamente desigual y llena de altos y bajos; en cada interrupcion hay unas profundas concavidades que causan su irregularidad, y aun podemos decir que la desfiguran. Es así tambien que en la parte del disco que no está iluminada se dejan ver ciertos parages luminosos, y algunos de estos muy distantes del término entre la luz y la sombra. Por egemplo, si se observa la creciente de la Luna cerca de quatro dias despues de la Luna nueva, se distinguen en su parte obscura, y mucho mas afuera del término entre la luz y la sombra varios puntos luminosos que parecen puntas de peñascos ó islas pequeñas de las que hay en el Océano ó en el Mediterraneo. Tambien se dejan ver dentro de la parte del disco iluminado varios espacios pequeños, y á manera de crecientes, que ván creciendo y mudando poco á poco de figura segun crece la Luna, ó se acerca á su oposicion con el Sol; por manera que despues de haberlos rodeado enteramente la luz, llegan por fin á confundirse en la parte iluminada, quando los rayos de esta misma luz los han penetrado, digamoslo así, por todas partes. Lo mismo sucede en las fases siguientes con otros muchos que

que se ván descubriendo succesivamente cada dia, y saliendo de la parte obscura, conforme vá creciendo la Luna. En el menguante sucede todo al contrario; estos mismos puntos luminosos están medio iluminados por la parte opuesta, por manera que quando han llegado casi al término entre la luz y la sombra, se desaparecen succesivamente, bien que esto no sucede por lo comun hasta estar un poco mas allá de dicho término. Todos estos fenómenos no se podrian observar, si estos puntos que nos parecen luminosos no estuvieran mas altos que lo demás de la superficie de la Luna, y aun tan altos que pudiera darles por mucho tiempo la luz del Sol quando llega á estar casi orizontal respecto de ellos. Para que esto sea así, es forzoso que estos puntos que se advierten en la parte obscura bastante mas allá del término que separa la luz de la sombra, sean las puntas ó cumbres de algunos montes muy altos, que por razon de serlo tanto, reciben con mucha anticipacion la luz del Sol, y por un motivo parecido á este se obscurecen mucho despues que los demás puntos de la superficie de la Luna. Podemos decir tambien que aquellas manchas negras que se advierten al mismo tiempo en la parte iluminada inmediata al término entre la luz y la sombra, son unas concavidades ó valles tan profundos, que por no darles todavía la luz del Sol, cuyos rayos les dán entonces con demasiada oblicuidad, solo reciben un poco de luz ácia sus estremos superiores, esto es, ácia los parages mas elevados de sus circunferencias. Por esta razon nos han de parecer tanto mas ne-

Fig.

Fig. negros quanta mayor es la privacion total que padecen entonces de los rayos que los rodean y reflecten una luz vivísima. Sin embargo, como el Sol vá subiendo poco á poco, sus rayos ván siendo cada dia menos oblicuos, y por eso las manchas poco á poco son mas iluminadas, y la sombra es tanto menor quanto mas elevado está el Sol sobre el orizonte; por manera que quando el Sol llega á estar vertical ó perpendicular, se desvanece la sombra, y aquellas mismas partes se parecen á las demás manchas luminosas. Está es quizá la única razon que causa la dificultad tan grande de observarlas en el disco de la Luna; en este último caso se confunden con las puntas ó cumbres de los montes, una vez que reflecten del mismo modo los rayos del Sol, no cabiendo duda en que su sombra es la única causa que podiá hacérnoslas observar. Sin embargo, parece que se han de dejar ver en la Luna llena, por estar entonces mucho mas iluminadas que todo lo demás; y con efecto, estos mismos valles tan profundos reflecten mucho mayor número de rayos que las puntas ó cumbres de los montes. Queda, pues, demostrado que en la Luna hay montes y valles. Vamos á especificar cierta particularidad en este asunto.

903 En la superficie de la Luna hay montes mucho mas altos que los mayores que conocemos en la Tierra. Los Geómetras ó los Astrónomos han llegado á medirlos por el método siguiente. Sea *EGD* el emisferio iluminado de la
142. Luna; *ECD*, el diámetro del círculo que separa la luz de la sombra; *A*, la cumbre de un monte que se habrá obser-

va-

vado en el primer instante que empezó á dejarse ver. Se Fig. medirá bien, si se puede, con una quadrícula puesta en el focus de un anteojo, la distancia *AE*, y el diámetro aparente de la Luna, y de aquí se sacará la razon que entre ellos hay. Supuesto esto; una vez que *ES* es una tangente al globo de la Luna, si se tira la recta *AC*, el triángulo *ACE* será rectángulo, y por lo mismo como *AE* y *EC* son dadas, se conocerá *CA*, de la qual se restará *CB* = *CE*, y el residuo *BA* será la altura de la montaña que se busca.

Por egemplo, refiere Riccioli que quatro dias despues de la Luna nueva observó el instante en que el monte (que él llama de Santa Catalina) empezó á ser iluminado, y su distancia *AE* al término de la luz y de la sombra, que algunas veces parece bastante regular, era la décima sexta parte del diámetro de la Luna, ó lo que es lo mismo, la octava parte de su semidiámetro. Supongamos, pues, que *EA* sea una parte de las que hay ocho en *EC*; los quadrados de *EA* y *EC* serán 1 y 64, cuya suma 65 será igual al quadrado de la hypotenusa *AC*. Pero como la raiz quadrada de 65 es 8,062 = *AC*, por esta razon, si restamos de ella 8,000 = *BC* ó *CE*, el residuo 0,062 será la altura verdadera de la montaña *AB*, y de aquí se sigue que *CB* ó *CE* es á *AB* como 8000 es á 62. Y como el radio de la Luna tiene cerca de 400 leguas, si decimos: 8000 : 62 :: 400 leguas son á un quarto término, este quarto término, que será justamente 3,1 leguas, dará la al-

Fig. tura de dicho monte, que es cerca de tres veces mayor que la de los montes mas altos de Europa.

De los Satélites de Júpiter.

904 Lo primero que acerca de estos Satélites nos toca determinar, es el tiempo de sus revoluciones, para lo qual conduce mucho observar repetidas veces el momento en que cada Satélite está en conjuncion con Júpiter. Pero á fin de que las conjunciones observadas desde la Tierra sean las mismas que las conjunciones observadas desde el Sol, se deben escoger para determinar las revoluciones las conjunciones de los Satélites que se verifican quando Júpiter está en oposicion. Entonces si el Satélite pasa por delante ó por detras del disco del planeta principal; el momento en que corresponde al centro de Júpiter, es el mismo que el de la conjuncion vista desde el Sol y desde la Tierra. Se determinan con mas puntualidad y menos trabajo todavía las conjunciones vistas desde el Sol por medio de los eclipses; porque quando un Satélite está en medio de la sombra que arroja Júpiter detrás de sí, es evidente que el Satélite está en conjuncion con Júpiter, pues está en la linea tirada desde el Sol á Júpiter. El intervalo de una conjuncion á otra se llama la *Revolucion Synódica* del Satélite, que es por consiguiente el tiempo que dura una revolucion respecto del Sol.

905 La *Revolucion periódica* ó el regreso de un Satélite al mismo punto de su órbita, ó al mismo punto del cie-

cielo visto desde Júpiter, despues de andados 360°, es Fig. algo mas corta que la revolucion synódica. Porque como en el tiempo que gasta el Satélite para dar la vuelta en su órbita, vá caminando Júpiter en la suya, tarda mas el Satélite en llegar á la conjuncion que en restituirse al mismo punto determinado de su órbita. Nuestro ánimo es hablar de las revoluciones synódicas no mas, por ser las únicas que se pueden observar, y de las quales penden los eclipses, que son un asunto importante el dia de hoy. Pero las revoluciones periódicas se pueden averiguar por medio de las synódicas, con hacer la siguiente proporcion: 360° mas el movimiento de Júpiter en el discurso de una revolucion synódica, son al tiempo que dura esta revolucion synódica observada, como 360° son al tiempo que dura una revolucion periódica.

906. Tambien importa determinar las distancias de los Satélites al centro de Júpiter, midiéndolas en los tiempos de su elongacion máxima. Pero basta medir la distancia de uno solo para determinar por la regla dada (684) las distancias de los demás. Estas distancias suelen espresarse en semidiámetros de Júpiter, y centésimas del mismo radio. La distancia del primer Satélite es de 5,67, esto es, de cinco semidiámetros de Júpiter, y 67 centésimas ó dos tercios. Esto bastaría para hallar sus distancias reales, porque el diámetro de Júpiter es como once veces mayor que el de la Tierra (756). Con multiplicar por 11 las distancias que señalamos en semidiámetros de Júpiter, se re-

Fig. ducirian á semidiámetros terrestres, ó se reducirian á leguas con multiplicarlos por 15416.

907 El diámetro de Júpiter visto desde el centro del Sol en sus distancias medias al Sol, y visto desde la Tierra en sus distancias medias á la Tierra es de $37''\frac{1}{4}$, segun observó Newton. Luego su semidiámetro es de $18''\frac{5}{8}$. Si multiplicamos esta cantidad por las distancias valuadas en semidiámetros de Júpiter, sacaremos las mismas distancias en minutos y segundos, quales se observan quando Júpiter está en sus medias distancias á la Tierra, bien que pueden crecer ó menguar un quinto por no ser siempre una misma la distancia de Júpiter á la Tierra. Estas distancias de los Satélites en minutos y segundos pueden servir para comparar las distancias de los mismos Satélites con las de los planetas al Sol. Supongamos, por egemplo, que se tome por unidad la distancia de Venus al Sol, y nos propongamos averiguar la distancia del quarto Satélite respecto del centro de Júpiter, se hará esta proporcion: *La distancia de Venus al Sol 723 (682) es á la de Júpiter, como 1 es á 7,1903, distancia de Júpiter al Sol.* Despues diremos: *El radio es al seno de 8′ 16″, elongacion del Satélite, como 7,1903 es á 0,01729, distancia del Satélite en partes de la de Venus.*

908 Si se comparan las distancias de los Satélites con los tiempos de sus revoluciones periódicas, se hallará que tambien se verifica en su movimiento la ley de Kepler. Porque si tomamos el quadrado de $1^d\ 8^h\ 28'$, y el de $16^d\ 16^h\ 32'$, ó mejor los tiempos periódicos del primero y

quar-

quarto Satélite respecto de las estrellas fijas; y tomamos Fig.
tambien los cubos de sus distancias 5,67; 25,30, sacaremos, con tomar los primeros guarismos no mas, los números 6642, 5775, 1820, 1619 que están verdaderamente en proporcion.

909 Si sumamos las revoluciones de los Satélites hasta que vengan á componer unos mismos números, sacaremos con corta diferencia los periodos siguientes.

247 revoluciones del I	componen	437^d	3^h	$44'$
123 revoluciones del II		437	3	$42'$
61 revoluciones del III		437	3	36
26 revoluciones del IV		435	14	16

Por consiguiente en el intervalo de 437 días los tres primeros Satélites vuelven á una misma situacion unos respecto de otros con diferencia de $8'$, y faltan 1^d 13^h para que tambien suceda otro tanto con el quarto.

Desigualdades de los Satélites.

910 La primera de las desigualdades que se notan en las revoluciones de los Satélites de Júpiter, que tambien es la mayor de todas, proviene de la paralaxe anua (517). Sea *S* el sol; *I*, el centro de Júpiter; *B*, un Satélite en conjuncion sobre la linea de los centros, ó sobre el ege de la sombra; *T*, el lugar de la Tierra; *TIG*, el radio tirado desde la Tierra por el centro de Júpiter; el ángulo *TIS* igual al ángulo *BIG*, es la paralaxe anua de Júpiter, que pue- 143.

Fig. de llegar hasta 12.° En este caso es preciso que el Satéli-
te llegue desde *B* á *G*, y ande 12° de su órbita, para que
se le vea en conjuncion sobre la linea *TIG*, bien que su
verdadera conjuncion se haya verificado en el punto *B*. Di-
chos 12° componen $1^h\ 25'$ de tiempo para el primer Sa-
télite, $2^h\ 50'$, $5^h\ 44'$, $13^h\ 24'$ para los demás respec-
tivamente. Esta es la desigualdad que se nota en las revolu-
ciones de los Satélites, observadas desde la Tierra.

911 Hay otras desigualdades que se verifican res-
pecto de la linea de los centros *SIB*, y se notan en el re-
greso de los Satélites á sus conjunciones, y en los interva-
los de los eclipses. Hemos supuesto (904) en la inves-
tigacion de los períodos, que se toma un intervalo de tiem-
po bastante largo para que las desigualdades desaparezcan
y se compensen; si en la indagacion de las revoluciones ó
movimientos medios solo se considerára una revolucion del
Satélite, el resultado padecería la desigualdad del movimien-
to de Júpiter y la del movimiento del Satélite. Pero si com-
paramos observaciones distantes un período entero de Júpi-
ter, ó muchos, esto es 12, 24 &c. años, todo estará com-
pensado, y sacaremos puntualmente el movimiento medio del
Satélite en su órbita, esto es, prescindiendo de la desigualdad
de sus regresos. Se consigue determinar despues estas des-
igualdades, comparando unos con otros los intervalos de di-
ferentes eclipses, cuyos intervalos siempre deberian ser igua-
les, si el movimiento medio no padeciera notables alteraciones.

912 La mayor desigualdad en los regresos de las
con-

conjunciones y de los eclipses de los Satélites, es la que Fig.
se origina de la desigualdad del movimiento de Júpiter. Porque la diferencia entre el regreso á una conjuncion y una revolucion periódica completa del Satélite, pende del movimiento de Júpiter visto desde el Sol en el mismo intervalo de tiempo (787), cuyo movimiento es irregular, de donde resultaría que los eclipses no volverian por lo mismo en intervalos iguales de tiempo. El intervalo entre dos eclipses es igual á una revolucion del Satélite, mas al tiempo que necesita para alcanzar la sombra de Júpiter, que ha caminado lo mismo que Júpiter, pero con desigualdad. Y como la equacion de Júpiter es de $5^{\circ}\ 34'$ (713), unas veces aditiva, otras sustractiva, la suma de todos los intervalillos que puede haber en una revolucion synódica mas que en una revolucion periódica, puede llegar á mas de 11.°

913 Sea *ABP* la órbita de Júpiter; *S*, el Sol; *F*, el 144.
focus superior de la elipse al rededor del qual el movimiento de Júpiter es sensiblemente uniforme (703). Supongamos un Satélite que en una revolucion entera de Júpiter concluya un número cabal de revoluciones periódicas; que Júpiter haya andado la quarta parte de su revolucion en tiempo, quiero decir, que el ángulo *AFB* que espresa la anomalía media sea de 90°; el Satélite habrá concluido tambien la quarta parte de las revoluciones periódicas que puede concluir mientras que Júpiter concluye una revolucion, y habrá llegado á *H*, que corresponde en el cielo al mismo punto que el lugar medio de Júpiter. Pero el Satélite llega-

Fig. rá á *K*, donde se verifica la conjuncion con Júpiter, y padecerá eclipse mucho antes de llegar á *H*; la diferencia *KH* es la medida del ángulo *KBH* = *FBS*, que es la equacion del centro de Júpiter, esto es, $5^{\circ}\ 34'$ (713). El primer Satélite gasta $0^{h}\ 39'\ 25''$ en andar $5^{\circ}\ 34'$ de su órbita; por consiguiente los eclipses se deberán anticipar $39'\ 25''$ al cabo de 3 años; seis años despues, quando Júpiter estuviere en la parte opuesta de su órbita, atrasarán la misma cantidad.

914 Para determinar la cantidad de esta equacion, en cada órbita de los Satélites, se hace esta proporcion: 360° *son al tiempo que dura la revolucion synódica*, *como* $5^{\circ}\ 34'\ 1''$ *son á un quarto término*, *que será* $0^{h}\ 39'\ 25''$ para el primer Satélite. Este es el fundamento de la *máxima* desigualdad de las conjunciones y de los eclipses de los Satélites. En nuestras Tablas tiene por argumento el número *A*, que es la anomalía media de Júpiter, calculada en décimas de grado; es igual á la equacion misma de Júpiter convertida en tiempo en razon de la revolucion synódica del Satélite. Pero como la equacion de Júpiter es variable, segun consta de las observaciones, es preciso mudar el valor de esta equacion.

915 La primera desigualdad es la que proviene de
140. la propagacion succesiva de la luz. Sea *S* el Sol; *APB*, la órbita de Júpiter; *TVR*, la órbita de la Tierra cuyo diámetro *TR* es de 66 millones de leguas (600). La velocidad con que los rayos vienen desde el Sol á la Tierra es tal, que en el mismo tiempo la Tierra anda en su órbita un

un arco de 20″ (452); pero la Tierra anda un arco de 20″ en $0^h\ 8'\ 7''\frac{1}{3}$ de tiempo con corta diferencia; luego la luz gasta 8′ para venir desde *S* á *R* en el supuesto de que sea *TVR* la órbita de la Tierra. Por consiguiente quando la Tierra estuviere en *R*, estando Júpiter en conjuncion con el Sol, esto es, en *A*, la luz gastará en llegar á la Tierra 16′ 15″ mas que quando la Tierra estaba en *T*, y Júpiter en oposicion. Esta es la razon porqué los eclipses de los Satélites se verifican 16′ 15″ mas tarde en las conjunciones que en las oposiciones, y en los demás tiempos á proporcion. Fig.

916 La tabla que Mr. Wargentin ha dado de esta equacion de la luz, supone que Júpiter esté en sus distancias *medias*; pero su distancia al Sol es á veces mayor por razon de la excentricidad de Júpiter, y la diferencia de las distancias es en algunas ocasiones igual á la mitad de *SR*; por manera que quando Júpiter en conjuncion ú oposicion es tambien afelio, hay 4′ 5″ mas que quando es perihelio.

917 La grande equacion que proviene de la excentricidad de Júpiter (914), y las dos equaciones de la luz, son causas de desigualdades comunes á todos los Satélites, pero cada uno de ellos tiene otras equaciones peculiares que las observaciones han dado á conocer, y se han determinado con diferencia de algunos minutos. La del primero es de $3'\frac{1}{2}$, la del segundo de $16'\frac{1}{2}$, la del tercero de 8′, esta equacion está dividida en otras tres en nuestras tablas; la del quarto es de $1^h\ 3'$.

Pa-

Fig. Para determinar las equaciones peculiares á cada Satélite, se comparan muchas observaciones con el cálculo de las tablas, donde se llevan en cuenta las equaciones comunes á todos; la diferencia entre el cálculo y la observacion compone la equacion particular que se busca. Despues de repetido muchas veces este cotejo, se puede formar una tabla de la desigualdad, y determinar su periodo.

De las inclinaciones de los Satélites.

918 La inclinacion del primero es de 3° 18′ 38″ calculándola en el círculo y suponiéndola constante por ser muy cortas sus variaciones.

La inclinacion del segundo Satélite padece una variacion cuyo periodo dura 30 años y es dificultosa de percibir; la semiduracion de sus eclipses observados en los límites varían desde 1^h 7′ hasta 1^h 16′. Segun Maraldi la inclinacion mínima de la órbitá de este Satélite era de 2° 48′ 0″ á principios de 1672, 1702, 1732, 1762. Mr. Wargentin hace hoy dia esta inclinacion de 2° 46′.

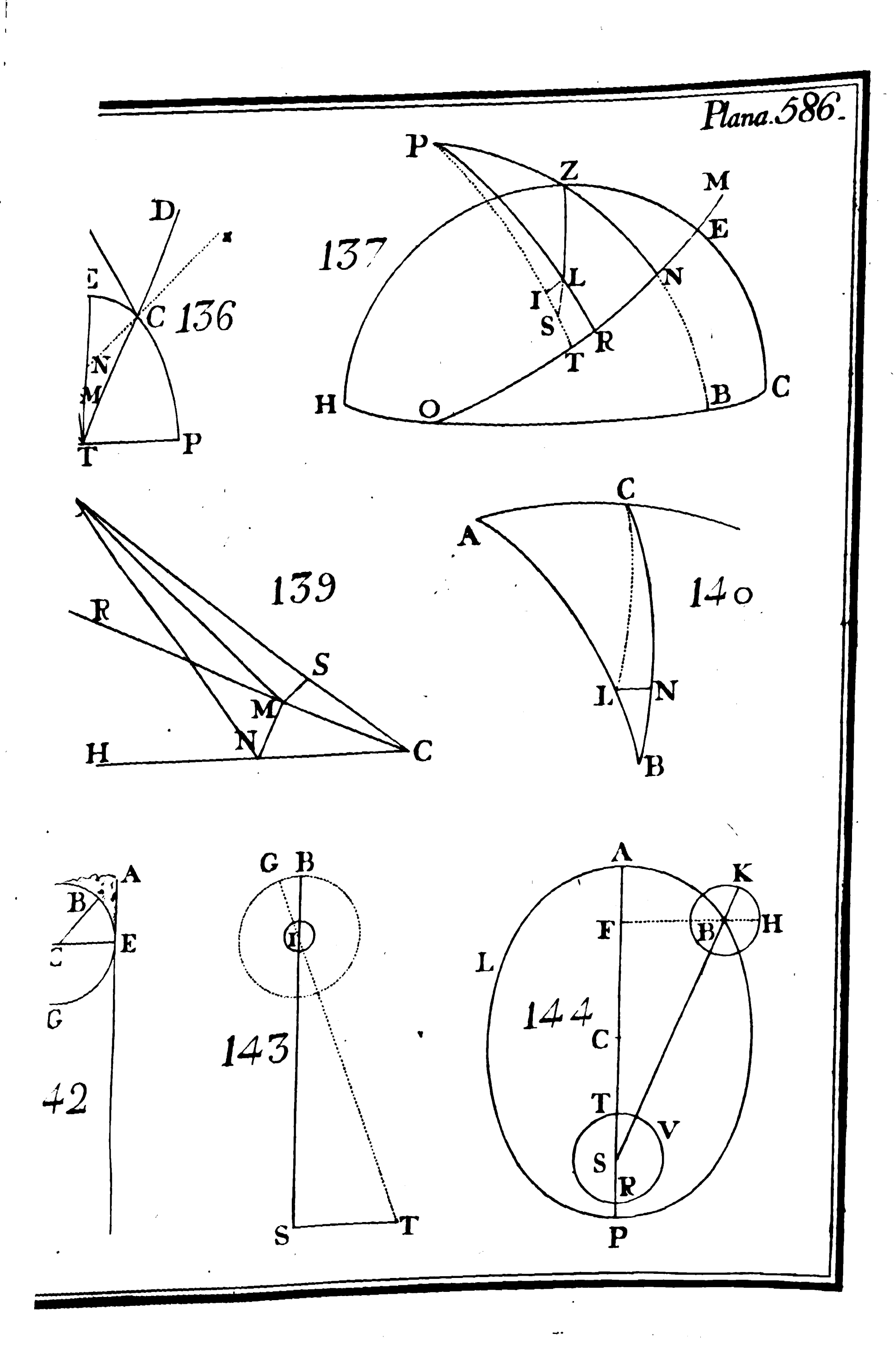
La máxima inclinacion es segun Maraldi de 3° 48′ 0″ á principios de 1687, 1717, 1747 y 1772.

La inclinacion del tercer Satélite es segun Maraldi de 3° 25′ 41′.

La del quarto es constantemente de 2° 36′.

De los Nudos de los Satélites.

919 El tiempo que dura un eclipse, quando es el que


D
E
C 136
N
M
T
P
P
Z
M
E
137
L
N
I
S
R
T
H
O
B
C
139
R
S
M
N
H
C
C
A
140
L
N
B
A
B
E
G
42
G B
I
143
S
T
A
K
F
B
H
L
144
C
T
V
S
R
P


UNIVERSIDAD CENTRAL
BIBL OTECA
DERECHO

que mas dura, dá á conocer con poca diferencia el lugar del nudo. Por egemplo, el dia 30 de Abril de 1742 se observó un eclipse del tercer Satélite que duró mas que ninguno de los que hasta entonces se hubiesen observado; aquel mismo dia el lugar de Júpiter visto desde el Sol, estaba en los 15° 42′ de Leo; se puede, pues, suponer que en el mismo punto el plano de la órbita del tercer Satélite cortaba la órbita de Júpiter. Fig.

920 El nudo del primer Satélite está á $10^s\ 14^\circ\ 30'$ y no se le ha observado hasta ahora movimiento alguno.

921 El nudo del segundo Satélite estaba constantemente en $10^s\ 11^\circ\ 48'$, por las primeras tablas de Mr. Wargentin; pero el mismo autor le dá en sus últimas tablas un movimiento progresivo en la órbita de Júpiter de $1^\circ\ 42'$ por siglo, respecto del afelio de Júpiter.

922 El nudo medio del tercer Satélite está constantemente, segun Mr. Wargentin, en $10^s\ 14^\circ\ 24'$; segun Maraldi tiene este nudo un movimiento progresivo de $3'$ cada año, conforme se lo han manifestado las observaciones.

923 El nudo del quarto Satélite estaba en 1745 segun Maraldi en $4^s\ 16^\circ\ 11'$, y su movimiento es de $5'\ 33''$ cada año, bien que segun Mr. Bailly es de $5'\ 15''$.

De los Satélites de Saturno.

924 Es tan dificultoso ver estos Satélites, que no se han podido determinar todavia sus desigualdades, bien que

Fig. que parece que son muy grandes. Son tambien tan pequeños, y están tan lejos de nosotros, que es dificultosísimo alcanzarlos á vér. El primero y segundo apenas se distinguen con anteojos ordinarios de 40 pies, el tercero es algo mayor, y hay tiempos en que se le vé en todo el discurso de su revolucion, el quarto es el mayor de todos, y esta es la causa de que le descubrió Huyghens primero que los demas por el año de 1655; el quinto, que á veces parece mayor que los tres primeros, quando está ácia su digresion occidental, es á veces tan pequeño que no se le vé.

925 Las tablas que se han publicado de los movimientos de estos Satélites, solo sirven para facilitarnos el reconocerlos, y no malograr las circunstancias que proporcionan observarlos con continuacion.

926 Las revoluciones de estos Satélites se determinan comparando unas con otras las observaciones hechas con poca diferencia quando Saturno está en el mismo punto de su órbita, y los Satélites á la misma distancia de la conjuncion. Casini las determinó respecto del equinoccio conforme las espresa la tabla aquí puesta.

Satélites	Revol. period.			
I	1ᵈ	21ʰ	18′	27″
II	2	17	44	22
III	4	12	25	12
IV	15	22	34	38
V	29	7	47	0

927 Se ha apelado á varios métodos para determinar las distancias de los Satélites al centro de Saturno. Es muy dificultoso verlos con Saturno en el mismo campo

po del anteojo para medir sus digresiones máximas, y este método solo se puede practicar para con los dos primeros. Para con los demas, se acude al intervalo de tiempo que corre entre el paso de Saturno y del Satélite por un hilo horario colocado en el focus de un telescopio bastante grande para representar los Satélites y Saturno. Casini observó que la ley de Keplero se verificaba en estos cinco Satélites. Pound aprovechó esta observacion para averiguar por medio de la distancia del quarto Satélite las distancias de los demas, y halló que la distancia del quarto Satélite al centro de Saturno en sus digresiones máximas es (765) de 8, 7 semidiámetros del anillo; y como por otra parte conocía el tiempo de sus revoluciones (926), infirió por la regla de Kepler las distancias de los otros quatro, conforme van señaladas en la tabla siguiente, que espresa estas distancias en semidiámetros del anillo y en semidiámetros de Saturno (estos son como 7 á 3); y las espresá tambien segun las observaciones de Casini, en semidiámetros del anillo, y conforme las dedujo de la regla de Kepler, suponiendo el diámetro del anillo de 45″ en las distancias medias de Saturno; y la distancia del quarto de 4 diámetros del anillo, ó de 3′. Fig.

Ta-

Tabla de las longitudes y de las distancias de los Satélites de Saturno.

Satélites	Longitud en 1760, segun Casini.	Movimiento diurno.	Movimiento para 365 dias.	Distancia en semidiámetros del Anillo segun Bradley.	Distancia en semidiámetros de Saturno segun Bradley.	Distancia en semidiámetros del Anillo segun Casini.	Distancias en minutos y segundos sacadas de la del quarto.
I	11ˢ 5° 41′	6ˢ 10° 41′ 51″	4ˢ 4° 35′ 15″	2, 097	4, 893	1 $\frac{14}{15}$	0′ 43″ $\frac{1}{2}$
II	9 10 18	4 11 32 5	4 10 10 25	2, 686	5, 268	2 $\frac{1}{2}$	0 56
III	4 25 57	2 19 41 25	9 16 57 5	3, 752	8, 754	3 $\frac{1}{2}$	1 18
IV	0 0 43	0 22 34 37	10 20 37 7	8, 698	20, 295	8	3 0
V	7 20 36	0 4 32 18	7 6 27 28	25, 348	59, 154	23	8 42 $\frac{1}{2}$

Multiplicando las distancias en semidiámetros de Saturno por 13664 $\frac{1}{2}$ se sacarán las distancias en leguas (756); pero se deberán desechar tres guarismos del producto, por razon de las tres decimales que en la tabla antecedente acompañan al número de los semidiámetros.

928 Comparando los Satélites con el anillo de Saturno en diferentes puntos de sus revoluciones, y examinando las aberturas de estas elipses, se ha averiguado que los quatro primeros andan elipses semejantes á dicho anillo, y puestas en el mismo plano, esto es, inclinadas unos 31° $\frac{1}{2}$ á la eclíptica, ó 30° á la órbita de Saturno. Porque el ege menor de las elipses que andan estos quatro Satélites, quando parecen mas abiertas, es con corta diferencia la mitad del ege mayor, así como el diámetro menor del anillo es la mitad del que pasa por las dos asas (765); y dichos Satélites en sus digresiones máxi-

ximas siempre están en la linea de las asas; todo esto prueba Fig.
que se mueven en el plano del anillo. Halló Maraldi que en el año de 1715 el plano del anillo de Saturno cortaba el plano de la órbita de Saturno en una inclinacion de 30°, de donde infirió que el ángulo de las órbitas de los quatro primeros Satélites con la órbita de Saturno es de 30°.

Por lo que mira al quinto Satélite, halló Casini el hijo en el año de 1714, que su órbita estaba inclinada á la órbita de Saturno, y al plano del anillo 15° $\frac{1}{2}$; por consiguiente la órbita del quinto Satélite estaba inclinada 15 á 16° á la eclíptica, y lo mismo al plano del anillo, y de las órbitas de los otros quatro, pero en diferente direccion.

La longitud del nudo de los quatro primeros Satélites, segun Huyghens, Casini y Maraldi, está en 5^s 22°. Casini halló en 1714 el nudo del quinto Satélite en 5^s 4° sobre la eclíptica, 17 grados menos adelantado que los nudos de los otros quatro.

De las configuraciones de los Satélites, y del efecto de las paralaxes anuas.

929 Para distinguir unos de otros los Satélites de Júpiter en diferentes posiciones, y sobre todo para observar los Satélites de Saturno, tan dificultosos de alcanzar, es preciso conocer su situacion aparente vista desde la Tierra respecto del planeta principal. Daremos aquí la descrip-

Fig. cripcion de un instrumento con el qual se logra este fin respecto de los Satélites de Júpiter.

145. La figura representa la eclíptica dividida en 12 signos; una alidada transparente que suele ser de cuerno *ACB* dá vuelta al rededor del centro *C*; se *planta sobre el punto A*, al qual corresponde la latitud geocéntrica de *Júpiter*, conocida por una efemeride, y se para por medio de una pinza *D*. La figura supone la longitud de Júpiter 9^s 22^o para el dia primero de Mayo de 1759. Los quatro círculos interiores son quatro círculos de carton que han de ser móbiles al rededor del centro *C*; representan las órbitas de los quatro Satélites, divididas en dias, por las tablas de los movimientos medios. Por las mismas tablas se calcúla la longitud *jovicéntrica* de cada uno de los quatro Satélites para el dia 1 del mes: se *hallan*, por egemplo, para el dia 1 de Mayo de 1759, las longitudes siguientes, 0^s 24^o para el quarto Satélite, 2^s 25^o para el tercero, 3^s 11^o para el segundo, 10^s 13^o para el primero. Se coloca el guarismo 1 de cada círculo enfrente de esta longitud calculada; el guarismo 1 de la órbita del quarto Satélite corresponde á 0^s 24^o, &c. entonces la situacion del punto 1 respecto *de la* alidada *ACB* manifiesta la situacion aparente de cada Satélite respecto de Júpiter, el dia 1 del mes, para un observador que está en la prolongacion de la alidada *ACB* siempre dirigida ácia la Tierra. La situacion de los puntos señalados 2 en cada una de las quatro órbitas, manifiesta la si-

situacion de los quatro Satélites, el dia 2 á la misma hora; lo propio debe entenderse de los demas dias del mes. Fig. 145.
Por este medio se formará la configuracion de los quatro Satélites qual se vé en la linea *EF* debajo de la figura, donde se supone que Júpiter está en *I*; el punto 4 de la órbita del tercer Satélite que coge 8 lineas á la derecha de la alidada *AB* me está diciendo que he de colocar el tercer Satélite, 8 lineas á la izquierda de Júpiter, en la linea de las fajas *EF* (761), y así de los demas. De este modo se representará Júpiter acompañado de sus quatro Satélites, qual se le vé con un anteojo de 15 pies que trastorna los objetos. Los círculos están dispuestos para una figura en su verdadera situacion.

Los Satélites 1 y 3 están mas arriba de la linea de las fajas, porque por razon de la inclinacion de las órbitas, los Satélites parecen algun tanto ácia el norte en uno de los semicírculos de sus revoluciones; todo el tiempo que el Satélite está entre $10^s\ 15^\circ$ y $4^s\ 15^\circ$ de longitud, ó mas arriba de la linea de los nudos *NN*, siempre parece un poco mas septentrional que la órbita de Júpiter, y lo parece tanto mas quanto mas lejos está de los puntos *N*.

El guarismo que indica el Satélite, se pone entre Júpiter y el punto que señala el lugar del Satélite, quando se ve en el jovilabio que el Satélite se vá acercando á Júpiter, como en la figura; al contrario se pone el guarismo mas allá del punto quando el Satélite se vá apartando de Júpiter.

Fig. La razon de la operacion antecedente la percibirá el que considerare que la linea *CA* señala el rayo que va desde nuestro ojo al centro de Júpiter; la linea *CB* señala el rayo que va desde Júpiter á la Tierra. Por consiguiente los Satélites nos parecerán mas ó menos distantes de Júpiter, conforme estuvieren mas ó menos distantes de la alidada *BCA* en la qual vemos siempre el centro de Júpiter, no le hace que estén mas ó menos adelantados sobre la linea *CA*, no se trata mas que de su distancia á la alidada. Se señalan en las configuraciones los tiempos en que cada Satélite parece en el disco de Júpiter, ó está ocultado detrás del disco; esto es facil porque el anchor de la alidada es igual al anchor del mismo Júpiter, por consiguiente quando el punto está debajo de la alidada, se conoce que el Satélite está detrás de Júpiter, ó sobre su disco.

Tambien se señalan los tiempos en que el Satélite está dentro de la sombra; para este fin se pone tirante un hilo desde *C* á la circunferencia de la eclíptica; pero sobre un punto que discrepa del punto *A*, la cantidad de la paralaxe anua, y á la izquierda si Júpiter hubiere pasado la oposicion. Este hilo representará el ege del cono umbroso que está sobre la linea tirada desde el Sol á Júpiter, y se le supondrá tan ancho como la alidada *AB*.

Si se supiere á qué hora Júpiter pasará por el meridiano, se hallará al poco mas ó menos la situacion de dicha sombra por medio del semicirculillo, donde va apunta-

tado el efecto de la paralaxe anua. Las horas del paso, á la izquierda, son para por la tarde en una figura puesta en su situacion natural. Supongamos que Júpiter pase por el meridiano á 2 horas ó á 10 horas de la mañana, desde el punto señalado 2 y 10 bajaremos una perpendicular al diámetro *POR*, la distancia *OS* desde el centro á la perpendicular señalará quanto el ege de la sombra estará á la derecha de la alidada *AC* sobre la circunferencia esterior *AV* de la eclíptica. Fig.

930 El tiempo en que es mas importante conocer la situacion aparente de los Satélites, es el de las inmersiones y emersiones; por este motivo trataremos separadamente de los efectos que obra la paralaxe anua en la situacion de los Satélites al tiempo de los eclipses.

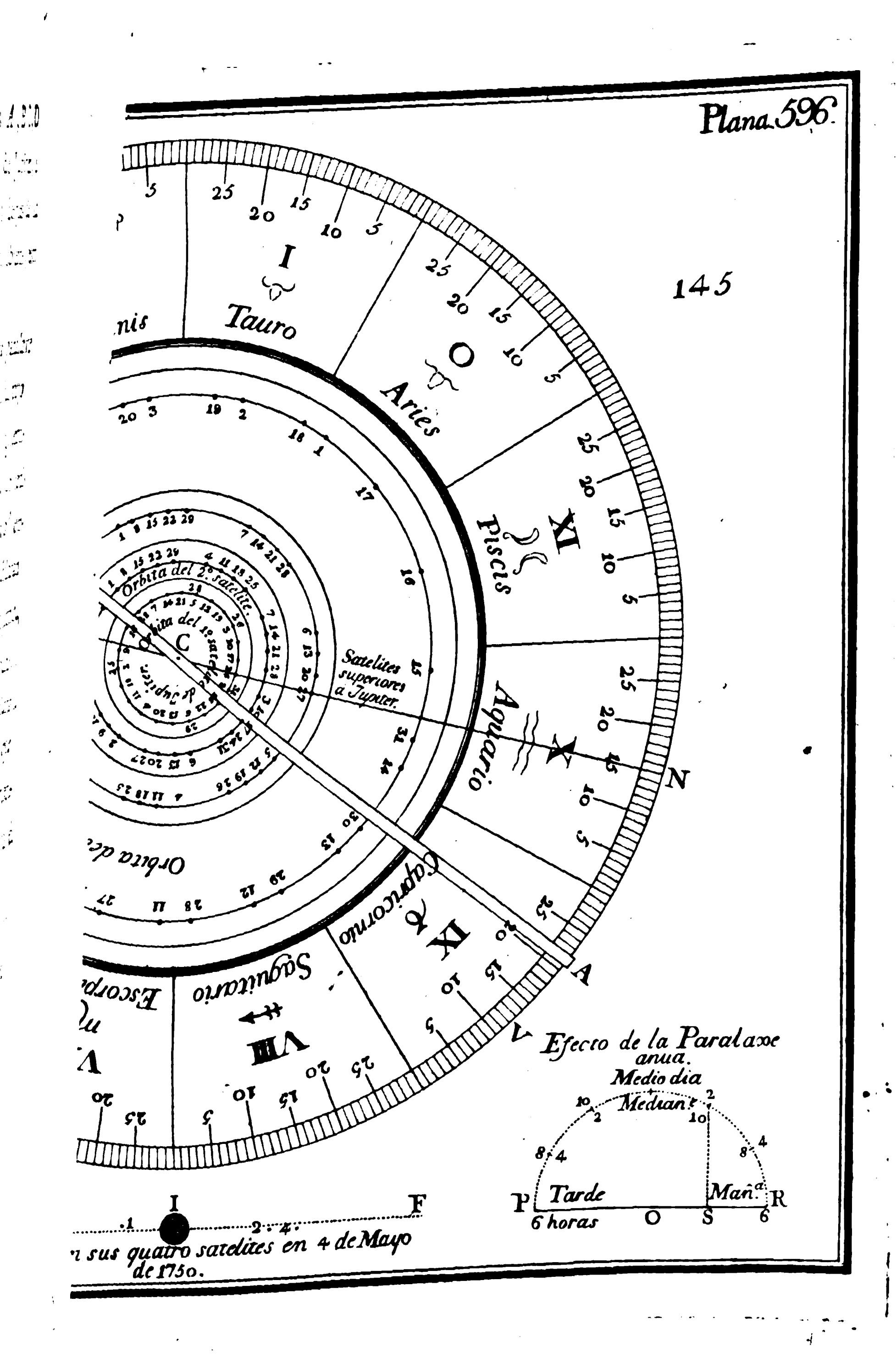
Sea *I* el centro de Júpiter, rodeado de las órbitas de 146.
sus quatro Satélites; *IG*, la linea de los sicigies ó el ege del cono umbroso; *GE*, un arco de 11°, tomado en la circunferencia de la órbita del quarto Satélite; por ser este arco igual á la paralaxe máxima anua de Júpiter, en sus distancias medias, la linea *IE* señalará la direccion del rayo visual de la Tierra quando Júpiter está en su quadratura, entre la oposicion y la conjuncion, pasando por el meridiano á las 6 horas de la tarde. Porque entonces vemos Júpiter 11° al occidente de su verdadero lugar heliocéntrico, señalado sobre la linea *GI*. Si por los puntos *G*, *F*, *g*, *f* donde los Satélites están en conjuncion, se tiran paralelas á la linea *IE*, quales son *GD*,

Fig. 146. *FC*, *gB*, *fA*, tendremos los quatro puntos *A*, *B*, *C*, *D* donde los Satélites han de parecer al lado de Júpiter, en el instante de su conjuncion heliocéntrica; despues de la oposicion, en un anteojo que trastorna los objetos, esto sucede á la derecha de Júpiter.

En los demas tiempos del año y quando la paralaxe anua no llegare á 11°, se hallará la posicion del rayo visual *IE* que es la linea de las conjunciones geocéntricas, trazando sobre el arco *EG* como radio, un semicírculo dividido en grados, ú horas; se tomarán 30° empezando desde el punto *E* de *6* horas, donde se señalarán 4^{h} y 8^{h}, porque distando Júpiter 30° de su quadratura, pasa por el meridiano á eso de las *8 de la noche*, ó á las 4^{h} de la tarde; y ácia este punto de 4^{h} se tirará la linea *IE*. Para los Astrónomos es mas acomodado el que dicho semicírculo esté dividido en tiempo, porque el tiempo del paso por el meridiano está calculado en las efemérides.

Quando Júpiter, despues de la conjuncion, pasa por el meridiano por la mañana, la linea *IE* de la conjuncion geocéntrica se debe tirar del lado derecho ó en la parte oriental; y los Satélites nos parecerán á la izquierda ó al occidente de Júpiter en los tiempos de sus conjunciones heliocéntricas.

931 Por medio de la misma figura se hallará la distancia de los Satélites en emersion, tomando del lado del oriente, esto es, á la derecha de los puntos *A*, *B*, *C*,


Tauro
Aries
Piscis
Aquario
Capricornio
Sagitario
Escorpio
Orbita del 2º satelite
Satelites superiores a Jupiter.
N
A
V
C
I
F
Efecto de la Paralaxe anua.
Medio dia
Median.
Tarde
Mañª
P
O
S
R
6 horas
n sus quatro satelites en 4 de Mayo de 1750.



C, *D* una cantidad igual al semidiámetro de la sombra, Fig.
que es igual con corta diferencia al semidiámetro de Júpiter *IH*, y estará determinada la distancia de los Satélites respecto del limbo de Júpiter, para el tiempo de sus emersiones; ó sinó, se examinará la distancia *IA* de un Satélite al centro de Júpiter, para el tiempo de la conjuncion, y esta será su distancia al borde occidental *H*, para el tiempo de la inmersion, y respecto del limbo oriental *X*, para el tiempo de la emersion. Estas distancias al limbo *X* están señaladas en la figura, son de $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{10}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ diámetros de Júpiter, en las emersiones que se verifican al tiempo de las quadraturas.

La misma figura sirve para hallar el efecto de la paralaxe anua en minutos, y para conseguirlo basta dividir el ege *GE* que espresa la paralaxe máxima de 11° en $660'$; en sabiendo la hora del paso de Júpiter por el meridiano, pongo por caso 2^h, se tomará la distancia del punto señalado 2^h, á la linea *GI*, ó el valor de la perpendicular á *GI*, esta será la paralaxe anua espresada en minutos. Porque como la paralaxe tiene por base el seno del arco de la órbita terrestre que espresa la distancia de la Tierra á la conjuncion, varía como las perpendiculares de que acabamos de hablar.

932 En la construccion de la figura no hemos atendido á la latitud de los Satélites, y los hemos referido á una 146.
linea *ID* que atraviesa el centro de Júpiter paralelamente á su órbita, y en la direccion de las fajas (761), ó del

 equa-

Fig. equador de Júpiter, que sensiblemente no discrepa de la direccion de las quatro órbitas; este es el caso que se verifica quando Júpiter está ácia $4^s\frac{1}{2}$ y $10^s\frac{1}{2}$ de longitud. Pero entre $4^s\frac{1}{2}$ y $10^s\frac{1}{2}$ de longitud, los Satélites en conjuncion parecen al mediodia del diámetro de Júpiter ó de la linea de las fajas, á la qual los hemos referido, esto es, arriba en la figura trastornada. Por el contrario, entre $10^s\frac{1}{2}$ y $4^s\frac{1}{2}$ parecen al norte ó debajo de la linea de las fajas ácia el tiempo de sus conjunciones superiores; la cantidad es máxima quando Júpiter se acerca á $1^s\frac{1}{2}$ ó $7^s\frac{1}{2}$ de longitud; entonces la latitud de los Satélites es máxima:
147. su efecto está señalado debajo de los números 1, 2, 3, 4, suponiendo de 3° la inclinacion media, y los Satélites estarán en los puntos *p*, *q*, *r*, *s*, en vez de estar en los puntos 1, 2, 3, 4 al tiempo de sus emersiones, si están ácia $1^s\frac{1}{2}$ de longitud vistos desde el centro de Júpiter; ó lo que viene á ser casi lo mismo, si la longitud de Júpiter es con corta diferencia de $1^s\frac{1}{2}$; estarian mas arriba si Júpiter estuviera á $7^s\frac{1}{2}$.

146. 933 Para determinar al poco mas ó menos en la figura esta latitud de los Satélites en otro tiempo qualquiera, se tomará en la órbita del quarto, un arco *MN* igual á 3°, inclinacion media entre las de los quatro Satélites. Se trazará un círculo *MKL*, se le dividirá en signos y grados, señalando en *K* el lugar del nudo $10^s\frac{1}{2}$ y $4^s\frac{1}{2}$; en *L* $1^s\frac{1}{2}$; y en *M* $7^s\frac{1}{2}$; desde el punto *I* se tirará una linea al vértice *M* del círculo chico; esta señalará en *O* la

la-

latitud máxima *OP*, que pueda tener el tercer Satélite ; en Fig. *R*, la latitud máxima *RT* del segundo &c. de este modo se colocarán los Satélites sobre la linea *MORI* prolongada, en vez de colocarles sobre la linea *NID* ; si la conjuncion se verificare cerca del límite, se colocarán sobre una elipse, cuyo semiege menor sea *MN*, *OP* &c.

Para otras situaciones de los Satélites, se señala en el círculo chico *MKL*, la longitud, por egemplo, del tercer Satélite vista desde el centro de Júpiter, para un dia dado, que es facil de conocer por los círculos de la figura 145 ; se tira la linea *IM* al punto de esta longitud, cuya linea indica la latitud *OP* del tercer Satálite en conjuncion (para el tiempo en que tenia la longitud dada) ; es su distancia mas arriba ó mas abajo de la linea de las fajas.

Fig.

DE LOS ECLIPSES.

934 DIcese de un astro qualquiera que padece eclipse, conforme hemos insinuado muchas veces, quando se nos hace invisible, sea porque *entre él y nosotros se interpone algun cuerpo opaco que nos le oculta*, sea porque interponiéndose entre él y el Sol algun cuerpo opaco no le hieren los rayos del Sol que le hacian visible para nosotros. Los Astrónomos se empeñan en el cálculo de los eclipses, porque sirven para determinar las desigualdades de la Luna, y las longitudes de los diferentes lugares de la Tierra, cuya determinacion es de suma importancia. El pronosticar los eclipses fue en todos tiempos un *motivo* de admiracion para los hombres, que *suelen inferir de aquí los* adelantamientos de la Astronomía, y los eclipses han sido tambien de muchísimo socorro para los Historiadores.

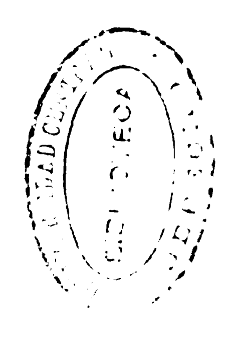
En lo que nos proponemos declarar acerca del cálculo de los eclípses, seguiremos el mismo plan que dejamos sentado desde el principio de este tratado; quiero decir que trataremos primero de los eclipses del Sol, y despues de los eclipses de los Satélites. Pero primero haremos algunas consideraciones generales, y fundamentales en toda esta materia.

935 Hemos visto (827) como el Saros de Halley, ó el Período Caldeo de Plinio, trahe por lo comun los eclipses en el mismo orden al cabo de 18 años; por lo mismo suministra este período un medio de preveer con poca di-

diferencia los dias en que podrá haber un eclipse de Sol ó de Luna. Fig.

Tambien se pueden reconocer los sicygies eclípticos por medio de las epactas, y este es el medio mas natural y mas general. La epacta astronómica de un año qual la usa Casini en sus tablas, es el número de dias, horas y minutos que han corrido desde la última conjuncion media quando el año empieza. Sácase esta epacta astronómica restando la época de la longitud media del Sol de la de la Luna, y convirtiendo la diferencia en tiempo lunar á razon de $12^{\circ}\ 11'\ 27''$ por dia; esta es la diferencia de los movimientos diurnos de la Luna y del Sol.

936 Si despues de averiguado que ha de haber un eclipse en un novilunio ó plenilunio, se quieren calcular sus circunstancias, se debe determinar primero la hora y el minuto en tiempo medio de la conjuncion ó de la oposicion verdadera en longitud, y la latitud de la Luna para aquel momento; el movimiento horario de la Luna en longitud y latitud, la paralaxe y el diámetro. Este preliminar es esencial en el cálculo de todos los eclipses.



Para esto, primero se calcula el lugar del Sol y el de la Luna, conforme diremos en la esplicacion de las Tablas, respecto de dos instantes diferentes, y con esto queda averiguado el movimiento horario de la Luna y del Sol, y la diferencia de su longitud respecto de un instante determinado.

Supongamos que para el dia primero de Abril de 1764 á $8^{h}\ 32'$ de la mañana se haya hallado el lugar de la Luna

Fig. na 54′ menos adelantado que el del Sol, y que el movimiento horario de la Luna menos el del Sol sea de 27′, es evidente que pues la Luna se acerca al Sol 27′ por hora, alcanzará al Sol al cabo de dos horas; porque 27′ son á una hora como 54′ son á dos horas. Luego la *conjuncion verdadera* será á 10^h 32.′

En conociendo el tiempo de la conjuncion se halla en las tablas para el mismo instante, la latitud de la Luna, su paralaxe, su diámetro, y el diámetro del Sol; tambien debe saberse el movimiento horario de la Luna en *latitud*, y para esto se calcula la latitud de la Luna respecto de dos instantes diferentes.

937 En sabiendo la hora de la *conjuncion* y el movimiento horario de la Luna, se debe buscar *la inclinacion de su órbita respecto de la eclíptica*; primero la inclinacion de la órbita verdadera, despues la de la órbita relativa. Esto es indispensable en todos los eclipses de Luna, y tambien de Sol quando se quieren averiguar sus fases respecto de diferentes paises de la tierra. Esta es la razon por qué miramos este punto como uno de los preliminares generales del cálculo de los eclipses.

938 Quando se calcula una conjuncion de dos planetas, ó de un planeta con una estrella, un *apulso* ó un eclipse, basta saber la cantidad que el uno de los astros se acerca al otro, esto es, el movimiento relativo; por egemplo, en un eclipse de Sol se pregunta con qué velocidad y en qué direccion la Luna se vá acercando al Sol. Para averi-

riguar este punto basta determinar quanto la longitud de un Fig.
planeta excede la del otro en el discurso de una hora, y quanto una latitud excede la otra en el mismo intervalo de tiempo. Lo que causa una conjuncion ó un eclipse, no es el movimiento real, total y absoluto de cada uno de los dos planetas, sino el exceso que el uno de los dos movimientos lleva al otro.

939 Se puede, pues, desatender al movimiento del uno de los dos planetas, con tal que se le dé al otro la diferencia de los dos movimientos; quiero decir, que suponiendo que no se mueve mas que el uno de los dos, se le debe hacer mudar de longitud y latitud respecto del otro, quanto muda realmente por la combinacion de los dos movimientos juntos; por este medio se determinará la conjuncion aparente de los dos astros del mismo modo que si se llevasen en cuenta los dos movimientos.

940 Así, para calcular una conjuncion de dos planetas, solo se considera el movimiento relativo, esto es, el movimiento del uno respecto del otro, y se supone fijo ó inmobil al uno de los dos. Este supuesto simplifica el cálculo y en nada altera el estado real de las cosas; porque si un planeta camina $36'$ en una hora, y el otro $2'$, es evidente que no mudarán sino $34'$ el uno respecto del otro, y estarán uno de otro á la misma distancia, que si manteniéndose el uno inmobil, no hubiera tenido el otro mas que un movimiento de $34'$.

Sean *P* y *A* los dos planetas en conjuncion; *PR* = 148.
AB,

Fig. *AB*, el movimiento horario del uno de los dos planetas en
148. longitud, esto es, paralelamente á la eclíptica; *AC*, el movimiento horario del otro planeta. La diferencia *BC* de los dos movimientos es el movimiento horario relativo del planeta, pues habiendo adelantado el primer planeta la cantidad *PR* igual á *AB*, y el segundo planeta la cantidad *AC*, no discrepa la longitud del uno de la longitud del otro sino la cantidad *BC*, esto es, lo mismo que si quedándose el uno en *P*, el otro no hubiese andado mas que el arco *AG* = *BC* saliendo del punto *A*.

941 Lo propio diremos del movimiento en latitud. Supongamos que el planeta que ha caminado *PR* en longitud, se haya movido *RD* en latitud, de modo que su movimiento verdadero sea *PD*. Supongamos que el otro planeta se haya movido tambien en latitud *CE*, y al mismo tiempo *AC* en longitud; quiero decir, que su movimiento propio haya sido en realidad *AE*; la diferencia de los dos movimientos horarios en latitud *RD* y *CE*, ó la cantidad *FE* será el movimiento horario relativo en latitud, ó la cantidad que un planeta se aparta del otro en latitud. Se podrá, pues, suponer fijo el planeta *P*, tomar *AG* y *GH* en lugar de *BC* y *FE*, y suponer que el planeta *A* ha andado la órbita relativa *AH*.

149. Tambien se podrá hacer un triángulo *MNO*, cuyos lados *MN* y *NO* sean iguales con los movimientos horarios relativos *BC* y *FE* en longitud y latitud, el ángulo *OMN* será la inclinacion de la órbita relativa, y *MO* el movimiento horario en la órbita relativa. Se podrá suponer que

que manteniéndose el un planeta fijo en *M*, el otro ha andado *MO*. Manifiesta este supuesto que los dos planetas discreparán sea en longitud sea en latitud lo mismo que quando se le daba á cada uno su movimiento propio, todo sucederá, pues, entre ellos, y todas las apariencias serán las mismas que ántes; el supuesto de la órbita relativa *MO* no hará mas que simplificar el cálculo, reduciendo á uno solo los dos movimientos. Fig.

942 En el triángulo *MNO* tenemos estas proporciones *MN*: *NO* :: *R*; tang *OMN*, y cos *OMN*: *R*:: *MN*: *MO*. Luego para hallar la inclinacion de la órbita relativa, y el movimiento horario en la misma órbita, se harán estas dos proporciones: *La diferencia de los dos movimientos horarios en longitud es á la diferencia de los movimientos en latitud, como el radio es á la tangente de la inclinacion relativa.* Despues, *el coseno de la inclinacion relativa es al radio, como la diferencia de los movimientos horarios en longitud es al movimiento horario* MO *en la órbita relativa.*

943 En estas dos proporciones se supone que los planetas siguen un mismo rumbo así en longitud como en latitud; pero si el uno fuese directo y el otro retrogrado, esto es, si la una de las dos longitudes fuese creciente y la otra menguante, se debería tomar la suma de los movimientos horarios en longitud, y no su diferencia. Asimismo, si la una de las latitudes fuese creciente y la otra decreciente del mismo lado de la eclíptica, esto es, si la una fuese septentrional y la otra austral, se deberá tomar por el movimien-

Fig. miento horario en latitud la suma de los movimientos en latitud en lugar de su diferencia.

944 En los eclipses de Luna no se considera el Sol como el uno de los dos planetas, sino el punto opuesto al Sol. Este punto opuesto al Sol, que es el centro de *la sombra de la* Tierra, tiene el mismo movimiento horario en longitud que el Sol, y se debe considerar por consiguiente como el mismo Sol. Por no tener el Sol movimiento alguno horario en latitud, solo se atiende al de la Luna en las dos proporciones de antes (942).

945 En el cálculo de los eclipses de Luna basta añadir 8″ á la diferencia de los movimientos horarios en longitud, para sacar el movimiento relativo, y se escusa con esto la segunda analogía.

946 En los eclipses de Sol, quando se han de calcular por una operacion gráfica no mas, basta conocer con diferencia de 5′ la inclinacion de la órbita lunar. Entonces siempre se puede suponer que la inclinacion es de 5° 40′; pero si se hubiese de calcular rigurosamente el eclipse, ó si se tratára de un eclipse de estrella por la Luna, se deberá buscar el movimiento horario de la Luna en longitud y latitud, y egecutar la proporcion espresada (942).

De los Eclipses de Sol.

947 Los eclipses de Sol provienen de la interposicion de la Luna que en algunas de sus conjunciones pasa directamente por entre nosotros y el Sol, ocultándonosle en to-

todo ó en parte. El *Eclipse* es *total* quando la Luna nos tapa enteramente el Sol, siendo el diámetro aparente de la Luna mayor que el del Sol. Los *Eclipses anulares* son aquellos en que la Luna se vé toda entera sobre el Sol; siendo mayor el diámetro del Sol, forma al rededor de la Luna un anillo, ánulo ó una corona luminosa, tal fue el eclipse del dia primero de Abril de 1764. Fig.

Los eclipses de Sol son mucho menos frecuentes que los de Luna, respecto de un lugar determinado; porque como la Luna es mucho menor que la Tierra, la sombra que arroja solo puede cubrir una porcion muy pequeña de la Tierra, y las mas de las veces la punta del cono umbroso no llega hasta la Tierra, como sucede en los eclipses anulares.

948 Llamamos *eclipses centrales* aquellos en que la Luna no tiene ninguna latitud aparente en el instante de la conjuncion; entonces su centro parece en el centro mismo del Sol. Los eclipses centrales son ó totales ó anulares, conforme hemos dicho poco ha.

949 Por ser sumamente dificultosa la teórica y el cálculo de un eclipse solar, tenemos por conducente apelar á un método mecánico, digamoslo así, para darlo á entender, procurando escusen los ojos á la fantasía parte del trabajo que le cuesta enterarse de este punto. Declararemos, pues, una operacion gráfica, por medio de la qual se podrá calcular un eclipse de Sol, con diferencia de algunos minutos, para todos los paises de la Tierra, valiéndonos de un globo terrestre, con tal que primero se egecuten algunos cál-

Fig. cálculos preliminares, que dentro de poco individualizaremos.

950 Con la mira de manifestar los fundamentos de esta operacion gráfica, diremos como suceden los eclipses en la superficie de la Tierra, en el caso mas *sencillo*; recordando primero un principio que es preciso tener incesantemente á la memoria, y es, que el Sol está tan distante de nosotros, que podemos considerar como sensiblemente paralelos los rayos que desde el centro del Sol vienen á los diferentes puntos de la superficie de la Tierra. *El punto T,*
150. que suponemos sea el centro de la Tierra, vé el centro del Sol con el rayo *TS*; el punto *E* que está en la superficie de la Tierra, vé el centro del Sol con otro rayo *EO* que no forma con el segundo mas que un ángulo de $9''$ (598), y con el qual concurre por lo mismo á una distancia inmensa, y por consiguiente este rayo es sensiblemente paralelo al primero. Se puede, pues, suponer que la linea *EAO* paralela á *TLS*, es la linea en la qual el punto *E* de la Tierra vé el centro del Sol.

951 Sin embargo, si se quiere llevar en cuenta la paralaxe del Sol, y suponer que el rayo *OE* se aproxima á *ES* para formar con él en el centro del Sol un ángulo de $9''$, toda la diferencia consistirá en rebajar $9''$ del ángulo *TEA*, con tirar una linea *ER* que forme con *EO* un ángulo *REO* de $9''$, y entonces el punto *E* de la Tierra verá en la linea *ER* el centro del Sol, pues *ER* y *TS* ván á juntarse en el Sol donde forman un ángulo de $9''$, que es con efec-

to

to la paralaxe del Sol, entonces la linea *LA* parecerá 9″ menor. Basta imaginar que el rayo *GS* concurre en *S* con el rayo *TS*, para hacerse cargo de que el espacio que los rayos del Sol *ST* y *SG* interceptan, se vé desde la Tierra en un ángulo *LGS* que es la diferencia de los ángulos *GLT*, *LSG*, esto es, de las paralaxes de la Luna y del Sol; bien que se debe suponer el punto *S* á una distancia inmensa. Fig. 150.

952 Si la Luna se hallare en *L* en el instante de la conjuncion, el observador puesto en el punto *K* de la superficie de la Tierra, verá un eclipse central del Sol (948), pues verá la Luna en el rayo mismo *TKLS* en el qual vé al Sol. Sea *AL* una porcion de la órbita lunar trazada antes de la conjuncion, yendo desde *A* á *L*, ó de occidente á oriente. Ya que el punto *E* de la Tierra vé el centro del Sol sobre la linea *EAO* (950), síguese con evidencia que quando la Luna esté en el punto *A* de su órbita, ocultará el Sol, y formará un eclipse central respecto del observador puesto en *E*, porque entonces el centro de la Luna, igualmente que el del Sol parecerán sobre la misma recta *EAO*.

Si la Luna gastare una hora en andar la porcion *AL* de su órbita, el eclipse se verificará respecto del punto *E* de la Tierra, una hora antes que respecto del punto *K* ó respecto del centro *T* de la Tierra; quiero decir, una hora antes de la conjuncion, que suponemos se verifique en el punto *L*.

953 Al espacio *AL* le llamaremos el *Radio de proyeccion*, porque es el espacio al qual se refieren los

Fig. puntos *E* y *K* de la Tierra. como sobre un plano de proyeccion.

954 El punto *E* de la Tierra, el primer punto desde el qual se verá la Luna sobre el Sol, tendrá el eclipse central quando la Luna estuviere en *A* (952), correspondiendo el centro de la Luna al centro del Sol. Pero antes de estar en *A*, el centro de la Luna ha estado en un punto *M*, tal que entonces el limbo *B* de la Luna tocaba al limbo del Sol, porque pareciendo en *A* el centro del Sol, el borde de su disco parece en *B* distante de *A* como unos 16′ (752), el centro *B* de la Luna distaba entonces del centro *A* del Sol una cantidad igual á la suma de los semidiámetros *AB* y *BM* del Sol y de la Luna, y este era el principio del eclipse para el observador puesto en *E*, ó el primer instante en que vió el limbo de la Luna tocar el limbo del Sol.

955 La parte *AL* de la órbita lunar se vé en un ángulo *AEL* igual al ángulo *ELT* que es la paralaxe orizontal (289) de la Luna; luego la parte *ML* parece igual á la suma del semidiámetro *BM* de la Luna, del semidiámetro *BA* del Sol, y de la paralaxe orizontal de la Luna que es igual á *AL*. Así, el punto *E* de la Tierra verá empezar el eclipse luego que la distancia *ML* de la Luna al punto *L* de la conjuncion fuere igual á la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna, y de la paralaxe orizontal de la Luna, de la qual se restarán para mayor precision 9″ (951). Asimismo el punto *G*, el último y mas orien-

oriental de la Tierra, verá acabarse de todo punto el eclipse, quando la Luna, despues de pasada la conjuncion, estuviere distante del punto *L* la misma cantidad, esto es, la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna, y de la paralaxe orizontal de la Luna. Fig. 150.

956 Si la Luna estuviere en *C*, de modo que *AC* tambien sea igual á la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna, el punto *E* de la Tierra tambien verá el centro *C* de la Luna distante del centro *A* del Sol, la suma de los semidiámetros; quiero decir, que verá los limbos del Sol y de la Luna tocarse y acabarse el eclipse, pues el centro del Sol parece en *A*, y el de la Luna en *C*, á una distancia *CA* igual á la suma de los semidiámetros.

Pero entretanto que la Luna está en *C*, y el punto *E* de la Tierra vé acabarse el eclipse, otro punto *D* de la Tierra que vé el centro del Sol por el rayo *DC* paralelo á *TS*, vé el centro de la Luna sobre el centro del Sol; quiero decir, que tiene un eclipse central; lo propio se debe decir de todos los demás puntos de la Tierra que corresponden perpendicularmente debajo de diferentes puntos de la linea *ACL*.

957 En el mismo tiempo que el punto *E* de la Tierra vé acabarse el eclipse, porque se tocan los limbos del Sol y de la Luna, quando el centro de la Luna está en *C*, y el punto *D* vé el eclipse central en el mismo instante, los puntos de la Tierra situados entre *E* y *D* vén el eclipse de diferente magnitud. Así, el punto *F* de la Tierra, que vé el centro del Sol sobre la paralela *FH*, vé la distancia apa-

Fig. 150. rente de la Luna *C* al Sol *H* en un ángulo *CFH*. Si se supone que la linea *CH*, tomada en la órbita lunar *LCHAM*, sea 6 dígitos ó la mitad del diámetro aparente del Sol, menor que la distancia *CA*, el punto *F* de la Tierra verá el limbo de la Luna sobre el centro del Sol. Con efecto, el punto *F* vé el centro del Sol en *H*, y el de la Luna en *C*; si *CH* es cabalmente igual al semidiámetro de la Luna, el limbo de la Luna caerá en *H*, esto es, sobre el centro mismo del Sol, y el eclipse será de 6 dígitos para el punto *F* de la Tierra, porque *CH* es 6 dígitos menor que la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna. Asimismo, si *CH* fuese 2 dígitos no mas, ó una sexta parte del diámetro solar menor que dicha suma, la Luna anticipará ó cogerá 2 dígitos no mas del Sol, y el eclipse será de la misma cantidad.

958 Por consiguiente para determinar el punto *F* de la Tierra donde el eclipse debe parecer de 1, 2, 3, &c. dígitos, se practicará lo siguiente. 1.° se tomará *LA* igual á la paralaxe orizontal de la Luna. 2.° se tomará *AC* igual á la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna. 3.° se tomará *CH* igual á 1, 2, 3 &c. dígitos. 4.° se bajará una perpendicular *HF* á la Tierra (esto es, al plano del círculo de la Tierra que es perpendicular á la linea de los centros), y quedará determinado el punto de la Tierra donde el eclipse deberá parecer de 1, 2, 3 &c. dígitos, estando la Luna en *C*.

959 Hasta aquí hemos supuesto que la órbita *LB* de la Luna pasase por la linea de los centros *SLT*, y que la Lu-

Luna en conjuncion no tuviese latitud alguna; veamos lo que sucederá quando la Luna en conjuncion tuviere alguna latitud. Desde luego es indispensable hacerse cargo de que quanto acabamos de decir del punto *M*, debe entenderse igualmente de otro punto qualquiera que estuviere á la misma distancia de los puntos *T* y *L*; supongamos que la linea *LM* (igual á la paralaxe de la Luna, mas la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna) gyre al rededor del punto *L*, y trace un círculo cuyo plano sea perpendicular á *LT*, de suerte, que todos los puntos de este círculo estén á iguales distancias del punto *T*; este será el plano del *Círculo de Proyeccion*, y no atenderemos mas que á él en lo que digéremos, aplicándole todo lo que acabamos de decir respecto de la figura. Es evidente que los diferentes puntos del círculo colocado en la region de la Luna, y trazado sobre *LA*, corresponden á los diferentes puntos de la circunferencia de la Tierra, del mismo modo que el punto *A* corresponde al punto *E* de la Tierra.

Fig. 150.

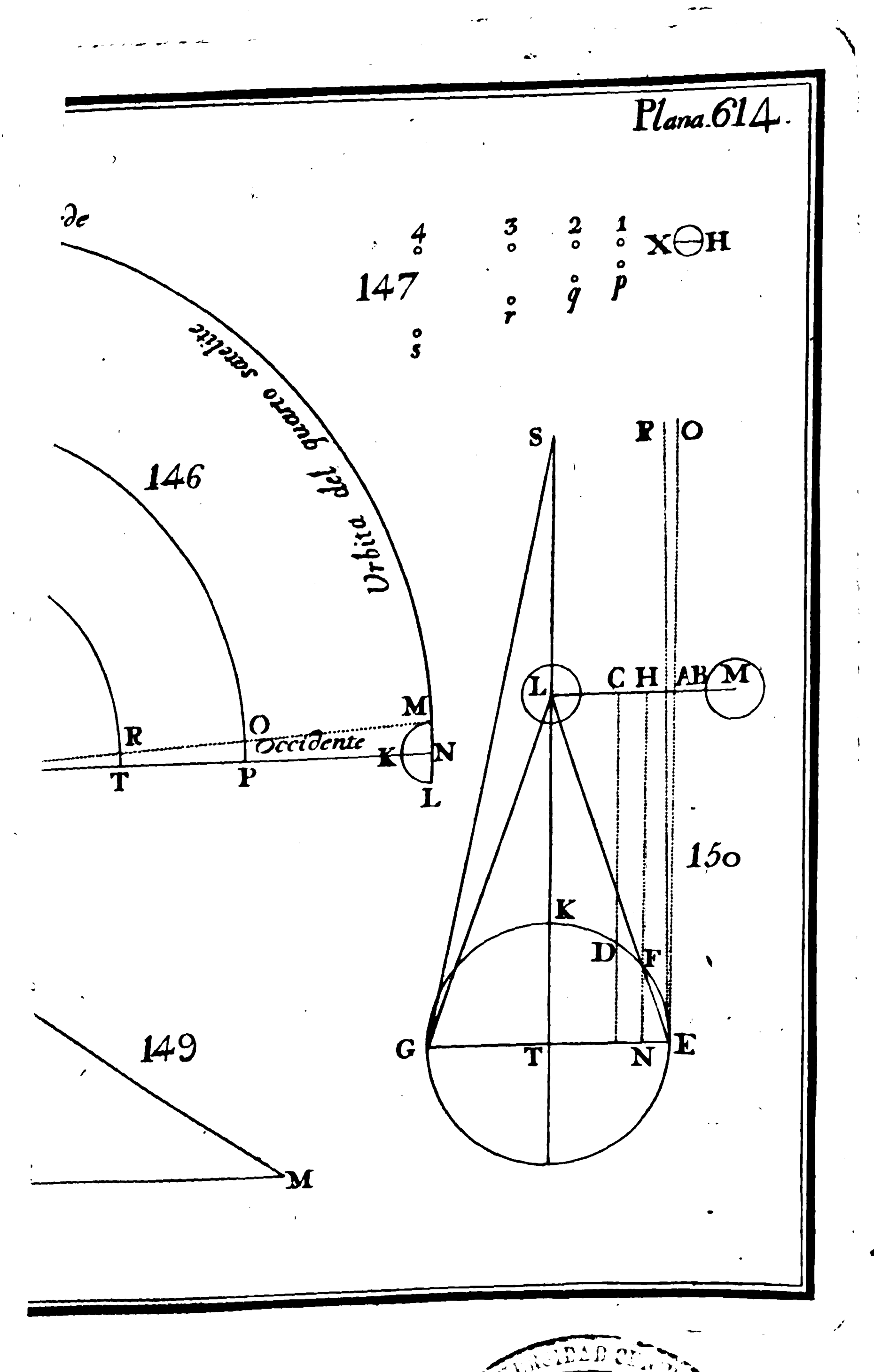
960 Sobre el radio *LB*, el mismo que *LM* de la figura antecedente, trácese un círculo *BCD* sobre el plano de proyeccion; trácese tambien otro círculo *AEFR*, cuyo radio *LA* sea igual á la paralaxe de la Luna (de la qual se restarán $9''$ para mayor exactitud (951)); quando la Luna se acercáre bastante á la conjuncion para que su centro llegue á estar sobre algun punto *K* de la circunferencia *BCD*, el eclipse empezará respecto de algun punto de la superficie de la Tierra (955). 151.

Asimismo, quando el centro de la Luna estuviere so-

Fig. bre algun punto *V* de la circunferencia *AVE* del círculo de proyeccion, parecerá que el centro de la Luna corresponde al centro del Sol, y empezará el eclipse á ser central para algun punto de la superficie de la Tierra, esto es, para aquel que se hallare directamente debajo del punto *V*, ó cuya proyeccion fuere *V*.

961 El *Eclipse general* de Sol es el que se calcula para la Tierra en general, sin indagar á que pais se refiere; de este modo consideramos primero un eclipse de Sol, antes de empeñarnos en determinar sus circunstancias respecto de un pais determinado de la Tierra. En el instante que la distancia *LK* del centro de la proyeccion al centro de la Luna es igual á la suma de los tres semidiámetros del Sol, de la Luna, y de la proyeccion, el eclipse de Sol empieza para un punto de la Tierra que corresponde directamente al punto *I* (954), cuya proyeccion está en *I*; este es el principio del eclipse general. Asimismo, quando la Luna ha llegado al punto *G* de su órbita, bastante remoto para que la distancia *LG* sea igual á los tres semidiámetros, el borde de la Luna se aparta del borde del Sol respecto del último de todos los paises de la Tierra donde pudo haber habido eclipse, este es el fin del eclipse general. La perpendicular *LM* tirada á la órbita, señala el medio del eclipse general.

962 Para determinar el tiempo del medio del eclipse general, consideraremos el triángulo *LMH*, rectángulo en *M*. En este triángulo conocemos el ángulo *HLM* igual á la inclinacion de la órbita relativa (942), y la hypotenusa



de
Orbita del quarto satelite
146
147
4 3 2 1 X H
p q r s
R O M T P K N L
Occidente
149
M
150
S P O
L C H A B M
K D F
G T N E

sa *HL* igual á la latitud de la Luna, se multiplicará el seno del ángulo *MLH* por el lado *LH*, y saldrá el valor del lado *HM*. Se le convertirá en tiempo á razon del movimiento horario de la Luna, y resultará el intervalo entre la conjuncion y el medio del eclipse. Este intervalo se restará del instante de la conjuncion, si la latitud de la Luna fuere creciente, esto es, si la Luna hubiere pasado su nudo; pero se le sumará con el tiempo de la conjuncion, si la Luna se fuere acercando á su nudo; y quedará determinado el tiempo del medio del eclipse general. Fig.

963 El círculo de proyeccion *AER* representa el disco de la Tierra, ó la imagen del emisferio alumbrado de la Tierra trasladado á la Luna. La linea *VX* es la porcion de la órbita lunar que será andada todo el tiempo que durare el eclipse total, así como la linea *KG* es la porcion de órbita que será andada desde el primer instante que la penombra tocará el disco de la Tierra en algun punto *I*, esto es, en que algun punto de la Tierra verá al Sol eclipsado, hasta el último instante en que la penombra dejará la Tierra en *F*, estando entonces en *G* el centro de la Luna. Por consiguiente la longitud *KG* de la órbita lunar comprehendida entre los puntos *K* y *G*, nos dará á conocer la duracion del eclipse; así como el medio *M* de la linea *KG* nos dará á conocer el tiempo del medio del eclipse general. La linea *KG* está dividida en dos partes iguales por la perpendicular *CM*, por ser iguales los lados *LK* y *LG*; lo propio digo de la cuerda *VX*; luego el punto *M* señala el medio del eclipse

Fig. general, cuya duracion representa *KG*, y el medio del eclipse central le representa *VX*.

Apliquemos esto á un caso particular. En el eclipse del dia primero de Abril de 1764, el tiempo verdadero de la conjuncion qual le señalaban las tablas, era $10^h\ 32'\ 7''$ de la mañana en París, la latitud para el mismo tiempo $40'\ 4''$, la inclinacion relativa $5°\ 43'\ 40''$, el movimiento horario compuesto $27'\ 10''$. Se harán estas dos proporciones: $R : 40'\ 4'' :: \text{sen } 5°\ 43'\ 40'' : 4'\ 0''$, valor de *LM*, y $27'\ 10'' : 60'\ 0'' :: 4'\ 0'' : 8'\ 50''$; se restarán estos $8'\ 50''$ de la hora de la conjuncion, porque la latitud de la Luna iba creciendo, y saldrán $10^h\ 23'\ 17''$ para el medio del eclipse general en el meridiano de París.

Del mismo triángulo *HLM* se sacará el valor de la perpendicular *LM* por medio de esta analogía: $R : \cos 5°\ 43'\ 40'' :: 40'\ 4'' : 39'\ 52''$; esta es la mínima distancia de la Luna al centro de la proyeccion al tiempo del medio del eclipse.

964 El princípio del eclipse general para el meridiano de París, se halla con igual facilidad. En el triángulo *LKM* rectángulo en *M*, conocemos la perpendicular *LM* (963), y la hypotenusa *LK* igual á la suma de los tres semidiámetros del Sol, de la Luna y de la proyeccion; se buscará el lado *MK*, se le convertirá en tiempo (963), y restando este tiempo del tiempo del medio del eclipse en *M*, sacaremos el tiempo del principio del eclipse general en *K*; y sumándole, saldrá el fin del eclipse en *G*.

Por

Por egemplo, en el eclipse de 1764, el lado LM Fig. era de $39' 52''$, la suma de los semidiámetros de la proyeccion y de la penombra, esto es, de la paralaxe de la Luna, y de los semidiámetros del Sol y de la Luna, era de $1^{\circ} 24' 58.''$ Se formará su suma y su diferencia; se sumarán sus logaritmos, se tomará su mitad, y se la añadirá el logaritmo constante 0,344115 (que es la diferencia entre el logaritmo del movimiento horario, y el de 1^{h} ú $3600''$), se sacará el logaritmo de $9948''$ en $2^{h} 45' 48.''$ Luego el principio del eclipse general será á $7^{h} 37' 29''$ de la mañana, y el fin á $1^{h} 9' 5''$ de la tarde.

965 El principio del eclipse central sucede quando la Luna está en el punto V, donde su órbita corta el círculo de proyeccion. Porque entonces el centro de la Luna, el centro del Sol y el borde de la Tierra están sobre una misma linea, y el punto de la Tierra cuya proyeccion está en V, vé el centro de la Luna sobre el centro del Sol.

En el triángulo LMV, rectángulo en M, conocemos la perpendicular LM (963), y la linea LV que es el radio de la proyeccion; buscaremos el lado MV, le convertiremos en tiempo, quiero decir, que buscaremos quanto tiempo gasta la Luna en andar VM, y restando este tiempo del tiempo del medio del eclipse, sacaremos el tiempo que será en París, quando el eclipse empezará á ser central para algun punto V de la Tierra.

Para el eclipse de 1764, por egemplo, tenemos LV =

Fig. $= 53' 59'' = 3239''$; $LM = 39' 52'' = 2392''$, sacaremos $MV = 36' 24''$, cuya cantidad convertida en tiempo dá $1^h 20' 24.''$ Restando esta media duracion del medio del eclipse $10^h 23' 17''$, saldrá el principio del eclipse central $9^h 2' 53''$, y añadiéndola al medio del eclipse, saldrá el fin $11^h 43' 41.''$

966 Los cálculos que acabamos de egecutar para el eclipse general, se pueden hacer gráficamente. Porque en trazando una figura grande, cuyo radio *LB* sea igual á la paralaxe orizontal, ó esté dividido en tantos minutos quantos hay en la paralaxe, la linea *LH* igual á la latitud de la Luna, y el ángulo *MLH* igual á la inclinacion aparente de la órbita lunar; se tomará en la misma escala una cantidad igual al movimiento horario de la Luna en su órbita aparente, y se la llevará desde *H* á *N*. Se señalará en *H* la hora y el minuto de la conjuncion, y en *N* una hora menos, por este medio se dividirá la órbita *GK* en horas y minutos, y se verá á qué hora la Luna se halló en *K*, en *V*, en *M*, en *X*, y en *G*.

967 Resta determinar ahora quáles son los diferentes paises de la Tierra que están en *V* y *X*, quando la Luna llega allá, esto es, sus longitudes y latitudes. Mas adelante diremos un método para calcular estos puntos por Trigonometría; bien que solo se debe usar en casos extraordinarios, y para observaciones de muchísima importancia. El tiempo que en esto se gastaría mas vale ocuparle en calcular observaciones yá hechas á fin de inferir sus consecuen-

cias,

cías, que en pronosticar con tan escrupulosa puntualidad las que se han de verificar. Fig.

968 Por ahora diremos cómo se averigua lo propuesto sin mas auxilio que el de un globo. No supone este método aparato alguno; basta una pieza de madera *GVAE*, cuyo ancho *VA* sea igual al diámetro del globo 152. que sirve, y la altura igual al radio del globo, ó un poquito mas.

Supongo un globo que tenga por lo menos 8 pulgadas de diámetro, representado en el círculo *OE*; el radio de este globo debe representar el radio de la Tierra; así *LA* se tomará por la paralaxe de la Luna; como en la figura 150, quiero decir, que se le debe suponer, por egemplo, de 54′, porque la paralaxe de la Luna en el eclipse de Sol de 1764, al qual aplicamos toda esta doctrina, era de 54.′

969 Como no tenemos arbitrio para mudar el diámetro del globo en cada eclipse de Sol, se deberán calcular las diferentes partes de la figura, esto es, el movimiento horario de la Luna, y los diámetros del Sol y de la Luna, segun los diferentes eclipses, reduciéndolos á esta escala. Así, la paralaxe actual, por egemplo, 54′ es á 4 pulg. ó 48 lineas, como 31′, suma de los semidiámetros, son á 27 $\frac{1}{2}$ lineas que se llevarán al travesaño *LA*, que debe representar la órbita de la Luna.

970 Podrá escusar estas reglas de tres el que se valiere de una escala compuesta de muchas lineas paralelas, y divididas en 60 partes por lineas tiradas al traves, qual la des-

cri-

Fig. cribiremos mas adelante, y la pinta la figura 161, suponiendo igual al radio del globo que sirve, la linea señalada 60. Pero si la paralaxe fuere de 54′, será la escala mas larga que el radio del globo, en la razon de 60 á 54. En esta escala se tomarán los minutos del movimiento horario, y de los dos semidiámetros del Sol y de la *Luna*, para que el número de los minutos sea menor.

151. 971 La linea *BLD* representa una porcion de la eclíptica; se la añadirá una linea *OLQ* para que represente una porcion del equador; haciendo el ángulo *ALO* igual al ángulo de posicion (446), ó al complemento del ángulo de la eclíptica con el meridiano (993); el punto *O* estará debajo de *A* en los signos descendientes, esto es, desde 21 de Junio hasta 21 de Diciembre. *La suma del ángulo* *ALO* y de la inclinacion de la órbita, ó su diferencia, segun fueren los casos, determinará el ángulo de la perpendicular *LM* con el meridiano universal, que es el mismo que el ángulo de la órbita aparente con el equador. Se tomarán en la figura con un compas los arcos *OV*, *QX*, y se señalará un número igual de grados sobre el orizonte del globo, contando desde los puntos de oriente y occidente; esto es, desde las intersecciones del equador con el orizonte del globo.

152. Se levantará el polo del globo sobre su orizonte la cantidad de la declinacion boreal del Sol, se bajará si la declinacion fuese meridional. Se colocará la pieza *GVAE* de modo que un borde del travesaño superior *VA* corres-

pon-

ponda perpendicularmente encima de los dos puntos seña- Fig.
lados sobre el orizonte del globo; en esta disposicion, el tra- 151.
vesaño *VA* representará la órbita de la Luna. Tambien se deberán tomar en la figura 151 los tiempos de la órbita lunar que corresponden á *V* y *X*, se escribirán sobre el pie *TS*, al qual suponemos se le haya encolado una faja de papel blanco, y tendremos un intervalo *AV*, que se dividirá en minutos de tiempo, del mismo modo que se dividió la órbita *VX* de la Luna (966), ó sinó, se hará uso del movimiento horario, y no se señalará mas que el tiempo del medio del eclipse en el medio *L* del travesaño.

Solo faltará colocar el globo á la hora que le conviene; así, como en el eclipse de 1764 la Luna estaba en *A* á $9^h\ 3'$, se le dará vuelta al globo de modo que París esté en *C*, esto es, $2^h\ 57'$ al occidente del meridiano universal *MP*, en el qual se supone fijo el Sol, mientras que todos los paises de la Tierra pasan succesivamente por delante de él en virtud de la rotacion del globo de occidente á oriente (977).

972 Estando colocado de este modo el globo terrestre para la hora de París, estará tambien colocado para todos los demás paises, y suponiendo la Luna en *A*, el punto de la Tierra que corresponde perpendicularmente debajo de la Luna, será el pais donde el eclipse parece central en aquel mismo instante (956). Por consiguiente con bajar una plomada desde el punto *A*, si el orizonte del globo está bien á nivel, ó con colocar el ojo perpendicularmente encima del punto *A*, se verá corresponder sobre el

glo-

Fig. globo el punto de la Tierra que se buscaba, del qual se señalará la longitud y latitud.

973 En el punto *A* se colocará el centro del círculo cuyo radio *AD* sea igual á la suma de los diámetros del Sol y de la Luna; se podrá hacer un círculo de carton, colocándole paralelamente al orizonte del globo, estando su centro en *A*; ó sinó, se hará circular un compas que tenga una punta en *A*; se repararán todos los puntos del globo que se hallaren corresponder perpendicularmente debajo de la circunferencia de dicho círculo, y estos serán los que verán los bordes del Sol y de la Luna tocarse en el mismo instante; esto es, los que verán el principio del eclipse.

974 Se hará otro círculo cuyo radio sea menor que el precedente una quarta parte del diámetro del Sol, esto es, 3 dígitos (en el año de 1764 fueron 8′); ó sinó, se quitará una parte igual del mismo círculo que sirvió para la
153. misma fase, conforme representa la figura; ó sinó, se disminuirá la abertura del compas que sirvió en la operacion precedente. Entonces la circunferencia del círculo despues de quitarle los 3 dígitos, ó la abertura del compas, paseán-
152. dola al rededor del punto *A*, señalará en el globo por medio del plomo, todos los puntos de la Tierra donde el Sol padece eclipse de 3 dígitos no mas. La razon de esto se saca de lo dicho (957 y 958).

975 Del mismo modo se podrán hacer otros círculos para los eclipses de 2, 3, 4, 5 dígitos &c. disminuyendo 2, 3 dígitos &c. el radio del círculo de la penombra, es-

esto es, del círculo cuyo radio era igual á la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna. Se podrá rebajar un solo círculo cuya circunferencia esté dividida en 12 partes y el radio tambien en 12 partes, y cuyos doce sectores vayan en diminucion como el caracol de un relox de repeticion, siendo cada uno menor que el precedente un dígito ó la dozava parte del diámetro del Sol, tomado en la misma escala que la paralaxe orizontal, y el movimiento horario (970). Paseando un plomo sobre las circunferencias de estos círculos, se señalarán sobre el globo los paises que en aquel instante tendrán el eclipse de un dígito ó 2 &c. Fig.

Si se coloca en *L* en medio del travesaño *AV*, el centro de estos círculos, y se hace la misma operacion, despues de puesta la muestra *P* del globo á $10^h\ 23'$, que es el medio del eclipse general, se hallarán todos los paises que á $10^h\ 23'$ tienen el eclipse de un dígito, dos dígitos, &c. Por este medio se puede trazar sobre un globo ó un mapa la figura de todos los puntos que tendrán un eclipse central, ó que tendrán un eclipse de un dígito, dos dígitos, &c.

Método para determinar las fases de un eclipse de Sol por medio de las proyecciones.

976 El método que hemos declarado para hallar por medio de un globo los paises de la Tierra que han de ver un eclipse de Sol, no sería bastante exacto para hallar, con diferencia de uno ó dos minutos no mas, el principio y fin del eclipse en un lugar qualquiera, á no ser que fuera el globo

muy

Fig. muy grande y muy perfecto. Pero lo conseguiremos facilmente por medio de una figura de proyeccion, y de una elipse trazada con cuidado; la operacion será mas exacta y tan sencilla como la del globo. Antes de dar las reglas, conviene tener muy presente la teórica que acerca de las proyecciones ortográficas dejamos sentada (*56 y sig.*).

977 Las principales lineas de la proyeccion están
154. pintadas en la figura. *ST* es la linea tirada desde el centro del Sol al centro de la Tierra, cuya linea llamamos la *Linea de los centros*; *IL* es un plano que pasa por el centro de la Tierra perpendicularmente á la linea de los centros. Este plano forma el círculo de iluminacion, y separa la parte iluminada *IDL* de la parte obscura *LVI*; *PO*, el ege de la Tierra; *EQ*, el diámetro del equador; *PELOQIP*, el *Meridiano universal*, esto es, el que pasa continuamente por el Sol, al qual llegan succesivamente los diferentes paises de la Tierra en virtud de la rotacion diaria de nuestro globo; *ED*, es la declinacion del Sol ó su distancia al equador; el arco *PI* es la elevacion del polo mas arriba del plano de proyeccion; esta altura es igual á la declinacion del Sol, porque si de los ángulos rectos ó quadrantes de círculo *PE* y *DI* se quita la parte comun *PD*, quedará $PI = DE$ que es la distancia del Sol al equador *E*, ó su declinacion.

978 Tomando los arcos *EG* y *QF* iguales á la latitud de un lugar de la Tierra, de París, por egemplo, la linea *GH* perpendicular al ege *PO*, que es el coseno de la latitud *EG*, será el radio del paralelo de París, ó del círcu-

lo

lo que anda París cada dia con el movimiento diurno de la Tierra. Desde los puntos *G*, *F*, *H* que son los estremos y el centro del paralelo de París, bajaremos perpendiculares *GM*, *FR*, *HN*; los puntos *M*, *R*, *N* donde estas perpendiculares encuentran el círculo de proyeccion *IL*, serán las proyecciones de los estremos y del centro del paralelo. Fig. 154.

979 Así, la distancia *TM* del centro *T* de la proyeccion al borde interior *M* de la proyeccion del paralelo de París, es igual al seno del arco *GD* ó de la diferencia entre *EG* que es la latitud de París, y *DE* que es la declinacion del Sol. La distancia *TR* del centro *T* de la proyeccion al estremo mas apartado *R* del páralelo de París, es igual al seno del arco *VF*; este arco *VF* es igual á la suma de los arcos *VQ*, *QF*, de los quales el uno es igual á la declinacion del Sol, y el otro á la latitud de París. Por consiguiente *la distancia del centro de la proyeccion al vértice del paralelo es igual al seno de la suma de la latitud del lugar y de la declinacion del Sol.*

Por lo que mira á la proyeccion del polo *P*, se hallaría con bajar desde el punto *P* una perpendicular á la linea *TI*; esta perpendicular señalaría un punto distante del centro C una cantidad igual á *TP*. cos *PTI* ó *TP*. cos declin. ☉ (58).

980 La distancia *TN* ó el espacio de la proyeccion que está entre el centro *T* de la proyeccion, y el centro *N* del paralelo es igual á *TH*. cos *HTN*; pero *TH* es el

Fig. seno de la latitud de París, *HTN* es igual á *PI* y á *DE*,
154. esto es, á la declinacion del Sol; luego *TN* es igual al producto del seno de la latitud del lugar dado por el coseno de la declinacion del Sol para el momento dado, tomando por radio el radio mismo de la proyeccion.

981 El punto *D* de la Tierra es el que tiene *el Sol á* su zenit; luego otro punto qualquiera *E* que dista del primero la cantidad *DE*, tiene el Sol distante de su zenit la misma cantidad *DE*. Síguese de aquí que tomando una linea *TA* en la proyeccion, y convirtiéndola en arco para sacar *DE*, se sacará la distancia del Sol al zenit ó el coseno de su altura respecto del lugar de la Tierra, que está proyectado en el punto *A*, y la linea *TA* seno del arco *DE* será su proyeccion.

982 Síguese tambien de lo mismo, que *TA* espresa la paralaxe de altura para el lugar de la Tierra que está proyectado en *A*, porque *TL* que es la paralaxe orizontal es tambien el seno total; luego *TA* que es el coseno de la altura tambien será la paralaxe de altura (que siempre es $= p \,.\, \cos h$); luego en general *la distancia de un pais de la Tierra al centro de la proyeccion, es igual á la paralaxe de altura*; tomando el radio de la proyeccion por la paralaxe orizontal. Solo es de advertir que es la paralaxe que conviene á la altura del Sol, y no la que convendría á la altura de la Luna; porque los diferentes puntos de la proyeccion son aquellos á los quales se refiere el Sol visto desde los diferentes puntos de la Tierra. Pero en el método de las pro-

proyecciones no se atiende á la corta diferencia que hay entre la altura del Sol y la de la Luna. Fig.

983 Refiriendo ó proyectando el paralelo de París ó el círculo cuyo centro es *H*, y *GF* el diámetro, en el plano *ITL*, se transforma allí (60) en una elipse, y esta es la elipse que se debe trazar en el papel, para referir á ella las fases del eclipse. Pero antes hemos de prevenir que se puede trasladar á la region de la Luna el plano de proyeccion *ITL*, y que allí será la elipse de todo punto la misma que sobre el plano *ITL* que pasa por el centro de la Tierra, pues estará comprehendida entre lineas paralelas á *TDS*, y que llegan hasta la Luna.

Sea *NO* el diámetro de la Tierra perpendicular al rayo del Sol, ó el diámetro del círculo limitador de la luz y de la sombra; *OAN*, el emisferio iluminado; *OVN*, el emisferio obscuro de la Tierra; *OK* y *NM*, dos lineas dirigidas ácia el Sol, y que suponemos paralelas entre sí pues falta poco para que lo sean (950); *XY*, un plano perpendicular á la linea de los centros y á los rayos del Sol, que llamaremos *plano de proyeccion*; *MGK*, un círculo trazado sobre dicho plano paralelo é igual al círculo limitador; á este círculo *MGK* le llamaremos *círculo de proyeccion* (959), porque es realmente la proyeccion ortográfica (56) del disco de la Tierra en la region de la órbita lunar. 155.

984 Tomamos por plano de proyeccion el que está

Fig. en la region de la órbita Lunar, y pasa por la distancia á que está la Luna, aunque podríamos tomar otros planos que pasasen ó por el Sol ó por la Tierra. Pero el que pasa por la Luna es mas acomodado, por ser el movimiento de la Luna en dicho plano realmente qual le observamos desde la Tierra, y desde él parece la Tierra del tamaño que señalan las tablas, que es la paralaxe orizontal de la Luna; siendo así que tomando otro plano de proyeccion deberíamos reducir á él el movimiento de la Luna, su diámetro, su latitud, y esto haría mas penoso el cálculo.

Sea *PCR* el ege de la Tierra, elevado sobre el círculo de iluminacion ó el círculo limitador (983) la cantidad *PCN* igual á la declinacion del Sol (977). Sea *ABDE* el círculo ó paralelo diurno que anda en virtud del movimiento de rotacion un punto de la Tierra como París. Sean *AF*, *DG* lineas paralelas á los rayos del Sol, cuyas lineas tambien supondremos paralelas entre sí, por ser insensible la diferencia (950). Estas lineas forman un cilindro oblicuo cuya base es un círculo; y cuyas secciones perpendiculares al ege todas son elipses, pues son la proyeccion de un círculo mirado oblicuamente (61).

La proyeccion de la Tierra entera será un círculo *MK* paralelo é igual al círculo limitador, conforme llevamos dicho. Pero como el paralelo de París ó el círculo *ABDE* no es paralelo al plano de proyeccion *XY*, no se pue-

puede proyectar sino en forma elíptica (60). Esta es la elipse que vamos á trazar; es la misma sobre el plano de proyeccion *XY*, que sobre el plano que pasare por *NO*, esto es, el plano del círculo de iluminacion, pues estas dos elipses están comprehendidas entre líneas paralelas *FA*, *GD*. Por consiguiente quanto dejamos sentado (979) acerca de la figura allí citada se verificará respecto de la elipse que vamos á trazar sobre el círculo de proyeccion que pasa por la órbita Lunar. Fig.

985 El círculo de proyeccion cuya formacion y medida hemos dado, le representa tambien separadamente esta figura. *C* es el centro de la proyeccion, esto es, el punto donde estaría la Luna en el instante de la conjuncion, si el eclipse fuese central para el centro de la Tierra. *CE* es el semidiámetro aparente de la proyeccion, visto desde la Tierra, igual á la diferencia de las paralaxes orizontales de la Luna y del Sol; *KMG* es la órbita de la Luna que atraviesa el círculo de proyeccion; *CM*, la perpendicular bajada á la órbita de la Luna que señala el medio del paso de la Luna por el círculo de proyeccion, ó el medio del eclipse general (962); *P*, la proyeccion del polo de la Tierra (979); *DPC*, el *meridiano universal* ó el que pasa constantemente por el Sol, mientras que los diferentes países de la Tierra se acercan á este meridiano para tener el medio dia succesivamente unos despues de otros, yendo de occidente á oriente, ó de la derecha á la izquierda. 156.

Fig. En las operaciones que siguen se debe tener presente que la distancia de la Luna al punto de la proyeccion que representa un lugar de la Tierra, señala la distancia aparente de los centros del Sol y de la Luna para el mis-
155. mo lugar. Supongo un punto *A* de la Tierra, proyectado en *F* por un rayo *AF*, de modo que *FH* es su distancia al centro de la proyeccion. El mismo lugar *A* de la Tierra vé el Sol sobre la linea *AF* (952); si el centro de la Luna corresponde entonces al punto *L* de la proyeccion, el observador puesto en *A* verá la Luna distante del Sol la cantidad *FL*. Así la distancia aparente sobre el plano de proyeccion entre la Luna *L* y el punto *F* que corresponde al punto *A* de la Tierra, será *FL*. Conviene figurarse que siendo el punto *F* la proyeccion del punto *A* de la Tierra, al punto *F* de la proyeccion se refiere el Sol quando se le observa desde el punto *A*; se puede, pues, decir indistintamente que un punto *F* de la proyeccion señala el lugar *A* de la Tierra, por egemplo, la situacion de París, ó que señala el lugar del Sol visto desde París.

986 En virtud de lo demostrado (957 y sig.) es facil de trazar la elipse de proyeccion para un lugar y un
157. dia dado. Sea *AXB* el círculo de iluminacion, ó el círculo de la Tierra que es perpendicular al rayo del Sol ó á la linea de los centros, de suerte que hemos de suponer el Sol mas alto que la figura, correspondiendo perpendicularmente al centro *C* de la Tierra. *XPDC* es un diá-

me-

metro del meridiano universal en el qual se supone inmobil el Sol; *AB* es un diámetro del equador, perpendicular al meridiano universal; *P* es la proyeccion del polo, esto es, el punto del plano de proyeccion al qual el polo corresponde perpendicularmente (979). Se tomarán los arcos *BL*, *AK* iguales á la latitud del lugar; *KM*, *KN*, *LR*, *LV*, iguales á la declinacion del Sol; esto es, *CE* igual al seno de la suma de la latitud del lugar y de la declinacion del astro, y la linea *CF* igual al seno de la diferencia de los mismos arcos, los puntos *E* y *F* serán los estremos de la proyeccion del paralelo (979); y por lo mismo *EF* será el semiege menor de la elipse del paralelo, dividiendo *EF* en dos partes iguales en el punto *G*, este será el centro de la elipse. Fig. 157.

987 Para hallar el ege mayor que es el mismo diámetro del paralelo, despues de tomados los arcos *AK* y *BL* iguales á la latitud de París ó del lugar para el qual se quiere trazar la proyeccion; la linea recta *KL* será el diámetro del paralelo, pues hemos visto (978) que el semidiámetro del paralelo ó el semiege de la elipse no es otra cosa que el coseno de la latitud del lugar.

988 Pero la cuerda *KL* solo sirve para hallar la longitud del diámetro del paralelo, no señala su situacion; porque el círculo *AXB* no es un meridiano sobre el qual se puedan contar las latitudes; sino un círculo que le es igual, porque en un mismo globo todos los círculos son iguales.

Hemos visto (986) como para hallar el centro

Fig. G de la elipse que es la proyeccion del paralelo, basta
157. dividir en dos partes iguales la distancia *FE* que señala sus dos estremos, por el centro *G* se tirará despues una linea *SGX* paralela é igual á *KL*, esta linea será el diámetro del paralelo de París, ó el ege mayor de la elipse que se debe trazar.

989 En conociendo el ege mayor *SX* y el ege menor *EGF* de la elipse que buscamos, será muy facil trazarla, esto es, hallar todos sus puntos de hora en hora. Con dividir el círculo *HLQ* que es el paralelo de París, en 24 horas en los puntos señalados 1, 2, 3 &c. tendremos certeza de que cada punto *g* del paralelo parecerá sobre la perpendicular al ege mayor *SX*, qual es *gf* tirada por cada punto de division. Porque sea la que fuere la inclinacion del círculo *HXQ*, y la oblicuidad en la qual se le verá, el punto *g* de su circunferencia siempre corresponderá perpendicularmente al punto *b* del ege mayor, y la abscisa *Gb* de la elipse será el seno mismo del arco *Hg* del paralelo.

Para hallar tambien la ordenada *bb* de la elipse, al mismo punto, se considerará que por verse oblicuamente la linea *gb* del paralelo, ha de parecer de la longitud *bb*, de suerte que *bb* sea á *gb*, como el seno de la oblicuidad (que es la declinacion del Sol) es al radio, ó como *HG* es á *EG*. Luego $HG : gb :: EG : bb$; así, siendo *gb* el coseno de $30°$ para el radio *HG*, será *bb* el coseno de $30°$ para el radio *GE*.

Una

990 Una vez que las abscisas de la elipse *PbX* son los senos de 15, 30, 45° &c. las ordenadas *bb* han de ser los cosenos de los mismos arcos, tomando por radio la mitad del ege menor. Se señalarán, pues, empezando desde el centro *G* los puntos 1, 2, 3, tales que *G*1 sea el seno de 15°; *G*2, el seno de 30°; &c. para el radio *GH*. En los puntos 1, 2, 3 se levantarán á *GX* perpendiculares que sean los cosenos de 15, 30, 45° para el radio *FG*, y estas perpendiculares terminarán el contorno de la elipse del paralelo. Fig. 157.

991 Para que halle con facilidad estos senos, y cosenos el que no tuviere á mano un compas de proporcion, desde el centro *G* trazará un círculo *XH* sobre el ege mayor, y otro círculo *EVF* sobre el ege menor, dividirá cada uno de ellos en 24 partes, si se contentase con 24 horas, ó en 48 si quisiere una elipse dividida en medias horas. Por estos puntos de division del círculo grande tirará lineas *gbf* paralelas al ege menor, y por los puntos de division del círculo chico, lineas como *ab* paralelas al ege mayor; estas, prolongadas irán á encontrarse con las primeras en puntos como *b* que formarán la elipse que buscare. Por egemplo, la segunda linea paralela al ege menor, la qual vá del punto 30 al punto 2, corta la segunda linea *ab* paralela al ege mayor *GX* en el punto *b*, que señala dos horas antes del meridiano; el punto correspondiente *c* á la izquierda señala dos horas despues de medio dia. De este modo se consigue para cada hora la proyeccion del paralelo de

Fig. de París, ó la situacion de París sobre el círculo de proyeccion, á todas las horas del dia.

158. 992 La figura representa una elipse trazada por este método para 26 grados de declinacion, pero se han omitido todas las lineas que han servido para la construccion. La parte inferior de la elipse sirve para quando la declinacion es septentrional; porque entonces la parte alum-
155. brada del paralelo, qual es *BAE*, parece la mas baja ó la mas meridional respecto del rayo solar *TS*.

158. La parte de la derecha ú occidental de la elipse sirve para las horas de por la mañana; ó si se tratare de una estrella fija, dicha parte sirve para antes del paso de la estrella por el meridiano, pues el movimiento de la Tierra es ácia oriente, sea sobre la Tierra, sea sobre la proyeccion que es su imagen. En los vertices del ege menor se señala 0 ó 12 horas, quando se trata del Sol, ó se señala allí mismo la hora del paso de la estrella por el meridiano, quando se trata de un eclipse de estrella por la Luna.

159. En la figura se ven los diámetros de las elipses que se hallarían para diferentes declinaciones, valiéndose del
160. mismo radio de proyeccion. La otra figura manifiesta á qué distancia pasarán todas estas elipses del vértice *S* de la proyeccion, esto es, la distancia *SV*. En medio de la
158. elipse se ven los lugares de los centros de estas diferentes elipses. El que quisiere las podrá trazar todas en otros tantos cartones diferentes, para calcular los eclipses de las estrellas por la Luna.

La

993 La situacion del círculo de latitud sobre el círculo de proyeccion, se puede hallar calculando el ángulo de posicion (446); pero para abreviar, quanto se pueda, la operacion gráfica de que daremos noticia dentro de poco (996), se podrá hacer uso del método siguiente: Supongo que *FGH* sea un arco del círculo de proyeccion igual al duplo de la oblicuidad de la eclíptica, quiero decir, que desde el punto *G* donde remata el meridiano *CG* de la proyeccion, se hayan tomado los arcos *GF* y *GH*, cada uno de $23^{\circ}\ 28'$. Sobre la tangente *GV* del arco *GF*, y desde el centro *G*, se trazará un semicírculo *VMX* y se le dividirá en 12 signos, como la eclíptica, empezando desde el punto *X* del lado del occidente, donde se señalará Aries, esto es, 0^{s} de longitud. Sobre este círculo se tomará un arco igual á la longitud del Sol ó de la estrella, pongo por caso *XM*; al diámetro *VX* se le bajará la perpendicular *MN*; y el punto *N* de la tangente *GNV* por donde pasará esta perpendicular *MN*, será el punto donde se deberá tirar el círculo de latitud *CN*.

Fig. 161.

994 Con efecto, *GN* es el coseno del arco *XM* ó de la longitud del Sol, para el radio *GV*; luego $GV : R :: GN : \cos \text{long} \odot$; esto es, $GN = GV \cos \text{long}$. Pero $GV = \tan 23^{\circ} \frac{1}{2}$ por construccion; luego $GN = \tan 23^{\circ} \frac{1}{2}. \cos.\text{long}$. y esto se reduce á la proporcion siguiente que dá el ángulo de posicion (392 y 560): el radio es al coseno de la longitud del Sol, como la tangen-

Fig. gente de la oblicuidad de la eclíptica es á la tangente del ángulo de posicion.

995 Tambien puede servir esta construccion para las estrellas fijas que la Luna encuentra, quiero decir, que se puede suponer el coseno de la latitud *igual* al radio (446); el error es insensible, pues *la latitud* de la Luna no llega á 6°; por manera que no hay $\frac{1}{180}$ de error que recelar, lo que no hace 8 minutos de grado sobre el arco *AF*. Pero 8 minutos son insensibles aun en una figura de un pie de radio. Para este fin damos *aquí* estos ángulos calculados para diferentes estrellas, y en la *cir-*
158. *cunferencia* de la figura van señalados los puntos donde se debe tirar el circulo de latitud para *diferentes* estrellas, qual es la γ ♍, esto es la estrella γ *de la constelacion* de Virgo, y se han escogido las estrellas mas hermosas que la Luna eclipse. Se echa de ver que todas aquellas cuya longitud está en el primero ó último quadrante de la eclíptica están á la derecha del meridiano *CS*, las
161. demas están á la izquierda. Porque en la figura los tres primeros y los tres últimos signos de longitud están en el quadrante de círculo 3*X*, que está al occidente ó á la derecha del punto *G*.

Ang. de posic. de τ de Sagitario, en 1750	5°	5′	35″
Aldebaran, en 1760......	9	32	12
Antares, en 1750...........	10	15	29
Antares, en 1760...........	10	12	10

τ

π de Escorpion, en 1750.......	12°	56′	50″	Fig.
π de Escorpion, en 1760......	12	53	45	
η de las Pleyadas, en 1750...	13	50	58	
α de Libra, en 1760..............	17	55	23	
γ de Capricornio, en 1750....	18	11	38	
δ de Capricornio, en 1750...	18	38	37	
η de Leo, en 1760................	19	56	21	
Régulo, en 1760....................	19	56	24	
λ de Virgo, en 1760...........	20	19	23	
θ de Virgo, en 1760...........	22	45	31	
γ de Virgo, en 1760...........	23	18	10	
η de Virgo, en 1760...........	23	27	56	

Como se hallan las fases de un Eclipse de Sol ó de Estrella, con la regla y el compas.

996 El principio y fin de un eclipse se pueden hallar por una operacion muy acomodada, con diferencia de menos de un minuto de tiempo, sin calcular las paralaxes. En la figura vá pintado un semicírculo de unas 6 pulg. de radio que representa la proyeccion de la Tierra en la órbita de la Luna (953). El radio *CR* está dividido en tantos 158.
minutos quantos caben en la diferencia de las paralaxes orizontales de la Luna y del Sol (951). El diámetro *CR* es paralelo al equador ; *CS*, es una porcion del meridiano universal ó del círculo de declinacion que pasa por la estrella ; *CK*, la distancia del centro de proyeccion al centro de la elipse hallada antes (980) ; *KF*,

el

Fig. el semiege de la elipse (987) igual al coseno de la
158. latitud del lugar para el qual se calcula el eclipse, de París por egemplo; *KQ*, la mitad del ege menor de la elipse, que es al ege mayor como el seno de la declinacion del astro es al radio. Dicha elipse *representa el paralelo de París*, ó el rastro del astro que deja señalado sobre el plano de proyeccion el rayo tirado desde París á una estrella cuya declinacion es de 26°.

997 La parte superior de la elipse es el arco diurno, ó aquel que debe servir quando la declinacion del Sol es meridional; la parte inferior *EHG* sirve para las declinaciones septentrionales (992).

998 Se tirará el círculo de latitud *CL* que está á la izquierda ó al oriente del meridiano *en el segundo y* tercer quadrante de longitud, ó en los signos descendientes; en los demas signos que son 9, 10, 11, 0, 1, 2 de longitud (995) está á la derecha ó al occidente.

999 Tomando la latitud de la Luna en el instante de la conjuncion sobre las divisiones de *CR* que sirve de escala, y llevándola desde *C* á *L* sobre el círculo de latitud, el punto *L* es el punto por donde debe pasar la órbita de la Luna, dándola la inclinacion correspondiente.

1000 Para trazar la órbita de la Luna, se tirará al punto *L* de la conjuncion una perpendicular *LM* al círculo de latitud; se tomará la cantidad del movimiento horario de la Luna, menos el del Sol, sobre las divisiones de *CR*, y se llevará este movimiento de *L* á *M*; se tomará-

mará tambien el movimiento horario en latitud, se le llevará de *M* á *N* paralelamente al círculo de latitud; al mediodia del punto *M*, si la Luna se vá acercando al norte; al norte, si la Luna se vá acercando al mediodia, esto es, si la latitud es boreal decreciente ú austral creciente. Por los puntos *L* y *N* se tirará la órbita de la Luna *INL*, se señalará en el punto *L* la hora y el minuto de la conjuncion; se señalará en *N* una hora menos; se dividirá *NL* en 60 minutos de tiempo, y se llevarán las mismas divisiones al otro lado del punto *L*, para hallar la situacion de la Luna de minutos en minutos una hora antes de la conjuncion y una hora despues. Si pareciere del caso, se podrán prolongar dichas divisiones mas allá. Fig. 158.

1001 Se señalarán sobre la elipse las horas que corresponden á las divisiones que se han hallado (991); es á saber, las 6 horas de la mañana á la derecha, ó á la parte occidental de la figura, y las 6 horas de la tarde á la parte oriental. Estas 12 horas se deberían colocar en la parte superior de la elipse si el Sol estuviera en los signos meridionales (992). Quando se trata de un eclipse de estrella, se escribe sobre el meridiano en *V* ó *Q* la hora del paso por el meridiano.

1002 En las divisiones de *CR* se tomará la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna, ó el semidiámetro de la Luna no mas, si se trata de un eclipse de estrella. Estando el compas con esta abertura, se verá si el momento de la conjuncion señalado en *L*, y el mismo minu-

Fig. 158. nuto de tiempo tomado en las divisiones de la elipse distan uno de otro la misma cantidad. El tiempo de la conjuncion será tambien en este caso el tiempo del principio ó del fin del eclipse; será el principio, si el punto G del paralelo estuviere al oriente del punto *L*; será el fin del eclipse, si el punto de la elipse señalado con la misma hora que el punto *L*, estuviere al occidente ó á la derecha del punto *L*.

1003 Si esta distancia de los puntos correspondientes sobre la elipse y sobre la órbita de la Luna fuese mayor que la suma de los semidiámetros, se plantará el compas ácia *I* á la derecha del punto *L* sobre la órbita de la Luna; se mirará si el punto *A* de la elipse señalado con el mismo número de horas y minutos que el punto *I* de la órbita, está á la izquierda de este la cantidad de los semidiámetros; si estuviere demasiado distante, se arrimará poco á poco la pierna derecha del compas sin mudar la abertura, hasta que la pierna izquierda halle un punto *A* de la elipse señalado con el mismo número de minutos que el punto de la órbita donde está la pierna derecha.

1004 Despues de hallados por este camino dos tiempos correspondientes el uno sobre la órbita, el otro sobre el paralelo, quales son los puntos *I* y *A*, señalados con la misma hora y el mismo minuto, y distantes la cantidad *IA*, de modo que el punto *I* de la órbita esté á la derecha ó al occidente del punto *A* del paralelo, será señal cierta de que este momento será el del principio del eclip-

eclípse. Porque hemos visto que el eclípse empieza para París quando la distancia entre el punto de la proyeccion al qual París corresponde, y el punto donde se halla la Luna en el mismo instante, es igual á la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna (955). Fig.

1005 La Luna camina ácia el oriente en su órbita desde *I* á *E*, y París camina en su paralelo de *A* á *B*, pero mas despacio, pues se necesitan 12 horas para andar la semielipse del paralelo de París, mientras que la Luna en 2 horas de tiempo anda en su órbita un trecho casi tan grande. Así, la Luna llegará al otro lado ó al oriente de París, y estará en *E* quando París no habrá llegado mas que á *B*; se hallarán otra vez á la misma distancia uno de otro, quiero decir, á una distancia *BE*, igual á la suma de los semidiámetros de la Luna y del Sol; y en hallando dos puntos *B* y *E* señalados con el mismo minuto, se sabrá con certeza el fin del eclipse.

1006 El medio del eclípse siempre es con cortísima diferencia el medio del intervalo de tiempo corrido entre el principio y el fin. Se buscará, pues, el minuto que estuviere en medio de estos momentos señalados en *I* y *E*, y el minuto que tambien estuviere en medio de *A* y *B*. La distancia entre estos dos puntos *D* y *G*, de los quales el uno está sobre la órbita, el otro sobre el paralelo de París, dará la mas corta distancia entre los centros de la Luna y del Sol, ó su distancia al tiempo del me-

Fig. dio del eclipse. Llevando con el compas esta distancia sobre las divisiones del radio *CR*, saldrá espresada en minutos y aun en segundos de grado; porque en una escala de un pie de radio, cada minuto coge mas de dos lineas, y se distingue facilmente en ella un intervalo de 5 ó 6''. Así, se hallará en minutos y segundos la distancia mas corta del centro de la Luna al centro del Sol ó de la estrella, al tiempo del medio del eclipse. Si el punto *D* de la órbita estuviere debajo del punto *G* del paralelo, será una prueba de que la Luna pasará al mediodia de la estrella.

1007 Para escusar dividir cada vez el radio *CR* de la proyeccion, en tantas partes quantas contiene la paralaxe, esto es, yá en 53', yá en 62', sin contar los que-
162. brados de minutos, se forma una escala cuyas lineas son mayores que el radio del círculo que ha de servir de proyeccion, quando la paralaxe es menor; y menores, quando la paralaxe es mayor. Por egemplo, si la paralaxe es de 54', esto es, una sexta parte menor que el radio de la proyeccion que siempre se supone de 60, se debe hacer uso de una escala en la qual el compas pueda señalar 54' en lugar de 60', y por consiguiente una escala que sea una sexta parte mayor; porque entonces esta escala, bien que dividida en 60 partes, no dará mas que 54 quando se la aplicare el radio de proyeccion, porque es mayor que este radio.

1008 Como el semidiámetro de la Luna siempre es los $\frac{6}{11}$ de la paralaxe, se podrá tirar una linea recta *CD* so-

sobre la escala, de modo que intercepte los $\frac{6}{11}$ de todas Fig.
las escalas de paralaxe, contando desde la linea señalada 10, 10′. Se tomará facilmente en esta escala el semidiámetro de la Luna que será, pongo por caso, de 17′, si la paralaxe fuere de 62′, y así de los demas; se tomará con el compas, sin que sea preciso saber su valor; aquí despreciamos el aumento del diámetro de la Luna que se verifica en diferentes grados de altura (832).

Quando se conoce la distancia mas corta *GD* de 158.
los centros del Sol y de la Luna, y se quiere inferir de ella la magnitud del eclipse, se debe llevar esta distancia sobre el diámetro del Sol, dividido en 12 partes ó 12 dígitos, donde se verá facilmente la parte eclipsada del Sol.

1009 Quando se trata de un eclipse de estrella, se practica lo mismo que respecto de los eclipses de Sol, teniendo presente 1.° que *CL* es la diferencia entre la latitud de la Luna y la de la estrella; 2.° que *EN* es el movimiento horario de la Luna no mas, pues la estrella no tiene ningun movimiento propio; 3.° que en los puntos *V* ó *Q* de la elipse se señala la hora del paso de la estrella por el meridiano, ó con mas exactitud, la diferencia entre su ascension recta y la del Sol para el tiempo del eclipse. 4.° Que se toma la distancia *IA* igual al semidiámetro lunar no mas.

Por egemplo, el dia 7 de Abril de 1749 por la mañana, Antares estuvo en conjuncion con la Luna á

Fig. $2^h\ 22'$ de la mañana; la paralaxe de la Luna era entonces de $57'\frac{1}{4}$, su movimiento horario $33'\ 12''$ en longitud, y $1'\ 56''$ en latitud decreciente; la latitud al momento de la conjuncion era de $3^\circ\ 45'\ 22''$, la de la estrella era de $4^\circ\ 32'\ 12''$; luego la Luna estaba $46'\ 50''$ al norte de la estrella.

Empiezo tirando el círculo de latitud *CL* al punto que conviene á la longitud de Antares $8^s\ 6^\circ\ 16'$ (995); en la linea que corresponde á $57'$ sobre la escala de las paralaxes, tomo una cantidad de $46'\ 50''$, y la llevo de *C* á *L* sobre el círculo de latitud; en el punto *L* tiro la perpendicular *LM.*

Sobre la misma linea de la escala de las paralaxes tomo el movimiento horario de la Luna $33'\frac{1}{5}$, y le llevo desde *L* á *M* sobre la perpendicular al círculo de latitud, llevo tambien $2'$ debajo del punto *M*, porque la Luna andaba $2'$ por hora ácia el norte, y el punto *N* señala el lugar de la Luna una hora antes de la conjuncion, ó á $1^h\ 22'$ de la mañana. Despues de señalado en *L* el momento de la conjuncion $2^h\ 22'$, señalo en *N* $1^h\ 22'$, y dividiendo el intervalo *LN* en 60 partes, señalo la situacion de la Luna de 10 en 10 minutos, conforme se vé en la figura desde $0^h\ 50'$ hasta $2^h\ 10'$.

La hora del paso de Antares por el meridiano de París es (414) $3^h\ 11'$, le señalo en el vértice *V* de la elipse, y señalo $2^h\ 11'$, $1^h\ 11''$ &c. sobre las otras divisiones de la elipse; subdivido los intervalos de 10 en

10

10 minutos, por lo menos en las horas en que parece que el eclipse puede suceder, esto es, que se acercan á la hora de la conjuncion. Fig.

Tomo en la escala el semidiámetro de la Luna, desde la linea 10, 10, hasta la linea *CD*, sobre la linea de 57′; paseando esta abertura de compas sobre la órbita de la Luna y sobre la elipse, veo que la una de las puntas estando en *I* sobre $1^h\ 2'$, la otra punta cae en *A* sobre la elipse, y encuentra tambien allí $1^h\ 2'$. Así, estando la Luna en *I* á $1^h\ 2'$, y la proyeccion de París ó el lugar aparente de la estrella en *A*, ha de haber un eclipse, siendo la distancia de la Luna á la estrella cabalmente igual al semidiámetro de la Luna, y esto supone un contacto de la estrella con el borde de la Luna.

1010 Paseo la misma abertura de compas del otro lado, avanzando ácia el oriente, y hallo que estando la una de las puntas en *E* sobre $2^h\ 11'$, la otra punta cae tambien en $2^h\ 11'$ sobre la elipse en *B*, este es el momento de la emersion. Ha andado, pues, la Luna la porcion *IE* de su órbita, desde el momento de la inmersion hasta el de la emersion, y el lugar aparente de la estrella ha mudado la cantidad *AB*. Acia el medio de este intervalo, estando la Luna en *D* y la estrella en *G*, se verificó la distancia mas corta; y se comprobará midiendo la distancia de minuto en minuto. Porque se echará de ver que en las inmediaciones de $1^h\ 36'$ deja de menguar, y despues crece. Llevando esta distancia mas corta *DG* so-

Fig. bre la linea 57 de la escala de las paralaxes, se halla de 6′, y esto está diciendo que el centro de la Luna ha pasado 6′ al medio dia de la estrella, ácia el tiempo de la conjuncion aparente.

158. 1011 Las operaciones que acabamos de especificar, suponen que la figura se haya trazado para Paris, porque la distancia *CK* del centro de la proyeccion al centro de la elipse, mengua quando la altura del polo crece (980). No obstante, dada una sola elipse conforme á la declinacion del Sol ó de la estrella de que se trata, podrá servir para todas las latitudes, colocando el centro *C* de la proyeccion á diferentes distancias del centro *K* de la elipse. Con efecto, esta distancia *CK* es igual á cos declin. sen latit. (980), en el supuesto de que *CR* sea el radio. Si se tomare por radio ó por escala el semidiámetro del paralelo, ó el coseno de la latitud, se deberá hacer esta proporcion: el coseno de la latitud es á 1000, como el valor de *CK* es á su valor en partes del paralelo, que será por consiguiente $\frac{\text{sen lat.}}{\text{cos lat.}}$ cos declin. pero $\frac{\text{sen}}{\text{cos}} =$ tang; luego $CK =$ tang. lat. cos declin. Así, *la distancia del centro de proyeccion al centro del paralelo ó de la elipse, es igual á la tangente de la latitud multiplicada por el coseno de la declinacion del astro*, tomando por unidad el semidiámetro del paralelo, ó el semiege *KF* de la elipse.

1012 Apliquemos esto á un caso particular. En el paso de Venus del año de 1761, la declinacion del Sol

era

era de $22^\circ 42'$. Supongo que se haya trazado la elipse Fig.
que corresponde á esta declinacion, esto es, una elipse cuyo ege mayor sea al menor, como la unidad es al seno de $22^\circ 42'$, y que se quiera usar esta elipse para la latitud de 10°; se añadirá el logaritmo de la tangente de 10° al del coseno de $22^\circ 42'$, buscando la suma entre los números naturales, se halla 0,163 para la distancia que hay entre el centro de la elipse y el centro del círculo que debe servir de proyeccion, suponiendo que el semiege de la elipse es la unidad, ó 163, suponiendo este semiege de 1000 partes. Se hallará del mismo modo la distancia que corresponde á las demas latitudes de 10 en 10°, para la misma declinacion de $22^\circ 42'$.

1013 Se debe buscar tambien la cantidad del radio de proyeccion para la latitud dada; pero es evidente que esto no es mas que la secante de la latitud del lugar, tomando por radio el semidiámetro del paralelo. Porque
si se tomara *DL* por radio de un círculo trazado desde el 157.
centro *L*, sería *CL* la secante del ángulo *CLD* igual al arco *LB*, que es la latitud del lugar. Se buscarán, pues, en las tablas de senos, &c. las secantes de cada latitud, y dividiendo el radio *DL* de la elipse en 1000 partes, se tomará en estas divisiones la cantidad del radio de cada proyeccion, pongo por caso 2000 para 60° de latitud, y estará determinada la cantidad del radio con el qual se debe trazar el círculo de proyeccion empezando desde el centro que se halló (1012). Este radio de

Fig. proyeccion es el que se ha de dividir en tantas partes quantas contiene la diferencia de las paralaxes; así la es-
162. cala de las paralaxes se debe aumentar en la proporcion de las secantes de las latitudes, y de este modo la misma elipse servirá para diferentes países, *haciendo* uso de diferentes escalas cuya descripcion daremos mas adelante.

1014 La tabla siguiente contiene el valor de la
158. distancia *CK* para París no mas. Por medio de esta tabla se han señalado en las inmediaciones del centro *K*, los puntos donde debe estar el centro de la elipse respecto de diferentes declinaciones; se echa de ver que el centro de la elipse que sirve para 28° de declinacion, está como unas 6 lineas, mas próximo al centro *C* de la proyeccion que el centro de la elipse que corresponde á cero, ó por mejor decir, de la linea recta que suple por ella quando la declinacion es nula.

Dis-

Fig.

Distancia entre el centro de la proyeccion y el centro de la elipse, para la latitud de París, en diferentes declinaciones, suponiendo el semiege de 100, 00, y el radio de proyeccion 151, 92.

Decl.	Dist. de los centros.	Decl.	Dist. de los centros.	Decl.	Dist. de los centros.
0	114, 35	10	112, 63	20	107, 47
1	114, 35	11	112, 26	21	106, 77
2	114, 30	12	111, 86	22	106, 04
3	114, 20	13	111, 49	23	105, 27
4	114, 10	14	110, 97	24	104, 48
5	113, 93	15	110, 47	25	103, 65
6	113, 74	16	109, 94	26	102, 79
7	113, 51	17	109, 37	27	101, 90
8	113, 25	18	108, 77	28	100, 98
9	112, 96	19	108, 13	29	100, 03
10	112, 63	20	107, 47	30	99, 05

1015 Por medio de esta tabla puede servir una sola elipse para diferentes latitudes; y se puede calcular un eclipse para muchos países de la Tierra sin trazar diferentes elipses. Por lo dicho (*986*) se trazaría sobre un mismo círculo de proyeccion una elipse para cada lugar. Las posiciones y tamaños de estas elipses serían diferentes; pero su elipticidad, su figura, la razon entre sus eges sería la misma, porque solo pende de la declinacion del Sol (*60*). Pero como cuesta mucho tiempo y mucha dificultad trazar las elipses, es mas acomodado quando hay cálculos que hacer para muchos lugares, guardar la elipse y mudar el centro del círculo de proyeccion y la longitud del radio. Daremos un egemplo de esto en otro lugar.

Mé-

Fig.

Métodos para calcular rigurosamente los Eclipses sugetos á las paralaxes.

1016 Hemos declarado con bastante individualidad como se puede hallar por medio de una operacion gráfica el principio y fin de un eclipse de Sol ó de estrella. Ahora declararemos los métodos rigurosos en que se hace uso del cálculo para hallar, sin omitir los segundos, los resultados que por medio de la operacion gráfica no se podian hallar sino con diferencia de dos minutos.

1017 Quando se calcula un eclipse de Sol con la mira no mas de pronosticarle en las efemérides, basta el método gráfico (996); sería gastar tiempo en valde empeñarse en calcularlos hasta los segundos, con una precision á la qual no corresponden las tablas, pues el error de las tablas de la Luna, que en algunas ocasiones llega á ser de un minuto, causa dos minutos de incertidumbre en el tiempo del principio y del fin de un eclipse.

Pero quando se ha observado un eclipse de Sol ó estrella, y se quiere hacer uso de él para hallar el lugar de la Luna, el tiempo de la conjuncion y el error de las tablas; entonces se debe hacer con suma precision el cálculo del eclipse, y se puede buscar su principio y fin por los métodos exactos que vamos á manifestar.

1018 Tres son los métodos que usan los Astrónomos para estas operaciones; el de las proyecciones; el del nonagésimo, y de los ángulos paralácticos; y finalmente de

de las paralaxes de altura, en cuya declaracion nos detendremos con alguna proligidad por ser en nuestro sentir el mas breve y el mas exacto. Fig.

1019 Antes de todo hemos de prevenir que quando un Astrónomo intenta calcular exactamente un eclipse, debe trazar una figura en la qual se señalen, al poco mas ó menos con la regla y el compas, los ángulos que se sacaren con el cálculo, y las lineas que se determinaren, segun su oposicion y magnitud. El que no lo hiciere así corre mucho riesgo de equivocarse añadiendo tal vez lo que debería restar; fuera de esto, esta prevencion que supongo se pondrá en práctica, ahorrará declarar con pesada individualidad las reglas y las excepciones que padecen en diferentes casos por lo tocante á la posicion de la Luna respecto del vertical, al círculo de declinacion y al círculo de latitud.

Cómo se calcula la Proyeccion.

1020 Entre los diferentes modos de calcular la proyeccion, preferiremos el de Casini, por ser el mas sencillo, y tomaremos por egemplo el eclipse de Sol del dia 28 de Febrero de 1710, de que hace uso el mismo Casini en sus tablas astronómicas, al qual aplicaremos el cálculo trigonométrico, siendo así que el citado Astrónomo se ciñó á la operacion gráfica.

Suponemos el tiempo del medio del eclipse general en 161.
T á $12^h\ 18'$; la distancia perpendicular *CT*, de $46'\ 31''$;
el

Fig. 161. el ángulo *ACT*, 22° 9′ 27″; el movimiento horario de la Luna en su órbita relativa, 27′ 10″; la diferencia de las paralaxes orizontales ó el radio de la proyeccion, 54′ 28″; el semiege mayor *DK*, 35′ 51″; el semiege menor, 4′ 59″; y la distancia *CD* del *centro de la proyeccion* al centro de la elipse = 40′ 36.″ Sea *O* el lugar de París sobre su paralelo *OAK*, y *L* el de la Luna en su órbita *LT*. Se pide la distancia aparente de los centros de la Luna y del Sol, ó el valor de la linea *OL*, á 11^h 43′ 30″, esto es, 34′ 30″ antes de la conjuncion. *Este es el* principio del eclipse que Casini halló por la operacion gráfica.

1021 Yá que el movimiento de la Luna es de 27′ 10″ en una hora, será de 15′ 37″ *en* 34′$\frac{1}{2}$ *de tiempo*, y tendremos *TL* = 15′ 37″; se dirá: *CT* es á *TL*, como el radio es á la tangente del ángulo *TCL* que se sacará de 18° 33′ 45″; despues se dirá *TL* : sen *TCL* :: *R* : *CL* que será de 2930″ ó 48′ 50.″

1022 Para hallar tambien el ángulo *OCA*, consideraremos que la distancia de mediodia á la hora dada 11^h 43′ 30″ es de 16′$\frac{1}{2}$, que corresponden á 4° 7′ 30″*; el* semiege mayor de la elipse multiplicado por el seno de 4° 7′$\frac{1}{2}$ dará *OB* = 155″, y el semiege menor multiplicado por el coseno de 4° 7′$\frac{1}{2}$ dará *DB* = 298″ (990), sumando *DB* con *CD* = 2436″, sacaremos *CB* = 2734.″

En el triángulo *BCO* rectángulo en *B*, del qual cono-

nocemos dos lados *CB*, *BO*, sacaremos el ángulo $OCB =$ Fig.
$3^\circ\ 14'\ 30''$, y la hypotenusa $CO = 45'\ 39.''$ La dife- 161.
rencia de los ángulos *OCB* y *TCB* dará el ángulo $OCT = 18^\circ\ 54'\ 57''$, la suma del ángulo *OCT* y del ángulo *LCT*, hallado antes de $18^\circ\ 33'\ 45''$, será el ángulo $OCL = 37^\circ\ 28'\ 42.''$ Se conocerán facilmente los casos en que se deberá tomar la suma ó la diferencia, reconociendo la situacion de los puntos *L*, *O* y *T*.

1023 En el triángulo *OCL* conocemos los dos lados *OC*, *CL*, y el ángulo *OCL* que forman; bastará, pues, buscar el lado *OL*, que es la distancia aparente de los centros, diciendo: la suma de los lados *OC*, *CL* que es $94'\ 29''$ es á su diferencia $3'\ 11''$, como la tangente de la semisuma de los ángulos incógnitos, $71^\circ\ 15'\ 39''$, es á la tangente de su semidiferencia $5^\circ\ 40.'$ Luego el ángulo *O* será de $76^\circ\ 56'$, de donde se inferirá finalmente el lado *OL* de $30'\ 30''$; esta es la distancia aparente de los centros del Sol y de la Luna á $11^h\ 43'\ 30.''$

1024 El momento para el qual hemos calculado sería el momento mismo del verdadero principio del eclipse, si hubiéramos hallado la distancia aparente igual á la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna; pero como esta distancia aparente es $28''$ menor que la suma de los semidiámetros que es de $30'\ 58''$, es prueba de que aun no habia empezado el eclipse. Se hará un cálculo parecido á este de la distancia aparente para $11^h\ 40'$, y se sacarán $63''$ de mas para la distancia de los centros. Por consiguien-

Fig. guiente en $3'\frac{1}{2}$ de tiempo la distancia aparente variaba $63''$, luego varía $28''$ en $1'\ 33''$. Se restará esta cantidad de la hora del primer cálculo $11^h\ 43'\ 30''$, y saldrán $11^h\ 41'\ 57''$ para el principio del eclipse. Por medio de dos cálculos como este se podria *trazar la órbita* aparente de la Luna, pero de esto hablaremos *bastante en* el método siguiente.

1025 Este cálculo de las proyecciones se funda en dos supuestos, de los quales pende *su sencillez*; es á saber, que la altura de la Luna es la misma que la del *Sol*, *y* que la paralaxe es proporcional al seno de la distancia verdadera del Sol al zenit; siendo así que es proporcional al seno de la distancia aparente de la Luna al zenit.

Cómo se calculan los Eclipses por el Nonagésimo.

1026 Quando se hace uso del Nonagésimo (856) en el cálculo de las paralaxes, no se puede hallar la distancia aparente de los centros, sin averiguar la diferencia aparente de longitud y latitud. Suponemos, pues, que para un instante dado, se quiera averiguar la distancia aparente de los centros del Sol y de la Luna; es preciso conocer para el mismo instante la paralaxe de longitud y la de latitud (873).

1027 Si la longitud de la Luna fuere mayor que la del nonagésimo, se deberá sumar la paralaxe de longitud con la longitud verdadera, para sacar la longitud aparente de la Luna. Pero si la longitud de la Luna fuere menor

que

que la del nonagésimo, se deberá restar la paralaxe. Fig.

1028 Se juntará la paralaxe de latitud con la distancia verdadera de la Luna al polo elevado de la eclíptica para inferir su distancia aparente al polo; haciendo el mismo cálculo para dos instantes, se sabrá si la Luna se acerca ó se aparta de la eclíptica.

1029 Se tomará la diferencia entre la longitud del Sol y la longitud aparente de la Luna para sacar la diferencia aparente en longitud. Sea *DE* una porcion de la eclíptica; *S*, el lugar del Sol en el momento para el qual se calcula; *L*, el lugar aparente de la Luna; *EL*, su latitud aparente; *SE*, su diferencia aparente de longitud con el Sol. En el triángulo *SEL*, rectángulo en *E*, conoceremos dos lados *SE* y *EL*, buscaremos la hypotenusa *SL*, que es la distancia aparente de los centros del Sol y de la Luna. Para esto se sumarán uno con otro los quadrados de los dos lados, y se sacará la raiz de la suma; ó sino, se harán las dos proporciones siguientes *SE* : *EL* :: *R* : tang *ESL*, y sen *ESL* : *R* :: *EL* : *SL*, distancia aparente de los centros. 163.

Por egemplo, se pregunta, ¿quál era la distancia aparente de la Luna al Sol el dia primero de Abril de 1764 á $9^h\ 10'$ de la mañana en París, cuya latitud es de $48°\ 50'$. Supongamos que la diferencia de longitud verdadera entre la Luna y el Sol fuese, segun las tablas, de $37'\ 11''$, y la latitud de la Luna $36'\ 21''$ boreal; su declinacion $4°\ 48'$, el lugar del Sol $0^s\ 11°\ 29'\ 25''$, la ascension rec-

Fig. recta del medio del cielo $21^{\circ} 54' 32''$; la longitud del nonagésimo $11^{s} 28^{\circ} 31' 55''$; la altura del nonagésimo $34^{\circ} 12' 30''$; la diferencia de las paralaxes orizontales en París $54' 0''$: se hallan para la paralaxe reducida al
138. punto *K* $54' 20'' 8$, la paralaxe de *longitud* (*861*) $6' 55'' 8$; la correccion del aplanamiento *suponiendo el* ángulo de la vertical y del radio de $19'$, es ....
$\frac{54' 0''. \text{ sen } 19'. \text{ sen } 23^{\circ}. \cos 11^{\circ} 29'}{\cos 48^{\circ} 50'. \cos 0^{\circ} 36'} = 10'' 6$ (*892*), la paralaxe cabal $7' 6'' 4$, y la distancia á la *conjuncion* aparente $30' 4'' 6$.

La primera parte de la paralaxe en latitud (*864*) $= 44' 57''$; la segunda parte (*866*) $+ 4''$; la correccion del aplanamiento (*890*) $\frac{54' 0''. \text{ sen } 19'}{\cos 48^{\circ} 50'} \left(\frac{\cos 23^{\circ}}{\cos 0^{\circ} 36'} - \text{sen } 4^{\circ} 48' \text{ tang } 0^{\circ} 36'\right) = 25''$; por manera que la paralaxe entera de latitud es $44' 36''$; siendo la latitud
163. verdadera $36' 21''$, la latitud aparente es $8' 15''$. Una vez conocidos los dos lados *EL*, *SE*, de los quales el uno es de $8' 15''$, y el otro de $30' 5''$, se hallará la hypotenusa ó la distancia aparente *SL* de los centros del Sol y de la Luna $31' 12''$.

Si se quisiere comparar esta distancia con la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna, se la deberán añadir $4'' \frac{1}{2}$ por razon de la inflexion de los rayos que hace parecer sobrado grandes todas las distancias de la Luna al Sol ó á las estrellas, y tendremos $31' 16'' \frac{1}{2}$ distancia aparente que para el tiempo del principio del eclipse, debe ser igual á la suma de los semidiámetros.

Si

1030 Si se tratase de un eclipse de estrella por la Luna ó de otro eclipse, en el qual la Luna tenga una latitud sensible, se deberá multiplicar la diferencia de longitud *HI* por el coseno de la latitud aparente *IL*, para sacar dicha diferencia *SE* en arco de círculo máximo en el parage donde se halla la Luna, que es la cantidad de que hemos hecho uso. Fig. 163.

1031 Una hora despues se repetirá el mismo cálculo, y se sacará otra distancia aparente *SF* de la Luna al Sol, y el ángulo *DSF*, por medio de la diferencia de longitud aparente *SD*, y de la latitud aparente *FD* (1029). Por este medio se conocerá tambien el movimiento aparente en longitud respecto del Sol, *ED* ó *AF*, y el movimiento aparente en latitud *AL*. En conociendo *FA* y *LA*, se calculará el ángulo *AFL*, que es la inclinacion del movimiento aparente, y la linea *LF*, que es el movimiento de la Luna respecto del Sol, en la órbita aparente ó sujeta á paralaxe. Este ángulo *AFL* puede pasar de 20° en algunos casos, como quando la Luna está en su nudo descendiente, y tiene el nonagésimo 0^s de longitud; porque entonces la mudanza de la paralaxe lleva la Luna del mismo lado que la inclinacion de su órbita, y esto aumenta la inclinacion aparente. Tendremos, pues, el ángulo *SLF*, igual á la suma de los dos ángulos *ESL*, *AFL*; en algunas ocasiones es igual á su diferencia. De aquí se inferirá el valor de la perpendicular *SB*, que es la distancia aparente mas corta de la Luna al Sol; y el ins-

Fig. tante en que la Luna estuvo en *B*, será el medio del eclipse; con suponer que la órbita aparente sea *rectilínea* en el discurso de una hora, cuyo supuesto es sensiblemente verdadero, dicha perpendicular dará la cantidad del eclipse de Sol.

Se supondrá *SL* igual á la suma de los *semidiámetros* aparentes del Sol y de la Luna; en conociendo *SL* y *SB*, se buscará la linea *BL*, se la convertirá en tiempo á razon del movimiento en la órbita aparente hallado antes, y se sabrá quanto tiempo habrá gastado la Luna en ir de *B* á *L*. Y como se conoce el tiempo del medio del eclipse en *B*, se conocerá tambien el momento del fin en *F*, y el del principio en *L*.

Se debe distinguir con cuidado esta *órbita aparente* sujeta á paralaxe, y que acabamos de determinar, de la *órbita relativa*, que se puede figurar aquí en otra linea *MN*. Téngase presente que en la órbita relativa se trata del movimiento verdadero de la Luna, visto desde el centro de la Tierra respecto del Sol, supuesto fijo en *S*; se determina por medio de las latitudes verdaderas *EM*, *DN*, que pueden ir ácia otra direccion, y ser de distinta denominacion que las latitudes aparentes *EL*, *DF*.

1032 Quando se quisiere averiguar con mucha precision la cantidad del eclipse, será menester calcular otras dos distancias aparentes, del mismo modo que hemos calculado *SF* y *SL*, pero mas inmediatas al medio *B* del eclipse, y valerse de estas nuevas distancias para hallar la perpen-

pendicular *SB*. Pero si la órbita aparente *FL* no fuere perfectamente rectilinea, conforme hemos supuesto mientras dura el eclipse, la diferencia es muy corta. Fig.

El diámetro aparente de la Luna requiere que se conozca su altura, con corta diferencia por lo menos, para determinar el aumento (832). Esta altura se puede determinar toscamente por medio de un globo; pero el que quisiere egecutar este cálculo con precision, tendrá que hacer por este punto, bien que de muy corto momento, todo el cálculo de la altura (442).

Cómo se calculan los Eclipses por medio de los ángulos paralácticos.

1033 Este método le tenemos por el mas breve, mas general y mas exacto; en él se hace uso de los ángulos paralácticos, conforme lo practicaron los Astrónomos antiguos, pero nosotros los usamos por un término mucho mas sencillo, llevando tambien en cuenta el aplanamiento de la Tierra, y todas quantas consideraciones puedan contribuir para la exactitud de los resultados. Consiste este método en hallar la diferencia de altura y azimut entre los dos astros que están en conjuncion, é inferir su distancia aparente, que es el fin que se lleva para averiguar el tiempo del principio y del fin del eclipse, ó para trazar la órbita aparente.

La primera operacion que para este cálculo se requiere consiste en hallar la altura del Sol ó de la estrella que

Fig. la Luna ha de eclipsar. Suponemos que se haya calculado por las tablas para un momento dado, la longitud y latitud del Sol ó de la estrella; la longitud y latitud verdaderas de la Luna y su paralaxe orizontal, la declinacion del Sol y de la estrella, y sus ascensiones rectas; finalmente el ángulo de posicion (446) de la estrella y su ángulo horario (423); se calculará su altura (442), y el ángulo del vertical con el círculo de declinacion (443).

1034 Por egemplo, el dia primero de Abril de 1764 las tablas señalan la conjuncion verdadera á $10^h\ 32'\ 7''$ de la mañana, siendo la latitud de la Luna de $40'\ 4''$ boreal á la hora de la conjuncion; la diferencia de los movimientos horarios en longitud $27'\ 10''$; el movimiento horario de la Luna en latitud, $2'\ 43''\frac{1}{2}$ del mediodia al norte; su paralaxe $54'\ 9''$, la del Sol $9''$. Si se pregunta la distancia aparente entre los centros del Sol y de la Luna para las $9^h\ 10'$ de la mañana, se buscará la declinacion del Sol para el mismo instante $4^\circ\ 47'\ 36''$, su altura

164. $33^\circ\ 7'\ 30''$; el ángulo *ZSO* del vertical *ZS* con el círculo de declinacion *SO*, $32^\circ\ 4'\ 17''$; el ángulo de posicion *ZSP*, $23^\circ\ 0'\ 0''$; la diferencia de longitud *AB* entre la Luna y el Sol, $37'\ 11''$, y la latitud de la Luna *SB*, $36'\ 21''$ boreal.

1035 El ángulo que llamamos propiamente *paraláctico*, aquel que distinguiremos generalmente con este nombre, quando no le calificáremos mas particularmente, es

es el que forma el vertical *ZSD* con el círculo de latitud Fig.
PSE, que siempre es perpendicular á la eclíptica. El ángulo paraláctico *PSZ* no se puede calcular sin dividirle en dos partes que se calculan separadamente; es á saber, el ángulo de posicion *PSO* (446), y el ángulo *OSZ* del círculo de declinacion ó del meridiano *OS* que pasa por la estrella, con el vertical *ZS* (443).

1036 Estos ángulos siempre los tomaremos del lado del polo elevado; quiero decir, del lado del norte para nuestros climas septentrionales, sea obtuso ú agudo el ángulo del vertical y del círculo de declinacion, y consideraremos la parte del círculo de latitud ó del círculo de declinacion comprehendida entre el astro y el polo boreal de la eclíptica ó del equador. Considerando los ángulos por este término, se practicarán las reglas siguientes, que se conciben sin ninguna demostracion, solo con mirar un globo ó una figura.

Estos dos ángulos se deben sumar uno con otro despues del paso por el meridiano, si fuere en los signos ascendientes 9, 10, 11, 0, 1, 2, ó antes del paso por el meridiano en los signos descendientes. Pero se toma su diferencia restando el menor del mayor, quando el astro no ha pasado todavía por el meridiano, y está en los signos ascendientes, ó quando ha pasado el meridiano, y se halla en los signos descendientes.

1037 Se mirará si con el resultado de esta adicion ó sustraccion, el círculo de latitud está al oriente del ver-

Fig. tical del lado del norte, ó si está al occidente. El círculo de latitud está al oriente del vertical antes del paso por el meridiano, y al occidente despues del paso por el meridiano; excepto el caso en que el ángulo del vertical con el círculo de declinacion, siendo menor que *el ángulo de posicion*, se hubiere restado de él. Porque entonces el círculo de latitud está al occidente del vertical, si fuere antes del paso por el meridiano, y al oriente del vertical, si fuese despues del paso por el meridiano. Tendremos que recordar muchas veces esta distincion.

Por egemplo, el dia primero de Abril de 1764, á $9^h\ 10'$ de la mañana, se habia de tomar la diferencia de los dos ángulos $32°\ 4'\ 17''$, y $23°\ 0'\ 0''$, y salieron
164. $9°\ 4'\ 17''$ para el ángulo paraláctico *ZSP*; el círculo de latitud *PS* estaba á la izquierda ó al oriente del vertical, en el caso de este egemplo, pues era antes del paso por el meridiano, y no se halló que el ángulo de posicion fuese el mayor.

1038 *El Ángulo de Conjuncion* es un ángulo que es nulo en la conjuncion, y crece tanto mas quanto mas tiempo se pasó desde la conjuncion, siendo todo lo demás igual.
164. Sea *S* el Sol ó la estrella cuyo eclipse se calcula; *A*, la Luna; *SB*, la latitud de la Luna; *BA*, la diferencia de longitud entre la Luna y el Sol; *SA*, la linea que vá desde el lugar verdadero del Sol al de la Luna; el ángulo *ASB* es el que llamamos *Ángulo de Conjuncion*. Fórmale en el centro del Sol ó de la estrella *S* el círculo de latitud *SB* con la li-

línea *SA* tirada al lugar verdadero de la Luna. Hállase Fig.
por medio de esta proporcion : ***La diferencia de latitud es á la diferencia de longitud, como el radio es á la tangente del ángulo de conjuncion*** ó *SB* : *BA* :: *R* : tang *BSA*.

Quando se trata de un eclipse de estrella, la línea *BA* es algo menor que la diferencia de longitud, qual se halla en las tablas, y medida á lo largo de la eclíptica. Para reducirla á la eclíptica sería menester dividirla por el coseno de la latitud aparente de la Luna (53).

1039 ***El ángulo de distancia*** es el ángulo *ZSA* que forma en el centro de la estrella el vertical de la estrella con la linea *SA*, que vá desde el centro de la estrella al centro de la Luna. Este ángulo de distancia *ASC* no puede formarse sino de la suma ó de la diferencia de los ángulos *BSC* y *ASB*, esto es, del ángulo paraláctico y del ángulo de conjuncion.

El ángulo de conjuncion siempre está al occidente del círculo de latitud antes de la conjuncion, y al oriente despues de la conjuncion. Por consiguiente, quando el círculo de latitud tomado del lado del norte estuviese al oriente del vertical, antes de la conjuncion, se tomará la *diferencia* del ángulo de conjuncion y del ángulo paraláctico, y despues de la conjuncion se tomará su *suma*. Quando el círculo de latitud estuviere al occidente del vertical, se tomará la *suma* antes de la conjuncion, y la *diferencia* despues de la conjuncion. Todo esto debe entenderse en el caso de que la latitud de la Luna esté al norte del Sol ó

Fig. de la estrella que está en conjuncion; pero si la latitud de la Luna estuviere al mediodia del Sol ó de la estrella, se mudarán las voces *suma* y *diferencia* en las reglas que acabamos de dar, reparando con cuidado, por lo que se dirá luego, si la suma pasa de 90° (*1058*). Estas reglas son generales así en los paises septentrionales como en los meridionales, y abrazan tambien el caso en que fuere obtuso el ángulo paraláctico, con tal que no se haga uso mas que de su suplemento para 180° en las reglas precedentes, y que por estas palabras el *círculo de latitud al oriente del vertical* solo se entienda que el ángulo agudo está del lado del oriente ácia el norte.

De este modo se formará el ángulo de distancia *ASC*, comprehendido entre la vertical *ZCS*, y el arco de la distancia verdadera *SA* que está entre el Sol y la Luna.

1040 Tambien se debe buscar el arco *AS*, que es la distancia verdadera de la Luna al Sol ó á la estrella, egecutando esta proporcion: *El seno del ángulo de conjuncion* ASB *es á la diferencia de longitud* AB, *como el radio es á la distancia* AS. Esta distancia *AS* multiplicada por el seno del ángulo de distancia *ASC* (1039), ó de su suplemento, dará la diferencia de azimut verdadera *AC*; y la misma distancia *AS* multiplicada por el coseno del ángulo de distancia *ASC*, ó de su suplemento si fuere obtuso, dará la diferencia de altura verdadera *SC* entre el Sol y la Luna.

Con un egemplo haremos mas perceptible todo esto.

La

La diferencia de latitud $36' 21''$ (1034) *es á la diferencia de longitud* $37' 11''$, *como el radio es á la tangente de* $45^\circ 39'$ *ángulo de conjuncion ASB.* Dividiendo $37' 11''$ por el seno de $45^\circ 39'$, sale la distancia verdadera *SA*, $52' 0.''$ La diferencia entre el ángulo de conjuncion $45^\circ 39'$, y el ángulo paraláctico $9^\circ 4'$ (1037) dá el ángulo de distancia *ASC*, $36^\circ 35'$; la distancia verdadera $52' 0''$, multiplicada por el seno del ángulo de distancia $36^\circ 35'$, dá la diferencia verdadera de azimut *AC*, $30' 59''$; y la misma distancia multiplicada por el coseno del mismo ángulo de distancia, dá la diferencia de altura *SC*, $41' 45.''$ Fig.

1041 La diferencia verdadera de azimut se puede tomar por la diferencia aparente, en todos los cálculos donde no se quiere proceder con una precision extraordinaria, y en este caso el cálculo de un eclipse es mucho mas sencillo. Pero si se quiere calcular todo con rigor, la diferencia verdadera de azimut *AC* requiere dos correccioncitas que vamos á declarar.

Supongamos los dos verticales de la estrella y de la Luna muy inmediatos uno á otro, como *ZCD* y *ZAM*. Sea un arco *AC* perpendicular al vertical *ZC*, á este arco le 165.
hemos llamado *la diferencia verdadera de azimut*; si se toma *AM* igual á la paralaxe de altura de la Luna (294), de modo que *M* sea su lugar aparente en el vertical *ZAM*, y se tira *MD* perpendicular á *CD*, la diferencia aparente de azimut que es *MD*, será mayor que la diferencia verda-

Fig. dadera AC, porque AM no es de todo punto paralela á CD. Para saber quánto la diferencia aparente MD es mayor que la diferencia verdadera AC, tiraremos AN paralela á CD, y será MN el exceso que MD lleva á AC, y este es el exceso cuyo valor se ha de buscar. En el triángulo ANM tenemos $MN = AM . \cos M$ (I.664); pero en el triángulo esférico ZMD, $R : \cos M :: \text{tang } MZ : \text{tang } MD$ (III.699), ó $\cos M = \frac{\text{tang } MD}{\text{tang } ZM}$; luego $MN = \frac{AM . \text{tang } ED}{\text{tang } ZM}$. Y como AM es la paralaxe de altura, tenemos $AM = p . \text{sen } ZM$ (194), luego con substituir este valor, y poner $\cos ZM$ en lugar del seno dividido por la tangente, tendremos $p . \text{sen } ZM . \text{tang } ED$.

1042 Luego *la paralaxe orizontal multiplicada por el coseno de la altura aparente, y por la tangente de la diferencia aparente de azimut* dá los segundos que se deben añadir á la diferencia verdadera para sacar la diferencia aparente de azimut MD, entre la Luna y la estrella tomándola en la region de la Luna. Aquí no tomamos las diferencias de azimut en el orizonte, como se hace en otras ocasiones (444).

1043 Por consiguiente siempre se deberá añadir una cantidad á la diferencia verdadera de azimut para sacar la diferencia aparente, pero esta correccion que nunca pasa de $30''$, igualmente que la que ocasiona el aplanamiento de la Tierra, se puede omitir en cálculos que no sean de mucha entidad.

157. 1044 Supongamos que siendo $54' \ 9''$ la paralaxe orizontal, la altura de la Luna $33°$; la diferencia de azimut

mut AC, $30' 59''$ (1040), tendremos p. sen b. tang $AC = 16''$, los quales añadidos á AC dan la diferencia aparente DM $31' 15.''$ Fig.

1045 Esta diferencia aparente $31' 15''$ es la que se debería haber usado en la operacion antecedente; pero el error que resulta de tomar la diferencia verdadera en lugar de la aparente, es como insensible. Sin embargo, si se quisiere escusar, se debería empezar otra vez el cálculo, introduciendo la tangente de $31' 15''$, y saldrian $16' 2$ para la correccion que se busca, que se deben añadir á $30' 59''$, para sacar $31' 15'' 2$, diferencia aparente de azimut.

1046 La *paralaxe de azimut* que se verifica en el esferoide aplanado (878) es la segunda correccion 164. que necesita la diferencia verdadera de azimut para sacar la diferencia aparente. Despues de calculada por las tablas la verdadera diferencia de azimut entre el Sol y la Luna (1040 y 1045), yá hallada DM, esto nos enseña que la Luna vista desde el centro de la Tierra parecería en el punto M, si la Tierra fuera esférica; pero por razon del aplanamiento de la Tierra no parece en el mismo vertical, vista desde la superficie. Si se toma un arco pequeño de círculo máximo LM igual á la paralaxe de azimut, el punto L será el punto donde se verá la Luna mirándola desde la superficie de la Tierra.

1047 Esta paralaxe de azimut $= p$. sen a. sen z (878) hace siempre parecer la Luna del lado del polo

ele-

Fig. elevado. Con efecto, el observador puesto en *O* vé la Luna
138. en el mismo vertical y en el mismo punto de azimut, que si estuviera en el punto *N* de la vertical. Pero el punto *N* siempre está opuesto al polo *P*, conforme lo evidencia la situacion de la elipse terrestre; luego *el observador puesto en O ó en N vé la Luna mas cerca del polo P, que si se hallára en el centro C de la Tierra.* Así, esta paralaxe es aditiva á la diferencia verdadera de azimut, si la Luna está al norte del vertical del Sol ó de la estrella; es sustractiva, si la Luna está al mediodia, esto es, si la diferencia verdadera de azimut es ácia el mediodia.

Con la mira de ayudar á distinguir con seguridad y comodidad los casos en que la Luna está al norte del vertical, daremos reglas generales á las quales se podrá acudir en el cálculo de los eclipses. Pero podrá escusar su práctica el que tuviere á la vista una figura del vertical y del meridiano de la estrella, donde la Luna esté colocada conforme debe estar en el tiempo para el qual se calcula,
164. qual es la figura para el egemplo que hemos escogido. Tambien se puede acudir á un globo para guiar el cálculo.

1048 Para determinar los casos en que esta paralaxe de azimut se debe añadir á la diferencia de azimut, es menester hallar los casos en que la Luna está al norte del vertical en nuestras regiones septentrionales, ó al mediodia del vertical en los paises situados mas allá del equador. En las reglas siguientes van comprehendidas todas las variedades posibles á fin de quitarle para siempre á este mé-

método todo resabio de incertidumbre. Fig.

En las alturas del polo que se verifican en Europa y pasan de 28°, el ángulo paraláctico es siempre agudo; así en las primeras reglas siempre le supondremos *menor* que 90° del lado del norte. Distinguiremos si la Luna ha pasado el meridiano ó no, esto es, si está en el emisferio oriental ú occidental, y si está al norte del Sol ó de la estrella. Quando decimos que la Luna está al norte, queremos decir que su lugar verdadero está mas cerca del polo boreal de la eclíptica, que el de la estrella, esto es, que su verdadera latitud boreal es mayor, ó su verdadera latitud austral es menor que la latitud de la estrella. Todo esto supuesto, la paralaxe de azimut será aditiva en todos los casos siguientes.

1049 En los paises septentrionales.

Antes del meridiano, si la Luna estuviere al *norte* y *despues* de su conjuncion.

Si la Luna estuviere al *norte*, *antes* de su conjuncion, y el ángulo de conjuncion fuere *menor* que el ángulo paraláctico.

Si la Luna estuviere al *medio dia*, *despues* de la conjuncion, y el ángulo de conjuncion fuere *mayor* que el ángulo paraláctico.

1050 En el caso de ser el ángulo de posicion el mayor, y de haberse restado de él el ángulo que forma el vertical con el meridiano (1037), se deberá decir *mediodia* en lugar de *norte* en las tres reglas antecedentes.

Des-

Fig. 1051 *Despues del meridiano.* Si la Luna estuviere al *norte* y *antes* de su conjuncion.

Si la Luna estuviere al *norte*, *despues* de su conjuncion, y el ángulo de conjuncion fuere *menor* que el ángulo paraláctico.

Si la Luna estuviere al *mediodia*, *antes* de la conjuncion, y el ángulo de conjuncion fuere *mayor* que el ángulo paraláctico.

1052 En el caso de haberse restado del ángulo de posicion (1037) el ángulo que forma el vertical con el círculo de declinacion, se deberá decir *medio dia* en lugar de *norte*, y *norte* en lugar de *medio dia* en las tres últimas reglas; ó, lo que es lo propio, mudar en las tres primeras (1049) estas palabras *antes*, *despues*, *norte* y *medio dia*.

1053 Puede suceder en países situados cerca de la zona tórrida en latitudes que no lleguen á 28°, que el ángulo paraláctico sea obtuso (443) del lado del norte, entonces se considerará su suplemento para 180°, y en las seis reglas (1449 y sig.) se mudarán las voces *antes* y *despues*. De aquí resultan las reglas siguientes para hallar los casos en que la Luna está al norte del vertical de la estrella en los países septentrionales, y la paralaxe de azimut es aditiva.

1054 *Antes del meridiano.* Si la Luna estuviere al *norte*, *antes* de la conjuncion.

Si la Luna estuviere al *norte*, *despues* de la conjuncion,

cion; y fuere el ángulo de conjuncion *menor* que el suplemento del ángulo paraláctico. Fig.

Si la Luna estuviere al *mediodia*, *antes* de la conjuncion, y el ángulo de conjuncion fuere *mayor* que el suplemento del ángulo paraláctico.

1055 *Despues del meridiano.* Si la Luna estuviere al *norte*, *despues* de la conjuncion.

Si la Luna estuviere al *norte*, *antes* de la conjuncion, y el ángulo de conjuncion fuere *menor* que el suplemento del ángulo paraláctico.

Si la Luna estuviere al *medio dia*, *despues* de la conjuncion, y el ángulo de conjuncion fuere *mayor* que el suplemento del ángulo paraláctico.

1056 En los paises meridionales, esto es, situados en el emisferio austral de la Tierra ó al medio dia del equador; la paralaxe de azimut se añade á la diferencia de azimut quando la Luna está al medio dia del vertical de la estrella; de donde resulta que para hallar los casos en que será aditiva, bastará mudar las palabras *norte* y *medio dia* en todas las reglas antecedentes, donde se trata de la latitud de la Luna.

Escuso, para abreviar, traer los casos en que la equacion es sustractiva; será facil especificarlos en una tabla sentando todas las reglas espresadas, y mudando á un tiempo las palabras *antes* y *despues*, *norte* y *medio dia.*

1057 Daré un egemplo. Siendo la paralaxe de 54′ 9″, el ángulo *a* de 19′ (898), el azimut de

la

Fig. la Luna $53^{\circ} \frac{1}{2}$, la paralaxe de azimut p. sen a. sen z (878) es $14'' 4'$, cuyo valor restado de la diferencia aparente $31' 15''$ (1045) dá la diferencia aparente de azimut *DL* en el esferoide aplanado $31' 1''$.

Despues de hallada la diferencia de *azimut* entre la Luna y la estrella, se debe conocer tambien *la altura* verdadera de la Luna, á cuyo fin se toma la diferencia de altura entre la Luna y la estrella (1040), y se la añade á la altura de la estrella si la Luna fuese mas elevada. Pero para distinguir esta circunstancia, vamos á dar unas reglas generales que no suponen mas circunstancia que la de haber examinado si la suma del ángulo de conjuncion y del ángulo paraláctico (tomando su suplemento si fuere obtuso) es mayor ó menor que 90° en el caso en que se suman uno con otro (1039). Se podrá escusar acudir á estas reglas si se tuviere á la vista un globo ó una figura exacta. En las reglas siguientes van comprehendidos todos los casos en que se debe añadir la diferencia de altura verdadera, á la del Sol ó de la estrella, para sacar la altura verdadera de la Luna.

1058 EN LOS PAISES SEPTENTRIONALES.

Antes del meridiano. Si la latitud de la Luna estuviere al *norte* de la estrella, *antes* de la conjuncion.

Si la Luna estuviere al *norte*, *despues* de la conjuncion, y la suma del ángulo de conjuncion y del ángulo paraláctico (1039) no llegaré á 90°.

Si la Luna estuviere al *mediodia*, *antes* de la conjuncion,

cion, y la suma del ángulo de conjuncion y del ángulo paraláctico pasare de 90°. Fig.

1059 Pero si del ángulo de posicion se hubiere restado el ángulo que forma el vertical con el meridiano (1037), se sacará una diferencia de altura aditiva en los casos siguientes.

Si la Luna estuviere al *norte* del Sol ó de la estrella, *despues* de la conjuncion.

Si la Luna estuviere al *norte*, *antes* de la conjuncion, y no llegare la suma á 90°.

Si la Luna estuviere al *mediodia*, *despues* de la conjuncion, y la suma de los ángulos pasare de 90°.

1060 *Despues del meridiano.* Son las tres reglas de antes (1059).

1061 Pero si del ángulo de posicion se hubiere restado el que forma el vertical con el meridiano (1037), serán las tres reglas dadas (1058).

Los preceptos de estos quatro artículos son los únicos que se necesitan en Europa.

1062 En los países septentrionales de la zona tórrida, el ángulo paraláctico puede ser obtuso, si la Luna estuviere entre el zenit y el polo elevado. Entonces se mudarán las palabras *norte*, y *mediodia* en lo dicho (1058 y 1059), pero se tomará el suplemento del ángulo paraláctico antes de añadirle al ángulo de conjuncion (1039).

1063 En los paises meridionales, esto es, si el lugar para el qual se calcula un eclipse está del otro

Fig. lado del equador, teniendo una latitud geográfica austral *antes del meridiano*; se mudarán las palabras *norte* y *mediodia* en lo dicho (1058).

1064 Pero si del ángulo de posicion se hubiere restado el que forma el vertical con el círculo de declinacion, se mudarán en lo dicho (1059) las palabras *norte* y *mediodia*.

1065 *Despues del meridiano*. Tambien se mudará en lo dicho (1059) las palabras *norte* y *mediodia*.

1066 Pero si se hubiere restado del ángulo de posicion el ángulo que forma el vertical con el meridiano, se mudará *norte* y *mediodia* en lo dicho (1058).

1067 Si el ángulo paraláctico fuere obtuso en los países meridionales *antes del meridiano*, se tomará lo dicho (1058). *Despues del meridiano*, servirá lo dicho (1059), y siempre suponemos que se toma el suplemento del ángulo paraláctico para añadirle al ángulo de conjuncion (1039).

1068 Los casos en que la diferencia de altura es sustractiva, se pueden inferir de aquellos en que es aditiva, mudando en los diez últimos artículos todas las palabras de *mediodia* y *norte*, *antes* y *despues*. Se sabrá tambien que es sustractiva quando despues de recorridos los casos antecedentes en que es aditiva, no se encontrare entre ellos el caso en que uno se halla.

1069 Despues de añadida ó restada la diferencia
164. de altura *SC* por medio de las reglas precedentes, se sabrá la altura verdadera de la Luna. Para hallar su altura apa-

aparente, se restará la paralaxe del Sol que es (598) de 9″, de la paralaxe orizontal de la Luna; la diferencia de las paralaxes multiplicada por el coseno de la altura de la Luna que se acabare de hallar, dará la paralaxe de altura con diferencia de algunos segundos. Esta paralaxe se restará de la altura verdadera de la Luna para sacar su altura aparente, y la diferencia de las paralaxes orizontales, multiplicada otra vez por el coseno de dicha altura aparente, dará con mas precision la paralaxe de altura (294). Fig.

1070 Se restará de esta paralaxe la correccion que requiere el aplanamiento de la Tierra (881), y saldrá con puntualidad la paralaxe de altura *AM* ó 164.
CD en el esferoide aplanado. 165.

1071 La paralaxe de altura *CD* hace parecer la 164.
Luna mas baja que el Sol ó la estrella; por consiguiente se restará de ella la cantidad *CS* que la altura verdadera de la Luna tenia mas que la del Sol, y saldrá la diferencia de altura aparente *SD*. Si la altura verdadera de la Luna se hallare menor que la de la estrella, se añadirá esta diferencia á la paralaxe de altura, para sacar la cantidad *SD*, cuya cantidad será la que el lugar aparente de la Luna fuere mas bajo que el de la estrella.

1072 Conociendo por este medio la diferencia aparente de altura *SD*, y la diferencia aparente de azimut *LD* (1057), se resolverá el triángulo *SLD*, y se hallará la distancia aparente *SL*, que dará á conocer si el

 eclip-

Fig. eclipse ha empezado, y proporcionará hallar su verdadero principio haciendo el mismo cálculo para un tiempo algunos minutos mas ó menos adelantado, conforme se verá en el egemplo siguiente.
164.

1073 Añadiendo la diferencia de altura verdadera entre la Luna y el Sol 41′ 45″ (1040) á la altura del Sol 33° 7′ 30″, sale la altura verdadera de la Luna. La diferencia de las paralaxes orizontales del Sol y de la Luna 54′ 0″, multiplicada por el coseno de la altura de la Luna, dá la paralaxe de altura con poca diferencia 44′ 51.″ Restando esta paralaxe de la altura verdadera de la Luna 33° 49′ 15″, sale su altura aparente 33° 4′ 24.″ El coseno de esta altura aparente multiplicado por la paralaxe orizontal, dá con *mas precision la paralaxe* de altura 45′ 15″; de esta se debe restar la correccion $p . \text{sen}\, a . \text{sen}\, b . \cos z$ (881) que se hallará de 6″, y tendremos la verdadera diferencia de las paralaxes en el esferoide aplanado 45′ 9″ = *AM* ó *CD*; de esta se restará la diferencia de altura verdadera *CS*, y quedará la diferencia de altura aparente *SD*, 3′ 24″; este valor de *SD* con el de *DL* (1057) que es de 31′ 31″, dará la distancia aparente de los centros del Sol y de la Luna 31′ 12.″ Si á la suma del semidiámetro del Sol 16′ 0″ $\frac{1}{2}$, y del semidiámetro orizontal de la Luna 14′ 47″ se le añaden 7″ $\frac{1}{2}$ por razon de su altura (833), saldrán 30′ 55″ cuya cantidad tiene 17″ menos que la distancia aparente de los centros; por consi-

siguiente el centro de la Luna deberá acercarse todavía Fig.
17″ mas al centro del Sol antes que el eclipse empiece. 164.
Si se repitiere un cálculo semejante (1034 y sig.) para un tiempo 5′ mas adelantado, se hallará que la distancia aparente de los centros es 1′ 40″ menor. Pero 1′ 40″: 5′ 0″:: 17″: 51″; luego la distancia de los centros menguará en el discurso de 51″ de tiempo la cantidad 17″ que le hemos hallado de mas; luego el eclipse empezará á 9h 10′ 51.″

1074 Si se quisiere formar la órbita aparente de la Luna afecta de paralaxe para hallar el medio del eclipse, se buscará en el mismo triángulo (en el qual conocemos los dos lados *SD* y *DL*) el ángulo *SLD*, 83° 45′, de donde inferiremos *LSE*, 74° 41′; la diferencia aparente de latitud *SE*, 8′ 15″; y si se quisiere la diferencia en longitud *EL*, 30′ 6″, se hará el mismo cálculo tres horas mas tarde estando la Luna en *F*; y se hallará del mismo modo la distancia *SF* y el ángulo *FSE*. Se formará, pues, un triángulo *LSF* en el qual cono- 166.
ceremos *LS*, *SF*, y el ángulo *LSF*, se buscará *SB* que es la mas corta distancia aparente, con el segmento *LB* que dará el tiempo en que la Luna ha de parecer en *B*, este será el tiempo del medio del eclipse (1031); por medio de la perpendicular *SB*, se hallará facilmente la cantidad del eclipse (1032).

1075. Comparando las diferencias de longitud aparente *FL*, y de latitud aparente *SE*, y las diferencias 164.

Fig. verdaderas *AB*, *BS*, se sacarán las paralaxes de longitud y latitud, del mismo modo que por el método del nonagésimo. Pero pocas veces se necesitarán estas paralaxes, si se calculan los eclipses por el método antecedente que tenemos por mas sencillo que el del nonagésimo.

Como se calcula el camino de la sombra sobre la superficie de la Tierra.

1076 Despues de determinadas las circunstancias del eclipse para el meridiano de París (962) por el cálculo ó la operacion gráfica que puede bastar (966), resta averiguar por longitudes y latitudes los países de la Tierra donde empezarán estas fases, averiguar por egemplo qual es el punto de la Tierra que verá el primero empezar el eclipse al ver nacer el Sol? &c. Aunque hemos enseñado como se halla sin cálculo, por medio de un globo (972), añadirémos aquí el método trigonométrico para conseguirlo.

167. El triángulo *MCK* que nos sirvió para hallar la porcion *MK* de la órbita (964), servirá tambien para hallar el ángulo *MCK*, diciendo *CK* : *R* :: *CM* : coseno *MCK*. La suma ó la diferencia de este ángulo *MCK*, y del ángulo *PCM*, que forma el meridiano con la perpendicular á la órbita, dará el ángulo *PCK* ó *PCI*, cuya medida es el arco *DI* del círculo de proyeccion. Podemos concebir ahora sobre el círculo *ADE* el globo mismo cuya proyeccion es, é imaginar sobre este glo-

globo un triángulo esférico *PDI*. El lado *PD* es igual á la declinacion del Sol, esto es, á la elevacion del ege de la Tierra respecto del círculo limitador, ó del círculo de proyeccion (977); el lado *DI* es el lado que hemos determinado poco ha sobre el círculo de proyeccion; el ángulo *D* es recto, por ser el meridiano universal *CPD* perpendicular al círculo limitador. Se podrá, pues, resolver el triángulo *IPD* con decir 1.° el radio es al coseno de la declinacion del Sol *PD*, como el coseno del lado *DI* es al coseno de la hypotenusa *PI* (III. 703). 2.° el seno de la declinacion del Sol *PD* es al radio, como la tangente del lado *DI* es á la tangente del ángulo *DPI* (III. 702). La hypotenusa *PI* es la distancia del lugar *I* al polo del mundo, ó el complemento de su latitud, si *PI* no llega á 90°; pero si el lado *DI* pasára de 90°, la hypotenusa *PI* tambien pasaria, sería preciso tomar el suplemento para 180° del arco hallado en las tablas por el cálculo trigonométrico, y restar 90° de dicho suplemento para sacar la latitud del punto *I*, que en este caso sería una latitud meridional. Suponemos que el polo *P* elevado sobre el círculo de proyeccion es el polo boreal del mundo, esto es, que la declinacion del Sol sea boreal; pero si el polo elevado sobre el círculo de proyeccion fuese el polo austral, se debería tirar el meridiano *PI* desde el polo austral, y no desde el polo boreal. Fig. 167.

1077 El ángulo *DPI* que forma en el polo del mundo el meridiano *PI* del lugar que se busca, con la par-

Fig. 157. parte superior *PD* del meridiano universal, servirá para hallar el ángulo horario del lugar *I*, quiero decir, su distancia al meridiano universal, añadiéndole 180°. Porque como el punto *I* camina de occidente á oriente, ó de la derecha á la izquierda ácia el meridiano universal *PC* donde llegará á mediodia, el ángulo horario contando desde un mediodia para otro es mayor que 180° la cantidad *DPI*. Si el lugar de que se trata estuviese á la izquierda ó al oriente del meridiano universal como el punto *F*, el ángulo horario *CPF* sería el complemento del ángulo *DPF*, que se hubiera hallado por el cálculo precedente.

1078 Despues de quitarle 20° al ángulo horario para París, que queda determinado por la hora dada (153); se le restará del ángulo horario hallado para el punto *I*, y quedará determinada la longitud geográfica del lugar de la Tierra que le corresponde, contada desde el primer meridiano (426).

1079 Por egemplo, en el eclipse de 1764, $CK = 1^\circ\ 24'\ 58''$, $CM = 39'\ 52''$, y $PD = 4^\circ\ 49'\ 8''$; se hará esta proporcion $1^\circ\ 24'\ 58'' : R :: 39'\ 52'' :$ cos $62^\circ\ 1'\ 3''$ valor del ángulo *MCK*; se le añadirá el ángulo de inclinacion *LCM* $5^\circ\ 43'\ 40''$, pues el medio *M* del eclipse está al occidente de la conjuncion, y el punto *K* al occidente del punto *M*; se le añadirá el ángulo de posicion *LCP* $23^\circ\ 6'\ 0''$, porque el círculo de latitud está al oriente del meridiano en los signos ascendien-

dientes, y tendremos $90^\circ\ 44'\ 43''$ (cuyo complemento está á $89^\circ\ 15'\ 17''$) para el ángulo *PCI*, que es igual al arco *DI*. Por ser obtuso este ángulo *DI*, nos está diciendo que la hypotenusa *PI* y el ángulo *DPI* lo serán tambien por las reglas dadas (III. 692 y 693). Se harán estas dos proporciones sen $4^\circ\ 49'\ 8''$: *R* :: tang $89^\circ\ 15'\ 17''$: tang $89^\circ\ 56'\ 15''$; esto prueba que el ángulo *P* es de $90^\circ\ 3'\ 45''$, y el ángulo horario del lugar *I* $270^\circ\ 3'\ 45''$. Fig. 167.

Hemos hallado antes que el principio del eclipse general en *I* es á $7^h\ 37'\ 29''$ de la mañana, ó $19^h\ 37'\ 29''$, contando desde un medio dia para otro, lo que dá $294^\circ\ 22'\ 15''$ para el ángulo horario de París; restando de este ángulo 20°, quedarán $274^\circ\ 22'\ 15''$ para el ángulo horario debajo del primer meridiano. Se restará el ángulo horario del lugar *I* $270^\circ\ 3'\ 45''$, añadiendo 360° para la sustraccion; quedarán $355^\circ\ 41'\ 30''$ para la longitud geográfica del lugar *I* que se busca (426).

1080 Tambien se hará esta proporcion *R* : cos $4^\circ\ 49'$ :: cos $89^\circ\ 15'\ 17''$: cos $89^\circ\ 15'\ 27''$, cuyo suplemento $90^\circ\ 44'\ 33''$ señala la distancia del lugar *I* al polo boreal del mundo; tiene, pues, $0^\circ\ 44'\ 33''$ de latitud austral, y está el lugar que se busca en medio del mar del norte entre la costa de Guinea y la costa del Brasil.

Por una operacion parecida á la que acabamos de individualizar, se hallaría el lugar *V*, que vería el primero

Fig. ro el eclipse central al nacer el Sol; su longitud es 167. 332° 28′, y su latitud 18° 49′ boreal. Es tambien el mismo cálculo para hallar la posicion del punto *F* y del punto *G*, los últimos de la Tierra que verán el eclipse.

1081 El rastro de la sombra de la *Luna* sobre la superficie de la Tierra se puede señalar sobre un *globo* ó un mapa de geografia, determinando de quarto en quarto de hora la longitud y la latitud del lugar que ha de ver el eclipse central, en el tiempo que corre desde que la Luna ha estado en *V* hasta que llega á *X*. Empecemos por el punto *M* de la proyeccion, y busquemos qual es el país de la Tierra, el qual proyectado en el punto *M*, tendrá el eclipse central á la hora misma del medio del eclipse general (*962*).

La linea *CM*, considerada como una linea recta de proyeccion, representa un arco del círculo de la Tierra del qual es la proyeccion, y está comprehendido entre el punto *C*, que corresponde perpendicularmente al Sol, y el punto de la Tierra que está proyectado en *M*. Pero hemos visto que los arcos contados desde el centro de la proyeccion tienen por proyeccion sus mismos senos (*981*); luego para hallar el arco de la Tierra que corresponde á *CM*, basta saber los grados cuyo seno es *CM*; se hará, pues, esta proporcion, el radio de la proyeccion convertido en segundos es al seno total, como la perpendicular *CM* es al seno del arco de la Tierra que la corresponde.

Despues se considerará el triángulo esférico *PCM*, del

del qual son conocidos dos lados y el ángulo que forman; es á saber el arco *CM* que acabamos de hallar, el arco *CP*, complemento de la declinacion del Sol ó su distancia al polo, y el ángulo *PCM* igual al que forma el meridiano con la perpendicular *CM*, ó el equador con la órbita aparente de la Luna (971); se buscará el lado *PM* y el ángulo *CPM* por las analogías siguientes, bajando una perpendicular desde el punto *M* al meridiano *PC* (III. 724. *C.*). Fig. 167.

R : cos *PCM* :: tang *CM* : tang *CZ*, tendremos $CP - CZ = PZ$.

Cos *CZ* : cos *PZ* :: cos *CM* : cos *PM* ; sen *PZ*: sen *CZ* :: tang *PCM* ; tang *CPM*.

Por medio de *PM* y del ángulo *P*, se hallará la longitud y la latitud del punto *M*, haciendo las mismas consideraciones que antes (1079) para hallar las del punto *I*.

1082 Todos los demas países de la Tierra que han de tener el eclipse central se hallarán egecutando operaciones como esta, ó para un momento dado, ó para una latitud dada, ó finalmente para una longitud tomada á arbitrio; pero es mas acomodado tomar un tiempo dado. Supongamos, por egemplo, que $19' 13''$ de tiempo, despues del medio del eclipse general (963), ó despues del tiempo en que la Luna ha de estar en el punto *M*, se pregunte ¿quál es el punto *O* de la Tierta donde el eclipse parecerá central, esto es, el país que está proyectado en el punto *O* de la proyeccion al mismo tiempo que la Luna está en él? Como dicho país de la Tierra verá a un

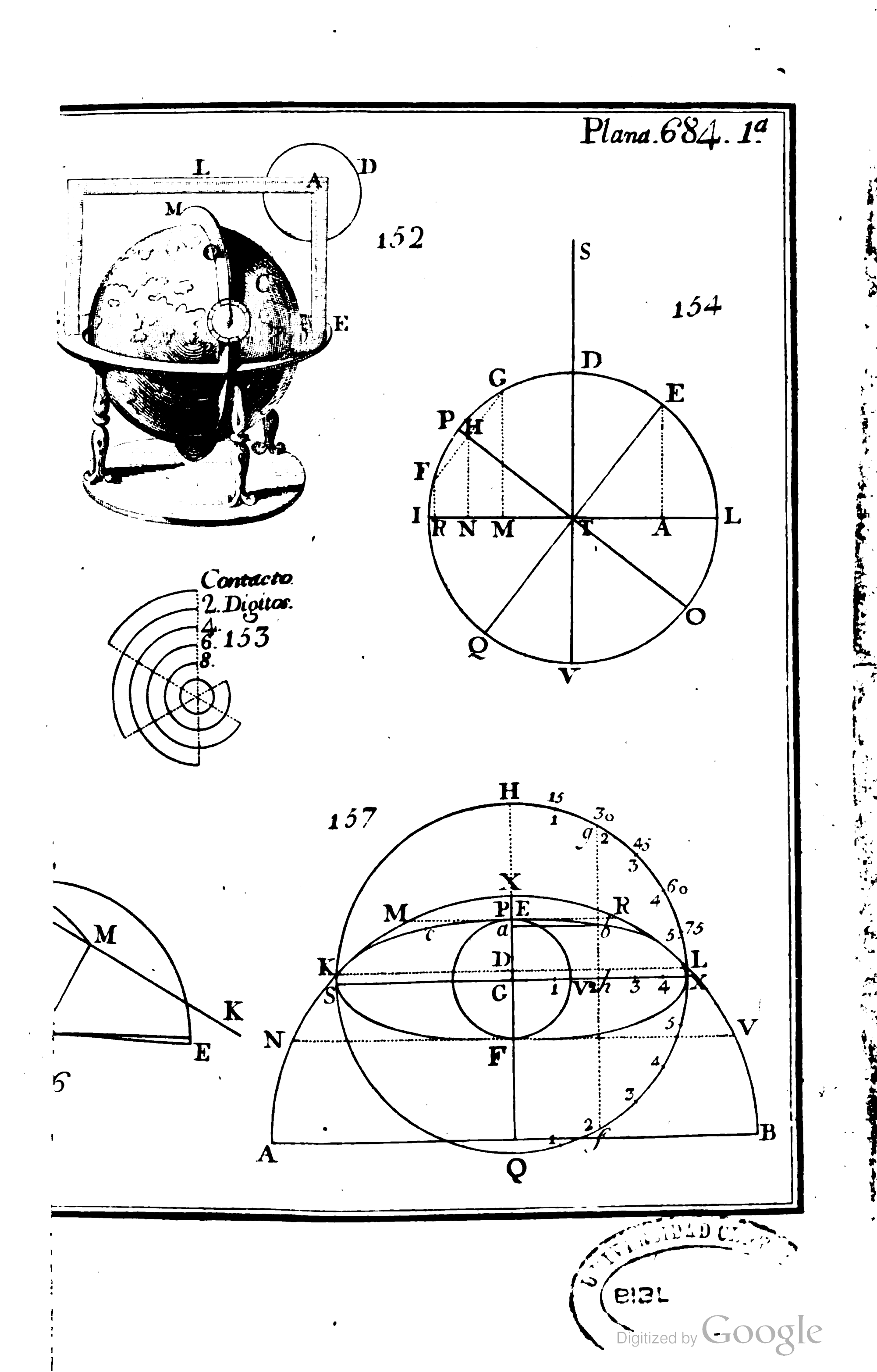
tiem-

Fig. 167. tiempo el Sol y la Luna en el punto *O* de la proyeccion, tendrá un eclipse central.

1083 Para conocer el lado *MO*, acudiremos al movimiento horario de la Luna, diciendo: *una hora ó 60'* son al movimiento horario de la Luna *en su órbita relativa*, como 19' 13'' de tiempo son al movimiento *MO*. Se buscará el ángulo *MCO* haciendo esta proporcion: la perpendicular *CM* es al lado *MO*, como el radio es á la tangente del ángulo *MCO*. Este ángulo combinado con el ángulo *PCM* del meridiano y de la perpendicular, dará el ángulo *PCO*. Se buscará el lado *CO* diciendo: el seno del ángulo *MCO* es á *MO*, como el seno total es á *CO*; despues, el radio de la proyeccion es al seno total, como la linea *CO* es al seno del arco de la Tierra cuya *proyeccion* es. En virtud de esto, en el triángulo esférico *POC* conocemos dos lados *PC*, *CO*, y el ángulo *PCO*; se hallará por las analogías de antes (1081), el lado *PO*, y el ángulo en el polo *CPO*, de donde se inferirá la latitud, y longitud del punto *O* (1079).

1084 Así, suponiendo que el medio del eclipse general del mes de Abril del año de 1764 fue á $10^h\ 23'\ 17''$ en el meridiano de París (963), se hallará el ángulo horario del lugar *O* de $340^\circ\ 4'$, y el lado *PO* de $38^\circ\ 55'$, y esto prueba que la latitud del punto *O* es de $51^\circ\ 5'$. Pero á $10^h\ 42'\ 30''$, el ángulo horario para París es de $340^\circ\ 37'\ 30''$, y para el primer meridiano, $320^\circ\ 37'\ 30''$; se restará este ángulo horario del ángu-

lo


L
A
D
M
O
C
E
152
S
154
D
G
E
P
H
F
I
R
N
M
T
A
L
O
Q
V
Contacto
2. Digitos.
4.
6.
8.
153
H
15
1
30
g
2
45
3
60
4
X
P
E
R
M
a
b
c
5
75
D
K
L
S
C
1
V
h
3
4
X
N
V
5
F
4
3
2
A
Q
B
f
157
M
K
E
6

A M N I D

1h 11′ 1h 22′ 1h 0h 50 30

6 5 4 3 2

...les.

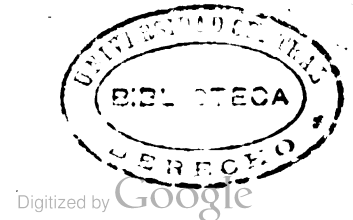
160.

Distancia del vertice delas Elipses al dela Proyeccion.

0 4 8 12 16 20 28

Occidente

20 30 40 50 55 R



162

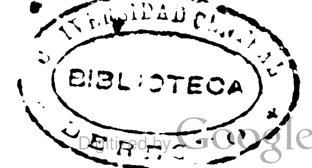
Ecliptica

163

165

164

166



lo horario del lugar $O = 340° 4'$, y quedarán $19° 26'$ Fig.
$30''$ para la longitud del país que se busca. Este punto cae bastante cerca de Calais, que está á $19° 31'$ de longitud, y á $50° 58'$ de latitud septentrional.

1085 Con igual facilidad se hallarán para un instante qualquiera los países donde el eclipse mayor es de un dígito, ó de la cantidad que se quisiere. Se tomará *MA* igual á la suma de los semidiámetros del Sol y de la 168.
Luna, y la linea *EAG*, paralela á la órbita, señalará todos los puntos donde no se verá mas que un simple contacto de la Luna y del Sol al norte del Sol sin eclipse alguno (957). Desde el punto *A* se tomará *AQ* de una quarta parte del diámetro del Sol ó de 3 dígitos, y la linea *OQR* señalará todos los países donde se verá el Sol eclipsado 3 dígitos ácia su borde septentrional. Se tomará *AS* igual al diámetro del Sol, y la linea *ST* señalará los puntos donde se verá la Luna entera sobre el Sol tocando el borde septentrional del Sol. La distancia *HT* es la mitad del ancho del espacio que tendrá el eclipse anular, y sería el que tendría el eclipse total si el punto *S* cayera debajo del punto *M*, esto es, si el semidiámetro del Sol fuese menor que el de la Luna. Se podría determinar para un instante dado la longitud y latitud del punto *R* de la Tierra que vé el eclipse de 3 dígitos, y del punto *Z* que vé los dos bordes tocarse, del mismo modo que se ha determinado sobre la órbita el que veía el eclipse central. Toda la diferencia que hay consiste en va-

Fig. valerse de CQ en lugar de CM; y en quanto á lo demas, la linea QR es igual á la porcion MH de la órbita lunar, que serviría para hallar el lugar H de la Tierra que vé el eclipse central en el mismo instante.

PASOS DE MERCURIO Y VENUS POR EL DISCO DEL SOL.

1086 Venus y Mercurio que giran al rededor del Sol menos lejos que la Tierra (203), se hallan entre el Sol y nosotros á cada revolucion synódica; y si estos planetas tienen entonces poca latitud, se vé en el Sol una mancha negra y redonda, cuyo ancho viene á coger la 30ma parte del ancho del Sol quando pasa Venus, y la 150ma parte no mas quando pasa Mercurio.

1087 Estos pasos solo se verifican quando Venus y Mercurio en su conjuncion inferior no tienen una latitud mayor que el semidiámetro del Sol, esto es, quando la conjuncion sucede muy cerca del nudo, á la distancia de de $1^{\circ}\frac{3}{4}$ quando mas para Venus.

Estos pasos son muy importantes, dan un medio de determinar exactamente el lugar del nudo de Mercurio ó de Venus, y la longitud heliocéntrica independientemente de la paralaxe de la grande órbita. Y las paralaxes de Venus en particular facilitan determinar, conforme manifestaremos, la paralaxe del Sol; de cuya determinacion penden las distancias de todos los planetas unos respecto de

otros

otros y respecto de nosotros (600), por cuyo motivo Fig.
se han hecho tan famosos.

1088 Los pasos de Mercurio y mucho mas los de Venus por el disco del Sol, son muy raros, siendo así que, segun parece á primera vista, deberían verificarse con mas frecuencia, pues Venus vuelve á su conjuncion inferior en el discurso de un año y 219 dias (650). Pero no basta que Venus esté en conjuncion con el Sol, es preciso que esté ácia su nudo, y que su latitud, mirándola desde la Tierra, no pase del semidiámetro del Sol, esto es, de unos 16′. Sea *C* el Sol; *V*, Venus en conjun- 169.
cion, esto es, en el instante que corresponde perpendicularmente al punto de la eclíptica donde está el Sol; *CV*, la latitud geocéntrica de Venus, menor que el radio *CO* del Sol; es evidente que Venus parecerá sobre el disco *SOE* del Sol.

Cómo se calculan las circunstancias del paso de Venus ó Mercurio por el disco del Sol.

1089 Las circunstancias de un paso de Venus son el tiempo de la conjuncion, los del medio del paso, de la entrada y de la salida; la latitud al tiempo de la conjuncion, y la mas corta distancia de los centros de Venus y del Sol. El método que sirve para averiguar todos estos puntos es el mismo para Mercurio que para Venus.

Se calculan primero estos pasos quales parecerían si se observasen desde el centro de la Tierra; despues se bus-

Fig. busca el efecto de las paralaxes en diferentes puntos de la superficie de la Tierra. Para calcular las circunstancias de un paso de Venus respecto del centro de la Tierra, hay dos métodos; es á saber, el uno por las longitudes y latitudes heliocéntricas, el otro por *las longitudes y latitudes* geocéntricas.

1090 En sabiendo qué dia puede haber un paso de Venus por el Sol, se debe saber la hora de la conjuncion. Se calcula para el mismo dia y para la víspera la longitud del Sol y la longitud heliocéntrica de Venus, para determinar el verdadero movimiento diurno de Venus visto desde el *Sol*, y el movimiento diurno de la Tierra visto tambien desde el Sol, que es igual á la mudanza de la longitud del Sol. Así, el dia 5 de Junio de 1761 *á mediodia, la longitud* de la Tierra opuesta á la del Sol era de $8^s\ 14^\circ\ 53'\ 34''\ 2$, y la de Venus era $8^s\ 14^\circ\ 24'\ 46''\frac{1}{2}$; el dia 6 de Junio la longitud de la Tierra era de $8^s\ 15^\circ\ 50'\ 56''$, y la de Venus $8^s\ 15^\circ\ 59'\ 55.''$ Así, el movimiento diurno del Sol era de $57'\ 22''$, y el de Venus de $1^\circ\ 35'\ 8''$; la diferencia $37'\ 46''$ es el movimiento diurno relativo en longitud.

1091 Como la longitud de Venus para el 5 á mediodia era $28'\ 47''$ menor que la de la Tierra, se hará esta proporcion: el movimiento relativo $37'\ 46''$ es á 24 horas, como $28'\ 47''$ distancia de Venus á su conjuncion con la Tierra, son á $18^h\ 17'\frac{1}{2}$, tiempo de la conjuncion, segun las tablas de Halley: Mr. de la Lande la ha-

halló por observacion á $17^h\ 51'$, esto es, el *6* á $5^h\ 51'$ Fig.
de la mañana, así el error de las tablas era de cerca de media hora. Pero esto no es de estrañar, porque un error de $50''$ en la longitud de Venus basta para dar media hora de error en el tiempo de la conjuncion, por razon de la lentitud de su movimiento relativo. La hora de la conjuncion vista desde el Sol, ó de la conjuncion de la Tierra, es exactamente la misma; no hay, pues, que hacer otro cálculo para hallar la conjuncion.

1092 Despues de hallada la hora de la conjuncion, se calcula por las tablas la latitud heliocéntrica de Venus, el radio vector ó la distancia al Sol, igualmente que la distancia del Sol á la Tierra. Esta latitud era, segun las tablas de Halley, de $3'\ 56''$ vista desde el Sol, el movimiento horario en latitud visto desde el Sol $14''\ 08$, la distancia de Venus al Sol 72643, la de la Tierra al Sol 101546, y por consiguiente la de Venus á la Tierra 28903; supongo 100000 para la distancia media del Sol á la Tierra. Se buscará tambien el semidiámetro del Sol, que en este egemplo es de $15'\ 46''\frac{1}{2}$.

1093 Sea *S* el centro del Sol, cuyo semidiámetro 170.
es *SA*; *T*, el centro de la Tierra; *TV*, la distancia de Venus á la Tierra. Si concebimos un cono *ATB*, cuyo vértice esté en el centro *T* de la Tierra, y cuya base sea el Sol, el ángulo *ATB* de este cono será igual al diámetro del Sol visto desde la Tierra (749).

Si á este cono le corta en la region de Venus un pla-

Fig. 170. no perpendicular á su ege, la seccion será un círculo cuyo diámetro es *CD*. Quando Venus atravesare el cono *ATB*, pasará por dicho plano de seccion, ó por el círculo cuyo diámetro es *CD*, y estará en él indispensablemente todo el tiempo que durare el paso. Con efecto, quando Venus entrará en *C* en el cono *ATB*, parecerá, vista desde la Tierra *T*, que está en el borde del Sol; quando saliere de dicho cono en *D*, dejará de parecer en el disco solar, y este será el fin del paso. Vamos, pues, á buscar por medio de las longitudes vistas desde el Sol, á qué hora entrará Venus en la seccion del cono *CD*, y este será el principio del paso.

1094 Desde luego es menester determinar qual será la magnitud aparente vista desde el Sol, de la seccion *CV*, ó del ángulo *CSV*. Con esta mira consideraremos los triángulos rectilineos rectángulos *SCV*, *TCV* que tienen comun un lado *CV*. Si tomamos *CV* por radio, será *SV* la tangente del ángulo *SCV*, ó la cotangente de *CSV*, será asimismo *TV* la cotangente del ángulo *CTV* que es igual al semidiámetro del Sol; podremos, pues, hacer esta proporcion $TV : SV :: \cot CTV : \cot CSV$, ó porque las tangentes están en razon inversa de las cotangentes $SV : TV ::$ $\tan CTV : \tan CSV$, esto quiere decir que *la distancia de Venus al Sol es á la distancia de Venus á la Tierra, como la tangente del semidiámetro del Sol visto desde la Tierra, es á la tangente del ángulo, en el qual se vé, mirándole desde el Sol, el semidiámetro* CV *de la seccion*

que

que Venus debe atravesar mientras dura el paso. Fig.

1095 Por medio de las distancias espresadas (1092) para el paso de Venus por el Sol en el año de 1761, se hará esta proporcion, $726 : 289 :: 15' 46''\frac{1}{2} : 6' 16''\frac{1}{2}$; por manera que el semidiámetro de la seccion que Venus atravesó el dia del paso, era de $6' 16''\frac{1}{2}$ visto desde el Sol. En lugar de los arcos hemos tomado sus tangentes, porque discrepan poco estas de aquellos quando las cantidades son tan pequeñas.

1096 Sea *AES* un círculo, cuyo radío *CO* visto desde 169. el Sol sea de $6' 16''\frac{1}{2}$ (1095), la circunferencia *AES* representará la de la seccion que Venus debe atravesar. Suponiendo que sea *CN* una porcion de la eclíptica, se tirará una perpendicular *CV*, igual á $3' 54''$, latitud heliocéntrica de Venus que hallamos antes (1092) para el momento de la conjuncion; el punto *V* será el punto donde deberá hallarse Venus en el momento de la conjuncion, y por este punto *V* se deberá tirar una linea *EVS*, para que represente el rastro ú órbita relativa de Venus, despues que hubiéremos determinado la inclinacion relativa de dicha órbita vista desde el Sol.

1097 Hemos probado (942) que para hallar la inclinacion relativa de una órbita respecto de un astro *C*, supuesto fijo, se debe hacer esta proporcion: *La suma ó la diferencia de los dos movimientos en longitud, es á la suma ó á la diferencia de los movimientos en latitud, como el radio es á la tangente de un ángulo que se balla ser la in-*

Fig. *clinacion de la órbita relativa.* En el caso actual se tomará
169. la diferencia de los movimientos diurnos de la Tierra y del Sol, que es de 37′ 46″, y el movimiento diurno de Venus en latitud, que es de 5′ 38″, y se dirá, 37′ 46″: 5′ 38″ :: *R* : tang 8° 29′, inclinacion aparente de la órbita de Venus respecto de la eclíptica. Se tirará, pues, una línea *SVE*, que forme con el círculo de latitud *CV* un ángulo de 81° 31′, este será el complemento de la inclinacion 8° 29′; y como la latitud *CV* de Venus vá menguando, se formará el ángulo agudo del lado de la salida *S* de Venus, ó del lado del oriente, porque todos los planetas vistos desde el Sol parece que ván al oriente.

1098 Se bajará á la órbita *ES* una perpendicular *CM*; el punto *M* será el medio del paso de Venus, y *CM* será la mas corta distancia de Venus á la Tierra, vista desde el Sol, ó su distancia á la linea de los centros, ó al ege del cono de que hablamos antes (1093). Para determinar la cantidad *MV*, se considerará que el ángulo *MCL*, que formá la perpendicular á la órbita con la perpendicular á la eclíptica, es igual al que forma la órbita con la eclíptica, esto es, á la inclinacion 8° 29′; se hará, pues, esta proporcion *R* : *CV* :: sen 8° 29′: *MV*, que será de 34″ 6.

1099 El movimiento diurno de Venus en su órbita relativa se determinará (942) diciendo: *El coseno de la inclinacion es al radio, como la diferencia de los movimientos diurnos 37′ 46″ es al movimiento relativo en la ór-*

órbita aparente 38′ 2″, cuya 24ma parte es el movimiento horario visto desde el Sol 1′ 35″ 08. Fig. 169.

1100 Por medio de este movimiento horario será fácil de hallar el medio del paso, y el tiempo que gasta Venus en ir desde *V* á *M*. Esto se conseguirá diciendo 1′ 35″ 08 : 3600 :: 34″ 6 : 21′ 50″, diferencia entre la conjuncion y el medio del paso. Por consiguiente si suponemos la hora de la conjuncion 5^h 51′ (1091), tendremos para el medio del paso 5^h 29′ 10.″

1101 Del triángulo *CVM* que sirvió para hallar *MV* (1098) inferiremos tambien el valor de *CM*, diciendo: *R* : *CV* :: cos *VCM* : *CM*, que será 231″ 4; luego la mas corta distancia *CM* vista desde el Sol es de 3′ 51″ 4. Para hallar esta distancia vista desde la Tierra, diremos: *La distancia de Venus á la Tierra es á la de Venus al Sol* (1092), *como* 3′ 51″ 4 *son á* 9′ 42′; esta es la mas corta distancia geocéntrica.

1102 Si la órbita de Venus atravesára el centro *C* de la seccion, el arco *ME* de la órbita sería igual á *CD*, esto es al radio mismo de la seccion, 6′ 16″; pero por razon de la latitud *CV*, Venus atraviesa una cuerda *ES* menor que el diámetro; luego no estará Venus tanto tiempo en el círculo *ASE*, y la duracion del paso será menor.

Para determinar la cantidad $ME = SM$, resolveremos el triángulo *CME*, en el qual $CE = 6' \, 16''\frac{1}{2}$, y $CM = 3' \, 51''$, y hallaremos *ME* de 4′ 58″$\frac{1}{4}$. El tiempo que gastare Venus en andar *ME*, será la mitad del

Fig. tiempo que durare el paso; se determinará, pues, por está proporcion: *El movimiento horario relativo* 1′ 35″ 08 *es á una hora ó* 3600″, *como* 4′ 58″$\frac{1}{4}$ *son á* 3ʰ 8′ 14.″ Este es el tiempo que Venus gasta en ir desde *E* á *M*, y esta es la mitad de la duracion del paso, vista desde el centro de la Tierra.

1103 Restando la semiduracion 3ʰ 8′ 14″ de 5ʰ 29′ 10″, medio del paso (1100), quedarán 2ʰ 20′ 56″ para el momento de la entrada del centro de Venus en la seccion del cono solar, ó en el círculo *ASE*; y añadiendo la misma semiduracion á 5ʰ 29′ 10,″ sacaremos 8ʰ 37′ 24″, que espresan el momento de la salida del centro de Venus vista desde el centro de la Tierra, esto es, qual se verifica prescindiendo de las paralaxes (1106).

1104 La distancia de Mercurio al Sol varía tanto en el discurso de algunas horas, que no se pueden suponer iguales los radios del disco ó de la seccion *ASE* al principio y al fin del paso. Delisle calculando el paso del dia 7 de Noviembre de 1756, halló el radio *CE* para la entrada 34′ 24″ 43, y el radio *CS* para la salida 34′ 30″ 25, esto es, 5″ 82 mayor; porque en el discurso de 5ʰ 24′ que duró el paso, Mercurio se habia acercado á su perihelio, y por consiguiente al Sol. Pasó, pues, por una seccion mas inmediata á la base del cono, y por lo mismo mayor; pero esta desigualdad se puede despreciar en los pasos de Venus.

Tam-

1105 Tambien se debe llevar en cuenta la desigualdad del movimiento de Mercurio, quando se quiere que el resultado no discrepe del verdadero sino algunos segundos. En el paso de 1756, el movimiento de Mercurio en su órbita *relativa*, en la primera semiduracion del paso era de 2061″ 18; y en la segunda semiduracion era 4″ 89 mayor en tiempo igual. La mitad de esta desigualdad vale $11''\frac{1}{2}$ de tiempo, que el verdadero medio del paso discrepa de un medio que se tomara entre la entrada y la salida, observadas en *E* y *S*, y corregidas por la paralaxe; por manera que la segunda semiduracion contando desde el punto *M* fue 23″ mas corta que la primera semiduracion *EM*. Fig.

Como se determina el efecto de la paralaxe en los pasos de Venus y Mercurio por el disco del Sol.

1106 Quando no se lleva otra mira que la de calcular y pronosticar un paso de Venus por el Sol, basta calcular el efecto de las paralaxes en diferentes lugares de la Tierra por los métodos gráficos que declararemos dentro de poco. Pero quando despues de observado un paso de Venus en diferentes paises de la Tierra, se quiere inferir de él la paralaxe del Sol, no puede sobrar cuidado ni proligidad en el cálculo de la paralaxe, para reducir cada observacion al centro de la Tierra, y averiguar la razon que hay entre los efectos de la paralaxe en dichos diferentes lugares donde se hizo la observacion. Esto es lo que vamos

Fig. á egecutar por el método mas riguroso y exâcto, llevando en cuenta hasta las centésimas de segundo en la paralaxe; porque es indispensable esta precision, si se quieren determinar los tiempos que se buscan con diferencia de menos de un segundo.

1107 Nos servirá de egemplo la observacion que *hizo* en París Mr. de la Lande el dia 6 de Junio de 1761. El contacto interior de los bordes de Venus y del Sol sucedió á $8^h\ 28'\ 25''$ de la mañana; se debe hallar para este momento la paralaxe de Venus respecto del Sol, la diminucion que causaba en la distancia del centro de Venus al centro del Sol, y el tiempo en que el mismo contacto debió de suceder respecto del centro de la Tierra. La primera operacion consiste en hallar para *el mismo instante* la altura verdadera del centro de Venus, y el ángulo del vertical con el círculo de declinacion en el centro de Venus. El ángulo horario ó la distancia del Sol al meridiano, que se saca convirtiendo en grados lo que le falta al tiempo verdadero dado para llegar á 12^h, esto es, $3^h\ 31'\ 35''$, á razon de 15° por hora, es de $52^\circ\ 53'\ 45''$, y la declinacion del centro del Sol de $22^\circ\ 42'\ 16.''$ *Estando* Venus bastante distante del centro del *Sol*, para que su altura sea diferente de la del Sol; es preciso para hallar esta altura conocer el ángulo horario de Venus y su declinacion.

171. 1108 Habiendo observado la distancia mas corta *CM* de $9'\ 30''$, y siendo de $15'\ 17''\ 6 = 917''\ 6$ la

la distancia aparente *CS* de Venus al centro del Sol en el instante del contacto interior, se sacará de la revolucion del triángulo *MCS* que el ángulo *MCS* es de 51° 35′ 50″, se tomará su complemento *SCV* = 38° 24′ 10″; se le añadirá el ángulo *VCO* = 14° 35′ 50,″ inclinacion de la órbita al equador para el momento de la observacion, y se sacará el ángulo *SCO* = 53° 0′ 0.″ Por medio del triángulo *SCO*, en el qual conocemos la hypotenusa *CS*, y el ángulo *OCS*, se hallará *OS*, diferencia de declinacion, 12′ 13″, y *CO*, que dividida por el coseno de la declinacion del Sol (54), dará la diferencia de ascension recta 9′ 59.″ Fig.

Esta diferencia de ascension recta se restará del ángulo horario del Sol 52° 53′ 45″, y saldrá el ángulo horario para Venus 52° 43′ 46.″ Se restará la diferencia de declinacion 12′ 13″ de la declinacion del Sol, y se sacará la declinacion aparente de Venus 22° 30′ 3.″ Con estos dos elementos y la altura del polo 48° 51′ 0″ que es la que corresponde al palacio de Luxembourg donde Mr. de la Lande hacia sus observaciones, halló la altura de Venus 41° 1′ 22″, y el ángulo del vertical con el círculo de declinacion 43° 56′ 54″ (442 y 443).

1109 Si suponemos la paralaxe orizontal del Sol de 8″ $\frac{1}{2}$ se halla que la de Venus es 29″ 87. Porque la distancia de Venus es á la del Sol como 8″ 50 es á 29″ 87; así la diferencia de las paralaxes orizontales de Venus y del Sol es 21″ 37, se multiplicará por el co-

se-

Fig. 172. seno de la altura de Venus, y saldrán 16″ 12 que serán la diferencia de las paralaxes de altura. Sea *V* el lugar verdadero de Venus en el momento de la observacion; *D*, el lugar aparente que era 16″ 12 mas bajo; *GF*, el borde del Sol; *VM*, la órbita verdadera de Venus; *hemos de hallar el valor cabal del ángulo CVM* que forma la *órbita* de Venus *VM*, con la verdadera distancia *CV* de Venus al centro del Sol. Con esta mira suponemos que el medio del paso fue á $5^h\ 30'\ 22''$, ó unas $2^h\ 58'\ 3''$ antes del momento del contacto, de donde inferiremos la porcion *MV* de la órbita verdadera de Venus andada desde el medio del paso; de su logaritmo resto el logaritmo de la mas corta distancia *CM*; y sale el logaritmo de la tangente del ángulo $MCV = 51^\circ\ 7'\ 35''$.

Se restará del ángulo *ECF* que forma el vertical *CE* con el círculo de declinacion *CF*, el qual es de $43^\circ\ 56'\ 54''$, el ángulo *MCF* del círculo de declinacion *CF* con la perpendicular á la órbita que es de $14^\circ\ 35'\ 50''$, y se sacarán $29^\circ\ 21'\ 4''$ para el ángulo *ECM*, cuyo ángulo añadido á *MCV*, dará $80^\circ\ 28'\ 39''$ para el ángulo $ECV = CVZ$, cuyo suplemento es el ángulo *CVD* que necesitamos.

1110 En el triángulo *CVD* se conocen, pues, dos lados *CD* y *VD*, y el ángulo que forman; se buscará el ángulo *VCD* que será de $59'\ 33''$, se le restará del ángulo $CVZ = 80^\circ\ 28'\ 39''$, y saldrá el ángulo $CDV = 79^\circ\ 29'\ 6''$. Despues se dirá sen $V : CD ::$ sen $D : CV$,

y

y sacaremos la distancia verdadera *CV* = 914″ 95. Si se resta esta distancia verdadera de la distancia aparente *CD* = 917″ 60, igual á la diferencia de los semidiámetros, saldrá la diminucion que la paralaxe causaba entonces en la distancia del centro de Venus al centro del Sol observada en París, en el momento del contacto interior de los dos bordes de Venus y del Sol. Fig. 172.

1111 Por medio de este aumento vamos á determinar á qué hora el contacto interior hubiera sucedido para el centro de la Tierra. Para que este contacto se verifique, es preciso que Venus esté en el punto *X* de su órbita verdadera *MVX*, tal que la distancia verdadera *CX* de los dos centros sea igual á la diferencia de los semidiámetros 917″ 60, esto es igual á *CD*. Habremos, pues, de resolver separadamente los dos triángulos *CMV*, *CMX*, con la mas corta distancia *CM* que es un lado comun á los dos, y valiéndonos primero del lado *CV* de 914″ 95, conforme le hemos hallado, y del lado *CX* de 917″ 60; hallaremos *MV* de 711″ 98, y *MX* de 715″ 42, la diferencia 3″ 44 es igual á *VX*; esta es la porcion de la órbita verdadera de Venus andada desde el momento del contacto observado en París, estando Venus en *V*, y del contacto verdadero para el centro de la Tierra, que se verificó quando Venus estaba en *X*. Este arco *VX* de la órbita convertido en tiempo (por medio del logaritmo constante 1,17661), dá 52″ para el tiempo que se busca; este es el efecto de la paralaxe en el tiempo del contacto in-

Fig. 172. interior en París, donde se verificó 52″ mas tarde de lo que se hubiera visto desde el centro de la Tierra, suponiendo de $8''\frac{1}{2}$ la paralaxe del Sol.

1112 Si se hace esta proporcion 8″5 : 52 :: 10″: *61*″, se echará de ver que dicha *diferencia hubiera* sido de *61*″ ó 1′ 1″ de tiempo, si la paralaxe *orizontal* del Sol hubiese sido de 10″, porque el efecto crece á proporcion.

1113 El mismo método se debe seguir con corta diferencia para calcular el influxo de la paralaxe en las distancias de Venus al borde del Sol, quando se hace uso de las distancias para observar un paso. Supongamos que el dia *6* de Junio de 17*6*1 á 7^h 18′ 55″ de la mañana, se haya observado una distancia *CD*, y se quiera inferir de ella la distancia verdadera *CV*, ó el efecto *DH* que obra la paralaxe en esta distancia observada, sacaremos la distancia del medio del paso 1^h 48′ 55″, y por consiguiente la porcion *MV* de la órbita 7′ 53″, *CM* es de *9*′ 30″; será, pues, el ángulo *MCV* de 3*9*° 41.′ Siendo la inclinacion *MCF* 8° 2*9*′, y suponiendo el ángulo *ECF* del vertical con el círculo de latitud 3*9*° 23′, tendremos el ángulo *ECM* = 30° 54′, y el ángulo *ECV* = 70° 35′ = *CVZ*, este es el ángulo que forma la distancia *CV* con el vertical *ZV*. Como no se necesitá para esta operacion tanta exactitud como en la antecedente, supondremos el ángulo *CDV* igual al ángulo *CVZ*; y conociendo en el triángulo *HDV* la paralaxe de altura *VD* de 21″ 1

pa-

para la hora de la observacion, la multiplicaremos por el coseno del ángulo vertical y del radio *CD*, y sacaremos $HD = 7'' 0$, esta es la prolongacion que la diferencia de las paralaxes causaba en la distancia observada á la hora dada. Vamos á enseñar una operacion gráfica, por la qual se halla con mucha mas facilidad esta prolongacion. Fig.

1114 Es de mucha conveniencia para la Astronomía poder egecutar todas las operaciones y cálculos de las paralaxes de los pasos de Venus y Mercurio, sin cálculo, por una operacion gráfica muy facil, que saca hasta las décimas de segundo. Es tan fatigosa esta tarea por los demás métodos, que la mayor parte de los Astrónomos han dejado de calcular sus observaciones, y aprovecharlas para sacar resultados, solo por huir de la molestia de este trabajo.

1115 Al caso actual hemos de aplicar lo que dejamos dicho (950, 983 y sig.) acerca de las proyecciones en los eclipses de Sol. Desde el centro del Sol se imaginará un cono de rayos que rodean la Tierra, de suerte que el círculo de la Tierra, que hemos llamado *Círculo de Iluminacion* (977), sea su base; y el ángulo en el centro del Sol sea de $18''$, porque la Tierra mirada desde el Sol se vería en un ángulo de $18''$ (598). Este cono de rayos cortado en la órbita de Venus forma allí un círculo menor que es la proyeccion de la Tierra; cuyo semidiámetro se vé en un ángulo igual á la diferencia de las paralaxes de Venus y del Sol (951), que es $22''\frac{1}{2}$, á su paso por el Sol.

Sea

Fig. 171. 1116 Sea el disco del Sol *GSV*, qual se le vía desde la Tierra en el paso de Venus del año de 1761; *ES*, la órbita que parece que Venus traza sobre el Sol; *LCK*, el círculo de declinacion ó meridiano que pasa por el centro del Sol; *LQN*, el círculo que representa la proyeccion de la Tierra en la órbita de Venus, y cuyo radio *CL* ó *CN* es de $22'' \frac{1}{2}$. Sobre este círculo de proyeccion se trazará la elipse *PQ* que representa el paralelo diurno del lugar para el qual se quiere hacer el cálculo de las paralaxes (986). Por egemplo, supongo que á una hora, sea la que fuere, estando Venus en el punto *R* de su órbita *MRS*, se quiera averiguar el efecto de la paralaxe; se considerará primero que *CP* espresa la paralaxe de altura (982). Tirando despues la linea *PR*, se echará de ver que si *CR* es la distancia verdadera de Venus al centro del Sol, la linea *PR* es su distancia aparente para París; así, desde el punto *R* como centro se trazará un arco pequeño *CH* para sacar *RH* igual á *RC*, y la linea *PH* será la diferencia entre la distancia aparente y la distancia verdadera, esto es, la paralaxe de distancia.

1117 En lugar del arco chico *CH* trazado desde el centro *R*, se puede tomar sin error sustancial una linea recta perpendicular á la linea *CR*; porque siendo *CH* estremadamente pequeña en comparacion de la longitud de *CR*, su curvatura es de todo punto insensible. En virtud de esto podemos pasarnos sin el círculo *VSK*, y la órbita *MRS*; bastará tirar en el círculo menor de proyeccion una

una linea *ms* paralela á la órbita *MS*, dividirla igualmenre en horas y minutos, del mismo modo que si fuera la órbita misma; en el punto *r* que corresponde á la hora y minuto del cálculo, se tirará la linea *Cr*, sobre esta linea *Cr* una perpendicular *CH*, y una paralela *PH* que será la paralaxe de distancia. Fig.

1118 Así se puede trazar en grande este círculo menor de proyeccion, y darle 8 ó 9 pulgadas de radio; se podrán hacer en él, siendo de este tamaño, todas las operaciones precedentes con la regla y el compas; las especificaremos en la figura que es mayor y mas perceptible, y re- 173.
presenta igualmente el círculo menor de proyeccion. Se echa de ver que si *R* es el lugar de Venus en su órbita, y *CH* perpendicular á *CR*, será *PH* la paralaxe de distancia. Para escusar valerme del centro *C* que es variable respecto de países diferentes (1120), tiro una linea *DM* que sea paralela á la órbita *RS*, y la *MG* que la sea perpendicular; suponiendo, conforme sacó Mr. de la Lande, que *DM* es de 9′ 30″, tomo sobre *MG* 4′ por hora para dividirla en tiempo del mismo modo que la órbita de Venus; por el centro de la elipse tiro una linea *DG* al punto donde se halla Venus á un instante dado, esta linea es indispensablemente paralela á la linea *CH* hallada por la operacion antecedente; hacemos, pues, uso de la linea *DG* para tirar *CH* y sacar *PH* que es la paralaxe de distancia, en el supuesto de que *P* señale la situacion de París sobre la elipse *QPV*, en el momento para el qual se calcula.

Tam-

Fig. 1119 Tambien se puede hallar la paralaxe en ascension recta y declinacion. Supongo que el radio *CK* sea el paralelo al equador, y que desde el punto *P* donde está París á la hora dada sobre su paralelo diurno se baje una perpendicular *PK*; será *CK* la paralaxe de ascension recta medida en un círculo máximo, y *PK* la paralaxe de declinacion; porque el punto *P* es el centro aparente del Sol y no el punto *C*, por causa de la paralaxe. Dividiendo, pues, el radio *CA* de la proyeccion en tantas partes quantas hay en la paralaxe orizontal de Venus al Sol (en 1761 eran 22″) se llevarán á las divisiones de *CA* las cantidades *PK* y *CK*, y quedarán determinadas en segundos y décimas de segundo las paralaxes de ascension recta y declinacion.

1120 Hasta aquí hemos supuesto que las paralaxes se calculasen para París; hemos de declarar ahora cómo sirve el mismo método para otro pais qualquiera, porque los pasos de Venus de 1761 y 1769 se observaron en diferentes paises. Todas estas diferentes observaciones se podrán calcular por el método que vamos á declarar con mucha facilidad y conveniencia.

Despues de trazada para 22° 42′ que es la declinacion del Sol aquel mismo dia, la elipse que representa el paralelo de París, será la misma para todos los paises; pero el radio de proyeccion y la distancia *CD* del centro de la elipse al centro de la proyeccion han de ser diferentes (1011). Ha probado Mr. de la Lande que suponiendo

do el semiege *DV* de la elipse dividido en mil partes, se Fig.
saca la distancia de los centros *C* y *D* con multiplicar la tangente de la latitud del lugar por el coseno de la declinacion del astro. En esta regla se funda la construccion de la tabla siguiente; supone el semiege de la elipse de 1000 partes; los números 1000, 1001 &c. que están en la columna siguiente son las secantes de cada latitud, y señalan el radio con el qual se debe trazar el círculo de proyeccion, despues de hallado el centro que conviene á un pais qualquiera.

Tabla de la distancia que hay entre el centro de la proyeccion y el centro de la elipse trazada para 22° 42′ de declinacion, con el radio de la proyeccion, respecto de diferentes latitudes.

Grad. de latitud.	Dist. de los centr.	Radio de proyeccion	Grad. de latitud.	Dist. de los centr.	Radio de proyeccion	Grad. de latitud.	Dist. de los centr.	Radio de proyeccion
0	0	1000	24	411	1095	48	1025	1494
2	32	1001	26	450	1112	50	1099	1556
4	65	1002	28	491	1132	52	1181	1624
6	97	1006	30	533	1155	54	1270	1701
8	130	1010	32	577	1179	56	1368	1788
10	163	1015	34	622	1206	58	1476	1887
12	196	1022	36	670	1236	60	1598	2000
14	230	1031	38	721	1269	62	1735	2130
16	265	1040	40	774	1305	64	1892	2281
18	300	1051	42	831	1346	66	2072	2459
20	336	1064	44	891	1390	68	2283	2669
22	373	1079	46	955	1440	70	2535	2924
24	411	1095	48	1025	1494	72	2839	3236

1121 Quando la declinacion del Sol fuese diferen-

Fig. te, siempre se hará uso de la segunda columna, que contiene el radio de proyeccion para diferentes paises; pero para determinar la distancia de los centros, se deberán multiplicar los números de la primera columna por el coseno de la declinacion dada, dividido por el coseno de 22° 42′, que es la declinacion para la qual se ha calculado en la tabla antecedente.

174. La elipse de la figura está trazada bastante en grande para que con ella se puedan egecutar todas las operaciones precedentes en los pasos de Venus, haciendo uso de

175. la escala. Supone la diferencia de las paralaxes de 26″; porque esta figura se estampó antes del paso de Venus en un tiempo que se creía la paralaxe del Sol algo mayor de lo que nos parece ahora. Lo especificaremos con individualidad.

Esplicacion de una figura con la qual se pueden hallar, sin cálculo ninguno, todos los efectos de la paralaxe en los pasos de Venus, respecto de todos los países de la Tierra.

174. 1122 Trazo una elipse *RVGP*, cuyo ege menor es al mayor, como el seno total es al seno de la declinacion del Sol que es de 22° 42′, ó poco falta, en los pasos de Venus que se verifican en el mes de Junio. Divido esta elipse en tiempo, de dos en dos minutos, para saber á cada instante la situacion de París sobre su paralelo.

Si

1123 Si *P* es el lugar de París en su paralelo el dia 6 de Junio á 8^h $15'$ de la mañana, y se tira al centro de la proyeccion una linea *PC*, esta representará la paralaxe de altura; si llevamos la longitud de esta linea sobre la escala de $49°$ de latitud cerca de la qual está señalado París, se sacará que es de $19.''$ Así, la paralaxe de altura de Venus al Sol á 8^h $15'$ de la mañana era de $19''$ en París; suponiendo $26''$ para la diferencia de las paralaxes, como en la escala de la figura 175. Fig.

1124 Para sacar la paralaxe de ascension recta, desde el punto *P* donde está París se bajará una perpendicular al paralelo del equador, que pasa por el centro *C* de la proyeccion; trasladando á la escala la linea que coge 175. desde el centro de la proyeccion á dicha perpendicular se halla de $14''$ 2. Esta es la paralaxe de ascension recta medida en un arco de círculo máximo que pasa por el Sol (1119).

1125 La paralaxe de declinacion no se distingue de la misma perpendicular tirada desde el punto *P* al paralelo al equador, en este egemplo sale de $14''$ 3. Esta es la cantidad que se debe restar de la diferencia aparente de declinacion entre Venus y el Sol, observada á 8^h $15'$ en París, llevando en cuenta la refraccion, para sacar la diferencia verdadera de declinacion.

1126 Del mismo modo se determinará la paralaxe de longitud y latitud por medio de la linea señalada paralela á la eclíptica, que forma con la paralela á la órbi-

Fig. ta de Venus, un ángulo igual á la inclinacion aparente; 174. en 1761 era de 8° 29.′ A este diámetro que representa la ecliptica ó su paralelo se bajará desde el punto *P* una perpendicular, que en el exemplo propuesto se hallará ser de 15″ 8, esta será la paralaxe *de latitud. La distancia* entre esta perpendicular, y el centro *C* de la *proyeccion* medida á lo largo del paralelo á la eclíptica, será la paralaxe de longitud; se halla de 12″ 6.

1127 La paralaxe de distancia es tan esencial como las demas paralaxes, porque las mejores observaciones que se hayan hecho del paso de Venus serían *dificultosas* de reducir sin el socorro de la operacion gráfica, que vamos declarando. Para hallar la paralaxe de distancia, será preciso tirar por el centro de la elipse una linea *EM* paralela á la órbita, y otra linea *MN* perpendicular á la órbita. Tomando *EM* para que represente la mas corta distancia de los centros, que en 1761 era de 9′ 30″, se tomará sobre *MN* el valor de 4′ por hora; y señalando en *M* el tiempo observado del medio del paso, eran 5^{h} 30′ en 1761, se dividirá *MN* en horas y minutos; el punto *N* por egemplo, corresponderá á 8^{h} 15′; *entonces* se tirará una linea oculta *EN*, y por el centro *C* de la proyeccion una paralela *CH* á la linea *EN*; la perpendicular *PH* bajada desde el punto *P* á dicha linea será la paralaxe de distancia. Si en el egemplo precedente se lleva *PH* sobre la escala que corresponde á la latitud de París, se hallará de 3″ 7 para 8^{h} $\frac{1}{4}$ de la mañana.

Es-

Esta cantidad se debe restar de la distancia aparente de Fig.
Venus al centro del Sol, por estar el punto *H*, igualmente 174.
que Venus, al mediodia del punto *P*.

1128 La linea *MN* se debe tirar mas lejos del centro *E* de la elipse, si se aplicare esta figura al paso de 1769, porque la distancia mas corta de los centros era de unos 10′ 7″; se podrá tomar *EO* en lugar de *EM*, y con esto se conservarán las divisiones de la linea *NM* para la entrada, y se llevarán debajo de la linea *EO* para la salida de Venus.

1129 Supongo que á 7^h 14′ de la tarde principio para París, se quiera determinar la paralaxe de distancia, se tirará una linea *EN* ácia el punto que corresponde encima del punto Θ á 3^h 18′ distancia al medio del paso; desde el centro *C* de la proyeccion se tirará una perpendicular á la linea *NE* prolongada debajo del punto *E*; hecho esto, desde el punto *R* que está á 7^h 14′ de la tarde ó á la izquierda de la elipse, se tirará una perpendicular á esta última linea, ó lo que es lo mismo, una paralela á *NE*; la distancia del centro *C* al punto donde esta perpendicular cayere, será la paralaxe de distancia que se hallará de 26″ en la escala de París.

1130 La salida en Petersburgo será á 3^h 24′ de la mañana, y 3^h 12′ despues el medio del paso. Para hallar la paralaxe de salida en aquel momento, tiro una perpendicular *EMO* mas abajo del punto *O*, y despues de tirada desde el centro *E* de la elipse una linea al punto que corresponde á 3^h 12′, tiro por el punto señalado

Fig. 60°, en *K* que es el centro de la proyeccion para Peters-
174. burgo, una paralela á dicha linea; desde el punto *G* donde está Petersburgo en su paralelo á $3^h\ 24'$ de la mañana, bajo una perpendicular á la última paralela, esta será la paralaxe de distancia; llevándola *á la escala de 60°*, saco $18''\frac{2}{3}$, que es la paralaxe de distancia, *suponiendo* que la paralaxe orizontal sea de 26.″ Hemos escusado señalar todas estas lineas en la figura para que no saliese muy confusa.

1131 El centro *C* de la proyeccion está señalado para París, pero se debe mudar si se calculan observaciones hechas en otras latitudes (1120). En la linea *ECK* se ven los puntos que corresponden á diferentes latitudes, esto es, los centros de *la proyeccion* que se han de substituir en lugar del punto *C*, y por los quales se deben tirar las paralelas á la eclíptica y al equador, quiero decir, todas las lineas que dan las paralaxes. Los grados señalados mas arriba del centro *E* de la elipse son para los países situados al mediodia del equador en latitudes australes, y aunque solo estén señalados hasta 34°, es facil aumentar las divisiones con *trasladar* arriba sobre un papel que se añadirá, las *divisiones* que están debajo del centro de la elipse.

1132 Quando se hubiere hallado una paralaxe qualquiera para una latitud diferente de la de París, se llevará esta abertura de compas, en la escala general, á la de las lineas verticales que estuviere señalada con la lati-

titud de que se trata; y se verá en ella su valor en segundos y decimas de segundos, porque la proyeccion no dá las paralaxes sino suponiendo el radio de la proyeccion igual á la paralaxe orizontal. Fig. 174.

1133 Lo que el papel encoge es un obstáculo á la exactitud de las figuras estampadas; el papel que se moja para estampar, se dilata y estiende, se comprime mas ó menos segun su calidad y su cuerpo, despues se va encogiendo con desigualdad al tiempo de secarse, y no queda la misma proporcion.

1134 En una de las pruebas de la grande elipse, observó Mr. de la Lande que los estremos del ege mayor de la elipse estaban mas cerca del centro de la elipse en el papel que en la lámina, 1 linea $\frac{3}{4}$ por un lado, y 2 lineas $\frac{1}{4}$ del otro, los vértices del ege menor se habian arrimado al centro, el uno $\frac{1}{3}$, el otro $\frac{1}{5}$ de linea. El centro de la proyeccion para París se habia arrimado una linea al centro de la elipse; así el papel se habia angostado en todas sus partes, pero mucho mas en su longitud. Se podría creer que el rodillo del tórculo contribuye para estender el papel, pero consta por esperiencia que las estampas no dejan de angostarse aun en la direccion que, segun parece, deberia dilatarlas el tórculo.

1135 Con la mira de precaver este vicio en los mapas geográficos, de l' Isle famoso geógrafo alteraba las dimensiones de los mapas en la lámina, y hacia elípticos los círculos la cantidad que el papel suele an-

Fig. gostarse mas en longitud que en latitud.

El astrónomo de l' Isle al hacer grabar la figura que hemos citado tomó otra precaucion igualmente acertada para que el que quisiese pudiera enmendar la irregularidad de la figura estampada. Al rededor de la lámina donde se grabó hizo señalar un rectángulo, cuya longitud cogía 23 pulgadas en la lámina, y la altura 17. El que siga su egemplo hallará por lo comun al tirar la estampa, que lo ancho se reducirá á 22 pulgadas 8 lineas y la altura á 16 pulgadas 10 lineas. Pero como se moja por precision la figura encolándola en un carton, será facil estenderla de modo que llene cabalmente un rectángulo hecho sobre el carton, el un lado del qual sea al otro como 17 á 23; se la dejará secar en este estado, y guardará sus dimensiones proporcionales, porque el carton se opondrá lo bastante á la contraccion del papel.

De la entrada y salida de Venus respecto de diferentes países de la Tierra.

1136 Es un punto esencial del cálculo de los pasos de Venus por el disco del Sol, el determinar á un tiempo para todos los países de la Tierra, por un método facil, el efecto de la paralaxe, que es causa de que la entrada ó la salida parezca mas pronto ó mas tarde. De l' Isle fue el primero á quien ocurrió el pensamiento de señalar en un solo Mapa Mundi, por medio de cierto número de círculos, quanto la entrada y la salida suceden

den en diferentes países mas pronto ó mas tarde que respecto del centro de la Tierra. Mr. de la Lande trazó un Mapa mundi parecido al de de l' Isle para el paso de Venus de 1769, del qual la figura 178 es como un extracto. Fig.

1137 Para esplicar este Mapa mundi nos servirá de egemplo el paso de Venus del año de 1769, cuyo cálculo hizo Mr. de la Lande, y construyó la figura por un método particular. Primero calculó las circunstancias de dicho paso por el método declarado (1089); enmendando las tablas de Venus por la observacion de 1761, halló el tiempo de la conjuncion verdadera en *C*, el dia 3 de Junio de 1769 á 10^h 176.
$10'$ de la noche, la entrada del primer borde de Venus en *E* á 7^h $21'$, y la salida del segundo borde de Venus en *S* á 13^h $44'$, la perpendicular $CM = 10'$ $7''$; la diferencia de las paralaxes $22''$ 6; el movimiento horario ya se habia determinado antes, es á saber, el movimiento horario relativo visto desde la Tierra de $3'$ $57''$ 49, en la eclíptica; $4'$ $0''$ 11 en la órbita relativa, y $35''$ 42 en latitud; la inclinacion de la órbita elíptica fué de $8°$ $29'$, y su inclinacion al equador $15°$ $32'$, suma de $8°$ $29'$ y del ángulo de posicion.

Siendo vista en un ángulo de $23''$ la proyeccion *TA* de la Tierra, la distancia *TA* es de $23''$, siendo así que *TS* es de $15'$ $47''$, igual al semidiámetro aparente del Sol. Por consiguiente el lugar de la Tierra cuya proyeccion está en *A*, y que refiere el centro del Sol al punto

to

Fig. 176. to *A* (950), verá Venus distante del Sol 15′24″ no mas, ó la cantidad *SA*, quando estando el centro de Venus en *S*, dejará verdaderamente el Sol respecto de un observador que correspondiese al centro *T*. Será, pues, menester que Venus continuando en su órbita llegue á *V*, para que la distancia *VB* del centro del Sol que parece en *B* (respecto del lugar de la Tierra cuya proyeccion está en el punto *B*), y del centro de Venus que está en *V* sea de 15′ 47″, esto es, que *VD* sea de 23″, igualmente que *TB*. Entonces el país de la Tierra proyectado en *B* verá el centro de Venus salir de encima del Sol, pues su distancia aparente al centro del Sol será igual al semidiámetro del Sol (955).

1138 Por la misma razon, si se toma una linea *TN* 23″ menor que *TS*, de modo que la linea entera *NTI* sea igual al semidiámetro del Sol; el punto de la Tierra cuya proyeccion está en *I* verá salir á Venus del Sol, aunque tenga todavía que andar el espacio *NS* para salir en realidad respecto del centro *T* de la Tierra. Así, el punto *I* será el primero de todos los puntos de la Tierra que verá el centro de Venus salir del Sol, porque verá Venus distante del Sol la cantidad *IN*, igual al semidiámetro del Sol, al tiempo que estará todavía en *N*. El punto *I* no está diametralmente opuesto al punto *B*; pero es tan corta la diferencia que se puede despreciar en una operacion puramente gráfica. Por otra parte no causa 5″ de error en el tiempo que se busca, y no estamos seguros,

tos, ni con mucho, de proceder con tanta exactitud en esta especie de pronósticos. Fig. 176.

1139 Lo que dejamos dicho de los puntos *B* é *I* respecto de la salida de Venus, tambien se debe entender de los puntos *H*, *K* respecto de la entrada de Venus en el Sol. El punto *H* es el primero de todos los países de la Tierra que verá á Venus entrar en el Sol; el punto *K* será el último de todos. Suponemos los puntos *H* y *K* diametralmente opuestos por la razon espresada (1138).

La diferencia entre el tiempo en que el punto *H* verá la entrada de Venus, y el tiempo en que sucederá para el punto *K*, pende de la distancia *HK* que es de $46''$; es preciso que Venus, despues de parecer que entra en el Sol para el punto de la Tierra cuya proyeccion está en *H*, se acerque $46''$, para que pueda parecer lo mismo al observador puesto en *K*. Por consiguiente se sabrá la diferencia de tiempo entre estas dos fases, con tal que se averigue quanto tiempo necesita Venus para acercarse al centro del Sol la misma cantidad de $46.''$

1140 Para determinar exactamente este intervalo de tiempo, se deben resolver separadamente los dos triángulos *TMN*, *TMV*; y como conocemos la perpendicular *TM* y la hypotenusa, se buscarán los otros lados. Para hacer este cálculo supondremos que el punto *N* y el punto *V* sean los del último contacto esterior de Venus en 1769, siendo el semidiámetro de Venus de $29''$, será de $16'$

$16''$

Fig. 176. $16''$ la suma de los semidiámetros del Sol y Venus. Pero como se trata del contacto esterior de los dos limbos, la hypotenusa TN es $22''\ 6$ menor, y TV la misma cantidad mayor, quiero decir, que TN es de $15'\ 53''\ 4$, y TV de $16'\ 38''\ 6$; en virtud de esto se sacará MN de $735''\ 20$, y MV de $792''\ 94$, la diferencia NV es $57''\ 74$. Pero Venus gasta $14'\ 27''$ de tiempo en andar en su órbita un arco de $57''\ 74$, porque su movimiento aparente es de 4 minutos por hora; luego el efecto máximo de la paralaxe es de $14'\ 27''$, suponiendo de $9''$ la paralaxe orizontal del Sol. Supondremos esta cantidad de $15'$, en números redondos, para facilitar las operaciones siguientes, quiero decir, que supondremos $15'$ de tiempo entre la salida de Venus para el punto I de la Tierra, y su salida para el punto B, conforme sería realmente si la paralaxe del Sol fuere de $9''\ \frac{1}{3}$. Tenemos, pues, una duda de $\frac{1}{3}$ de segundo acerca de esta cantidad.

1141 Consideremos ahora los puntos de la Tierra Z, F é Y, que distan del punto E una cantidad EF, mayor que EH un tercio del diámetro de proyeccion HK, todos estos países verán la entrada de Venus $5'$ mas tarde que los países situados en H. Porque una vez que desde el punto H al punto K, hay $15'$ de diferencia, ha de haber cinco desde el punto H al punto F; y todos los puntos que están sobre el arco ZFY, por estar á la misma distancia del punto E, verán la misma distancia aparen-

rente de los centros de Venus y del Sol, y Venus entrará en el mismo instante en el Sol para todos los países de la Tierra proyectados sobre el arco *ZFY*. Fig.

1142 Si dividimos el diámetro *HK* en 15 partes iguales (conforme lo hemos practicado separadamente en la figura 177 para mayor claridad), y el punto *H* ha visto la entrada á $7^h\ 4'$, el país de la Tierra que corresponde al primer punto de division, verá la entrada 1' mas tarde ó á $7^h\ 15'$; el segundo punto la verá á $7^h\ 16'$ &c. A la derecha del diámetro *HK* van señalados los minutos de la entrada, y á la izquierda los de la salida, para los diferentes puntos de la Tierra, que corresponden á las 15 porciones del diámetro de la proyeccion. 179.

1143 Luego si se toma un globo terrestre de un diámetro igual á *HK*, y se toma la abertura ó la distancia *GH*, y se traza un círculo tomando por centro ó polo el punto del globo al qual representaba el punto *H* de la proyeccion; se trazará facilmente sobre dicho globo un círculo menor, cuya circunferencia señalará todos los países de la Tierra, donde la entrada empezará á $7^h\ 19'$. A todos estos países de la Tierra los representaba en la proyeccion el círculo *ZFY*, y por consiguiente á una distancia del borde de Venus igual á $16'\ 16''$, suma de los semidiámetros de Venus y del Sol; por consiguiente todos han observado en el mismo instante el primer contacto de los bordes. A estos círculos menores trazados sobre el globo, y que pasan por todos los puntos donde 176.

de

Fig. de la entrada parece al mismo instante, los llamaremos *Círculos de entrada.*

1144 Consiste, pues, la primera operacion preliminar en hallar sobre el globo terrestre el *punto H*, que debe servir de polo á todos estos *círculos de entrada* que hemos de trazar, y que serán con corta diferencia paralelos entre sí; este punto se puede hallar con el mismo globo, y tambien se puede hallar por cálculo; se buscará primero el ángulo *ETM* que es de 51° 34.′ Si se resta el ángulo *OTM*, de 15° 32″ (1137), saldrá el ángulo *OTE* 36° 2′, ó el arco *HX* de la Tierra que le mide; y si se suman uno con otro, saldrá el arco *XB*, de 67° 6.′

1145 Se cogerá un globo terrestre armado sobre su orizonte, se levantará el polo 22° 27′, que es la declinacion del Sol; y en este estado el orizonte del globo representará el círculo de iluminacion (977), ó un plano de la Tierra paralelo al plano de proyeccion. Si la declinacion del Sol fuese meridional, se debería elevar sobre el orizonte el polo antártico ó meridional.

1146 Elevado el globo segun pide la declinacion del Sol, se le dará vuelta segun la hora que fuere. Por egemplo, á 7^h 20′ tiempo verdádero en París, el *Sol* dista 110° del meridiano; se le dará, pues, vuelta al globo de occidente á oriente, conforme rueda la Tierra, hasta que París diste 110° del meridiano. Suponemos el Sol fijo en este meridiano universal del mismo modo que en los eclipses de Sol.

Los

1147 Los países de la Tierra que están á 110° del Fig. meridiano de París ácia el occidente tienen 270° de longitud, dándole á París 20° de longitud, conforme acostumbran los geógrafos (167). Todo se reduce, pues, á dar vuelta al globo de modo que el punto señalado 270° de longitud terrestre esté debajo del meridiano. En este estado, estará colocado el globo del modo que le vé el Sol á 7^h $20'$ de la tarde; el orizonte de este globo representará el círculo *HBKI* de la figura 176, ó el plano de proyeccion. 176.

1148 Todos los países situados entonces al orizonte del globo artificial del lado del oriente tendrán el Sol poniente; todos los que estuvieren al occidente verán el Sol nacer. Este círculo de iluminacion pasa por la parte oriental de Francia y el mar Báltico; pasa al norte de Siberia, desde allí coge ácia Asia hásta la Tierra de Yeso, entra en el mar del Sur cerca de las Islas Marianas, vá á la América meridional junto al estrecho de le Maire, á Africa enfrente del Cabo verde, y finalmente á Francia de donde habia salido. Están señalados con el círculo *FGBAD*, trazado sobre el Mapa Mundi; y señalan de un 178. lado todos los países que verán la entrada de Venus al ponerse el Sol, del otro todos los países que verán la entrada al nacer el Sol. Si se toma al oriente del meridano un arco *XH* de 36° en el orizonte, el estremo de este arco irá á pasar ácia el medio de la barrera á 28° $\frac{1}{3}$ de longitud, y 47° $\frac{1}{2}$ de latitud. Este es el país cuya pro-

yec-

Fig. yeccion está en el punto *H*; este es el lugar desde el qual,
176. como desde un polo, se han de trazar los círculos de entrada de que yá hemos hecho mencion (1143), y
178. se vén en la figura. Por el mismo método se hallará el polo *B* de salida á 20° de latitud *boreal*, y $73^{\circ}\frac{1}{2}$ de longitud, que viene á caer en Arabia ácia el *estrecho* de Ormuz.

178. 1149 Para trazar en el Mapa Mundi estos círculos de entrada y salida, se debe tambien señalar el círculo de iluminacion en el instante de la entrada (1148) y de la salida, vistas desde el centro de la Tierra. Porque las lineas *FGB*, *BAD*, *EGH*, *CAI* señalarán todos los puntos donde se debe ver la entrada y la salida en el momento que el Sol nace y se pone, y *servirán por consiguiente de límites*; pues será escusado señalar *los círculos* de entrada sobre los países donde el Sol estuviere puesto.

1150 En todos los países que están mas arriba de *FGB*, esto es, al norte de Europa y Asia, ó mas arriba de *BAD*, esto es, en toda la América, el Sol estará levantado, y por lo mismo se verá la entrada de Venus sobre el Sol. En virtud del movimiento diurno de la Tierra cada país camina ácia el oriente ó ácia la *izquierda*; los que están en dicho momento sobre la linea *FG*, estarán á la derecha ó mas abajo de dicha linea un instante despues, estarán fuera del círculo de iluminacion, y no verán mas el Sol. Por consiguiente la linea *FG* es la de los puntos donde se verá la entrada al ponerse el Sol; lo propio digo de

de los países situados sobre el arco *AD*, caminando ácia el oriente ó ácia la derecha; cesarán de hallarse sobre el círculo de iluminacion *AD*, y perderán de vista el Sol: y así la entrada de Venus sucederá para ellos al ponerse el Sol. Fig. 178.

Al contrarío, los países situados sobre *GB* y *BA* caminando ácia el oriente, subirán entonces sobre el círculo de iluminacion, y verán la entrada al nacer el Sol, conforme lo hemos señalado sobre los arcos *GB* y *AB*.

1151 Egecutando una operacion parecida á esta se hallará el círculo de iluminacion *EGH* y *CAI* para el momento de la salida del centro de Venus, ó para $13^h\ 44'$ al meridiano de París. Los países situados en *CI*, caminando ácia el oriente, dejarán el círculo de iluminacion, y perderán de vista el Sol; luego la salida de Venus sucederá para ellos al ponerse el Sol, esta linea coge desde Groenlandia, atraviesa la América septentrional y el Reyno de Mégico, hasta el mar del Sur.

En todo el espacio *FGBEF* se verá la entrada de Venus del mismo modo que en todo el espacio *BCDAB*. En el espacio *HBGH* y *CBIAC*, se verá la salida; por consiguiente los espacios comunes á ambos, es á saber *CBAC* y *BGEB* verán uno y otro, quiero decir la entrada y la salida. En los espacios *ADCA* y *FGEF* no se verá mas que la entrada. En los espacios *BGHB* y *BAI*, solo se verá la salida. En los espacios *FGHF*, *IADI*, no se verá ni una ni otra.

Fig. 1152 Trazemos ahora en el Mapa los círculos de entrada y salida para 7^h $17'$, $20'$, $23'$ $26'$, á fin de conocer los países donde el efecto de la paralaxe será el mayor, y poder escoger por este medio la posicion mas ventajosa para observarle.

177. Supongamos que el círculo *HGK* sea cabálmente tan grande como el globo de que se quiere hacer uso, pongo por caso de seis pulgadas. Se dividirá *HK* en 15 partes iguales, una vez que suponemos que toda la diferencia de los dos puntos *H* y *K* es de 15 minutos (1140); por cada uno de estos puntos de division se tirarán perpendiculares al diámetro *HK*, estas perpendiculares interceptarán arcos *HG*, que serán los anchos de los círculos de entrada y salida para los diferentes tiempos señalados en el diámetro *HK*. Tomando, pues, con un compas la distancia del punto *H* al punto G, señalado con la linea de la quinta division, se llevará esta misma distancia sobre el globo, empezando desde el polo que hemos señalado (1148) cerca de Munich; y se hallará un círculo que cortará el equador á 50° de longitud, el primer meridiano á 5° de latitud, el meridiano de 110° de longitud, el de 320° sobre el paralelo de 40°. Con tres de estos puntos basta, y se señalarán en el Mapa Mundi por longitud y latitud; se tirará un círculo por estos tres puntos, y este círculo pasará por todos los puntos de la Tierra donde la entrada de Venus se verificará á 7^h $17'$ contadas en el meridiano de Paris.

No

1153 No es de estrañar que hablemos de los círculos trazados en el Mapa Mundi, como de los círculos trazados en el globo; porque es de advertir, conforme diremos en los elementos de Geografia, que en la proyeccion de los Mapa Mundi, todos los círculos del globo son tambien círculos, bien que mayores ó menores segun su situacion. Estamos, pues, seguros de que el mismo rasgo de compas que pasa por tres puntos de nuestro Mapa Mundi, tambien pasará por todos los demas lugares, que en el globo terrestre se hallaban sobre el mismo círculo. Fig.

1154 El Mapa Mundi representa el globo cortado en dos partes distintas, y esto nos ha precisado á cortar tambien en dos partes los mas de los círculos de entrada. Por egemplo, en el emisferio del nuevo mundo se vé una porcion *LM* del círculo de entrada de $7^h\ 17'$, y se vé tambien á la izquierda en el otro emisferio una porcion *NO* del mismo círculo, señalada tambien $7^h\ 17'$. Se necesitan tres puntos para determinar cada una de estas porciones; pero se echa de ver que el punto *N* y el punto *L* son un mismo punto, pues ambos corresponden sobre el primer meridiano á 71° de latitud. Por otra parte, quando se tiene el compas abierto sobre el globo, es facil señalar por longitud y latitud quantos puntos se quieren, y tomar tres en el emisferio oriental, y tres en el emisferio occidental, si fuere menester.

1155 Los círculos de salida se trazarán del mismo modo, una vez hallados los polos de salida (1148). 176.

Fig. El polo *B* se halla ácia Mascate en Arabia; el punto ó polo opuesto *I* se halla en el mar del Sur, este verá la salida á $13^h\ 36'$, siendo así que el punto *B* la verá á
177. $13^h\ 51'$, conforme está pintado en la figura 177. La diferencia es todavía de $15'$; así, se podrá tomar el círculo *HGK*, á fin de que represente los diferentes arcos que se necesitan para la salida. Estando el punto *H* señalado $13^h\ 51'$, los puntos de division que han servido para señalar de un lado $17'$, 20, 23 y 26, servirán para señalar del otro lado $13^h\ 48'$, $45'$, $42'$, $39'$, y las mismas aberturas de compas que hubieren servido para trazar (1152) los círculos de entrada, servirán para señalar los círculos de salida. El quinto punto de division del diámetro *HK*, por el qual se ha tirado una perpendicular *GG*, ha determinado el arco *HG* para $7^h\ 19'$, y determina el arco *HG* para $13^h\ 46'$; el arco *HG* es $70°\ 39'$, porque su seno verso es el tercio del diámetro *HK*.

1156 Despues de trazados todos los círculos de entrada y de salida respecto del paso de 1769, se vió que la entrada en la Ciudad de México sería á $7^h\ 21'\ 10''$, la salida á $13^h\ 37'\ 40''$; fué, pues, allí la duracion total del paso de $6^h\ 16'\ 30''$; tambien se halló que en Petersburgo la duracion sería $18'\ 15''$ menor.

1157 Por consiguiente dos observaciones completas de este paso de 1769, la una en México y la otra al norte de Petersburgo, habian de dar con una precision du-

dupla de la del paso de 1761, la paralaxe del Sol. Por- Fig.
que la diferencia mayor que se haya podido comparar era de 8′ entre Tobolsk y la Isla Rodriguez, y aun ha sido preciso suponer que se conociese exactamente su diferencia de longitud, siendo así que se habia de sacar una diferencia dupla independientemente de la longitud, en el supuesto de que se consiguiera observar la duracion total del paso en Rusia y México.

Método para observar un paso de Venus ó Mercurio por el disco del Sol, é inferir de las observaciones todas las consecuencias á que dan lugar.

1158 Para esta observacion sirve el quadrante de círculo, el instrumento que los Astrónomos tienen mas manejado, y cuya manipulacion es mas facil. En este instrumento los hilos siempre guardan su posicion exacta, el uno siempre es vertical, y el otro siempre orizontal. En estas observaciones con el quadrante la refraccion no muda las cantidades ó diferencias de altura observadas con el quadrante de círculo inmobil, pero afecta y complica mucho las diferencias de ascension recta y de declinacion. Finalmente, las reducciones y el cálculo que requieren las paralaxes y las refracciones hacen mas prolijo el cálculo en las observaciones hechas con la máquina paraláctica, que en las que se hacen con el quadrante de círculo.

1159 Sea *AB* el hilo vertical, y *ED* el hilo ori- 179.

 zon-

Fig. zontal que se cortan en el focus del anteojo de un qua-
179. drante de círculo, de modo que *AEBD* sea el campo del anteojo; *S*, el disco del Sol sobre el qual se vé Venus en *V* cuya posicion se debe determinar. *Se colocará el* anteojo de modo que el Sol no toque *los hilos; pero de* modo que en virtud del movimiento diurno tenga que *ve*nir á dar en ellos; si fuere por la mañana, como los anteojos Astronómicos trastornan los objetos, se ha de procurar que el Sol parezca en la parte superior del anteojo, y á la derecha, conforme está pintado en la figura; dirigiéndose entonces el movimiento diurno de *S* á *C*, el Sol atravesará el hilo vertical, y el orizontal igualmente que Venus.

1160 Se observarán, pues, *atentamente con un* péndulo de segundos los seis instantes siguientes, por el orden que sucedieren; porque podrá suceder que los pasos por el hilo orizontal antecedan los pasos por el hilo vertical, y que haya alguna alteracion en el orden siguiente.

1. Paso del borde precedente del Sol, por el hilo vertical.
2. Paso del borde inferior del Sol, por el hilo orizontal.
3. Paso del borde precedente de Venus, por *el hilo* vertical.
4. Paso del borde inferior de Venus, por el hilo orizontal.
5. Paso del borde siguiente del Sol, por el hilo vertical.
6. Paso del borde superior del Sol, por el hilo orizontal.

Llamamos limbo inferior del Sol al que parece tal en el anteojo (bien que sea en realidad superior), por no dis-

distraer la atencion del observador con consideraciones incidentes. Fig.

1161 No consideramos mas que el paso de uno de los bordes de Venus, porque como el diámetro de este planeta es bastante conocido, es inutil empeñarse en una doble observacion que puede perjudicar á la exactitud, y distraer la atencion del observador. Sin embargo, si tuviere el observador alguno que contare los segundos, y otro para apuntarlos, bueno será que observe los dos bordes de Venus en el hilo vertical y en el hilo orizontal.

1162 Aunque hemos indicado el paso de cada borde del Sol por el hilo vertical, y por el hilo orizontal, puede bastar con observar un borde no mas, escogiendo aquel al qual Venus está mas inmedíato. Porque como el diámetro del Sol es muy conocido, se hallará muy exactamente por el cálculo quanto tiempo ha gastado su diámetro en atravesar el hilo vertical y el hilo orizontal del quadrante de círculo (561); pero si hubiere proporcion para observar cada borde, se tendrá una confirmacion del uno por el otro y un término duplo de comparacion para la situacion de Venus.

1163 En sabiendo por observacion el tiempo que ha corrido entre dos pasos del borde del Sol y del borde de Venus por un mismo hilo, se inferirá su diferencia de altura si fuere el hilo orizontal y su diferencia de azimut si fuere el hilo vertical. Llamamos aquí diferencia de azimut, lo mismo que en el cálculo de los eclip-

Fig. ses (1042), un arco de círculo máximo perpendicular al vertical.

Se sabe por observacion ó por cálculo (564) quanto tiempo gasta el semidiámetro *del Sol en atravesar* el hilo orizontal del quadrante de *círculo; se hará, pues,* esta proporcion: el tiempo que el semidiámetro *entero* gasta en atravesar el hilo, es al valor del semidiámetro del Sol (752), como el tiempo corrido entre el paso del borde de Venus y del borde del Sol por el hilo orizontal, es á un quarto término que será la *diferencia* de altura entre los bordes observados de Venus, y del Sol. Supongo que siendo el semidiámetro del Sol de $15'$ $46''$ gaste $2'$ de tiempo en atravesar el hilo *orizontal* al *tiempo* de la observacion, y que *entre los bordes inferiores* de Venus y el del Sol por el hilo orizontal se haya gastado un minuto de tiempo; es evidente que la mitad de $15' 46''$ ó $7' 53''$ será la diferencia de altura entre dichos dos bordes de Venus y del Sol.

1164 Se sabe asimismo ó por observacion (1160), ó por cálculo (563) el número de minutos y segundos de tiempo que el semidiámetro entero del *Sol* gasta en atravesar el hilo vertical: se sabe por observacion el tiempo que corrió entre los pasos de Venus y del borde del Sol por el mismo hilo; se hará, pues, tambien esta proporcion: el tiempo que ha gastado el semidiámetro del Sol en atravesar el hilo vertical es al valor del semidiámetro del Sol en minutos y segundos, como el tiempo corrido en

la

la observacion entre el borde precedente del Sol y el de Venus por el mismo hilo vertical, es al número de minutos y segundos que compone la diferencia de azimut entre dichos dos bordes observados. Fig.

Si el borde occidental del Sol *F* ha pasado por el hilo vertical 2′ antes que el centro *S*, y 1′ antes que Venus *V*; se echa de ver que la diferencia de azimut ha de ser la mitad de la diferencia *FS*, medidas una y otra perpendicularmente al vertical.

1165 Despues de observada por medio del quadrante de círculo la diferencia de altura y azimut entre Venus y el centro del Sol, se debe inferir la diferencia de longitud y latitud, para el momento de la observacion.

Para esplicar como se hace este cálculo, daremos por egemplo una de las observaciones que hizo Mr. de la Lande el dia 6 de Junio de 1761. A las 6^h 31′ 46″ tiempo verdadero en París, el borde precedente de Venus seguía al borde precedente del Sol 43″ despues al hilo vertical, y el borde precedente de Venus estaba 59″$\frac{1}{2}$ mas adelantado que el último borde del Sol; de aquí hemos de inferir primero la diferencia de altura y la diferencia de azimut entre los centros de Venus y del Sol.

El tiempo que el semidiámetro del Sol gasta aquel dia en atravesar el meridiano es (562) de 1′ 8″ 2, el ángulo paraláctico es 44° 39′ para la hora de la espresada observacion (443); de donde se sigue que el tiempo que el semidiámetro gastaba en atravesar el hilo ori-

Fig. orizontal era $1' \, 37'' \, 0$, y que el tiempo que gastaba en atravesar el vertical era $1' \, 36'' \, 0$. Haremos, pues, esta proporcion $1' \, 36'' : 15' \, 46'' \frac{1}{2} :: 43'' : 7' \, 4''$; de
180. donde resulta que el borde precedente *A* de Venus distaba orizontalmente del borde *P* del *Sol la cantidad AB* igual á $7' \, 4''$. Añadiendo á esta cantidad el semidiámetro de Venus $AD = 28'' \frac{1}{2}$, sacaremos la cantidad $BD = 7' \, 32'' \frac{1}{2}$; se restará *BD* de *BE* que es igual al semidiámetro del Sol $15' \, 46'' \frac{1}{2}$, y saldrá $ED = 8' \, 14''$, esta es la diferencia de azimut entre el centro de Venus y el centro del Sol, en el momento que se observó Venus.

1166 Se hará despues estotra proporcion: $1' \, 37'' : 15' \, 46'' \frac{1}{2} :: 59'' \frac{1}{2} : 9' \, 40''$, esta es la diferencia *FG* de altura aparente entre el borde precedente *ó superior F* de Venus, y el borde siguiente ó inferior *M* del Sol. Se restará de esta diferencia el semidiámetro *FD* de Venus $28'' \frac{1}{2}$, y sacaremos $DG = 9' \, 11'' \frac{1}{2}$; se restará *DG* de *GH* igual al semidiámetro del Sol $15' \, 46'' \frac{1}{2}$, y saldrá *DH* diferencia de altura aparente entre los centros de Venus y del Sol $6' \, 39''$, en el instante que Venus pasó por el hilo orizontal.

1167 Esta diferencia de altura aparente requiere la correccion correspondiente á la refraccion, bien que en el caso que aquí se considera está tan alto el Sol, que es insensible esta cantidad; despues se la hará la correccion correspondiente á la paralaxe. Para esto, despues de calculada la altura del Sol (442), se hallará que es

de

de 22° 4'; el coseno de esta altura multiplicado por la diferencia de las paralaxes orizontales dá la diferencia de las paralaxes de altura 24'', que se han de restar de la diferencia de altura 6' 39'' para que salga la verdadera diferencia de altura 6' 11'', este es el verdadero valor de *HD* ó *CE*. Dimos en otro lugar (1123) un método mas sencillo para hallar esta paralaxe. En el triángulo *CED* que es sensiblemente rectilineo y rectángulo, conocemos *CE* = 6' 11'', y *ED* = 8' 14''; hallaremos el ángulo *DCE* = 53° 6', y la hypotenusa *CD* = 10' 18''. Esta es la verdadera distancia del centro de Venus al centro del Sol. Fig. 180.

1168 Se buscará despues la posicion del círculo de latitud en la figura, para sacar el ángulo de conjuncion. El ángulo de posicion para la hora dada es 6° 7' que se deben restar (1036) del ángulo 44° 39'; restan 38° 32' para el ángulo paraláctico del vertical con el círculo de latitud, este es el ángulo *ECI*; se le restará del ángulo *ECD* = 53° 6', restarán 14° 34' para el ángulo de conjuncion *DCI* (1038).

1169 Desde el centro *D* de Venus se bajará una perpendicular *DK* al círculo de latitud, esta será la diferencia de longitud entre los centros de Venus y del Sol; y *CK* será la latitud de Venus. En el triángulo *DCK* conocemos la hypotenusa *CD* = 10' 18'', y el ángulo *DCK* = 14° 54'; hallaremos la latitud *CK* = 9' 58'' y la diferencia de longitud *DK* = 2' 35'', este es el re-

sul-

Fig. sultado inmediato de la observacion (1165); pero se debe inferir tambien la conjuncion y la latitud.

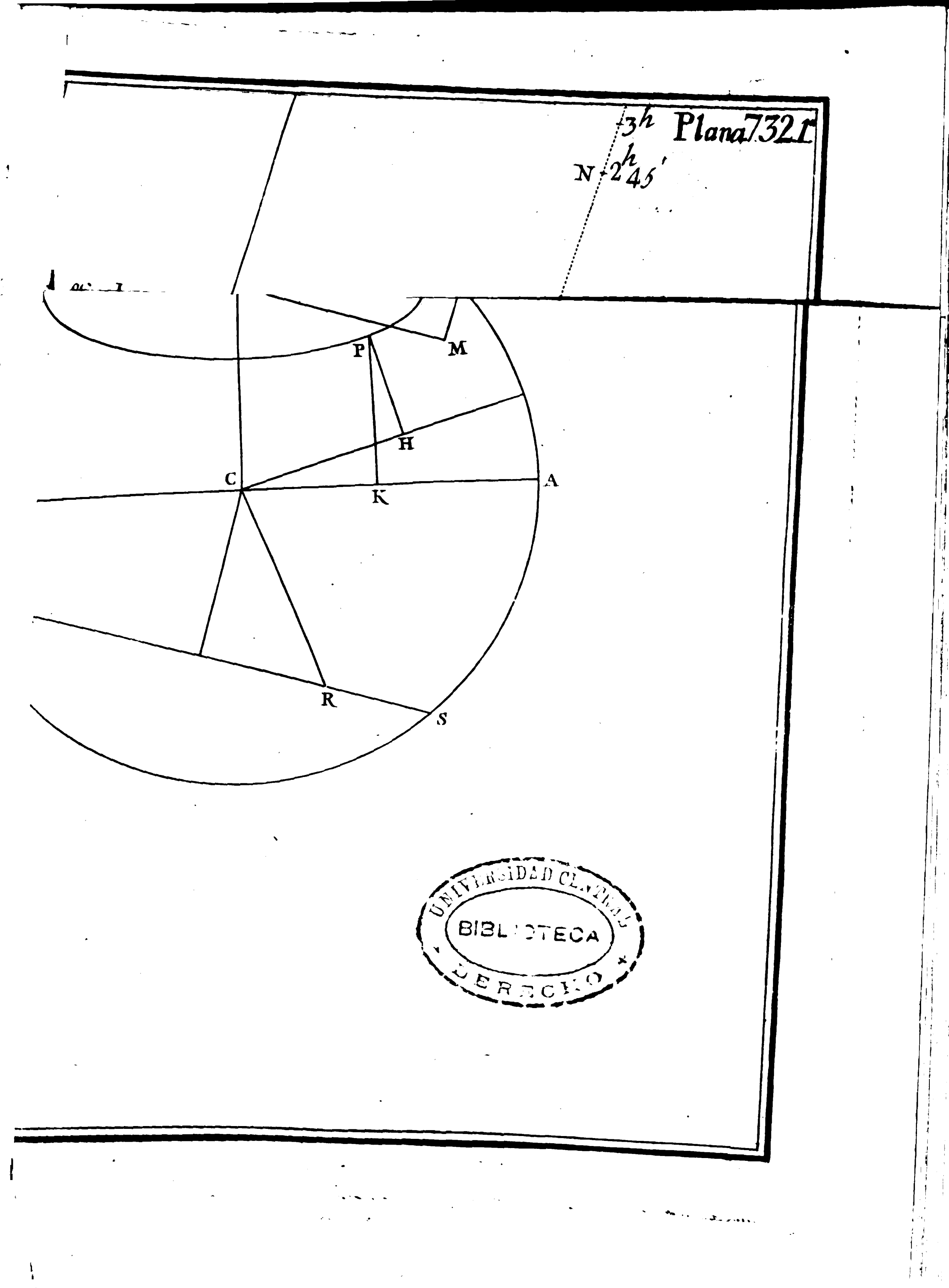
DE LOS ECLIPSES DE LOS SATÉLITES.

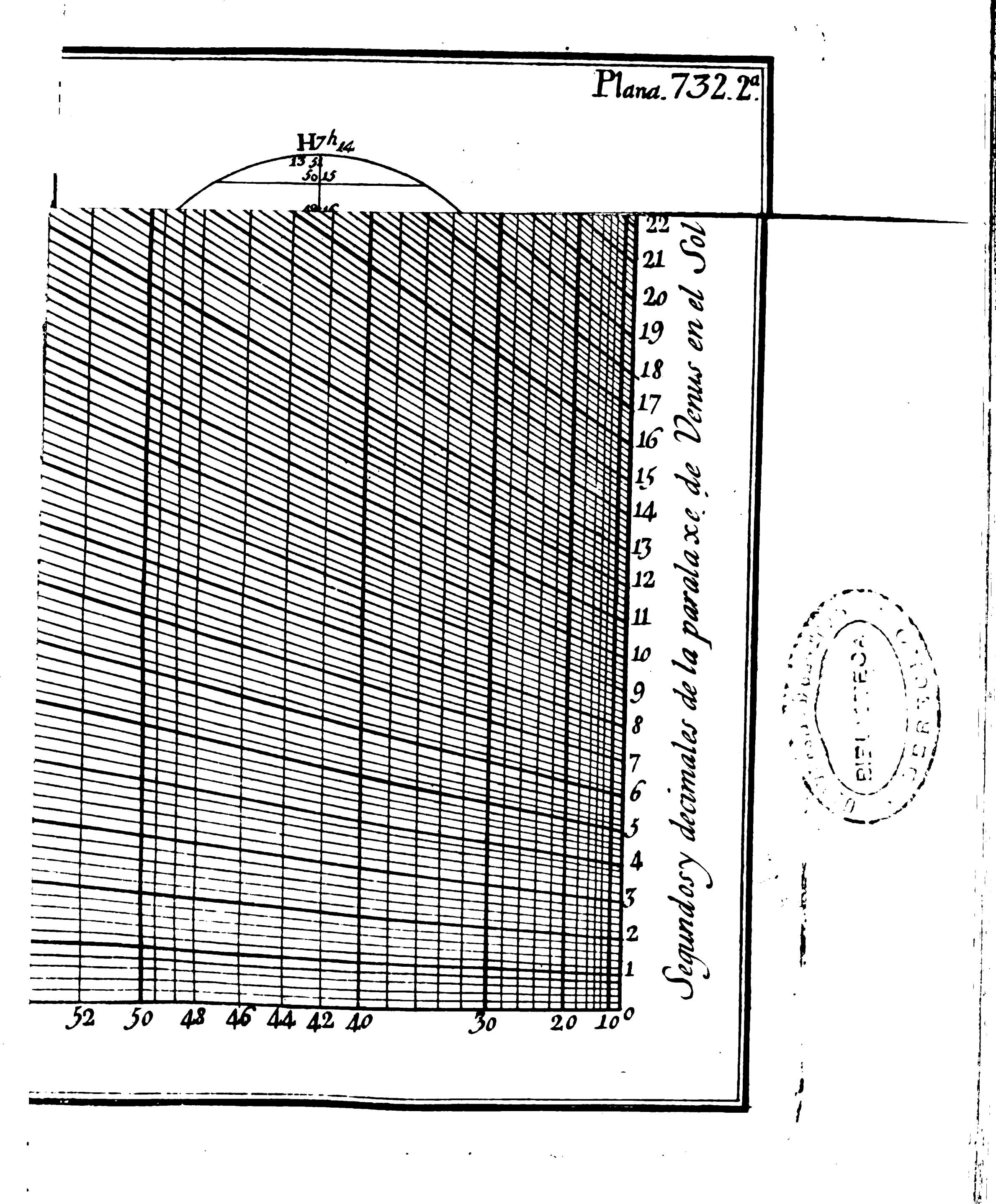
1170 En lo que vamos á decir acerca de los *eclipses* de los Satélites, seguiremos el mismo orden que guardamos en la declaracion de su teórica; quiero decir, que trataremos 1.° de los eclipses de Luna. 2.° de los eclipses de los Satélites de Júpiter.

De los Eclipses de Luna.

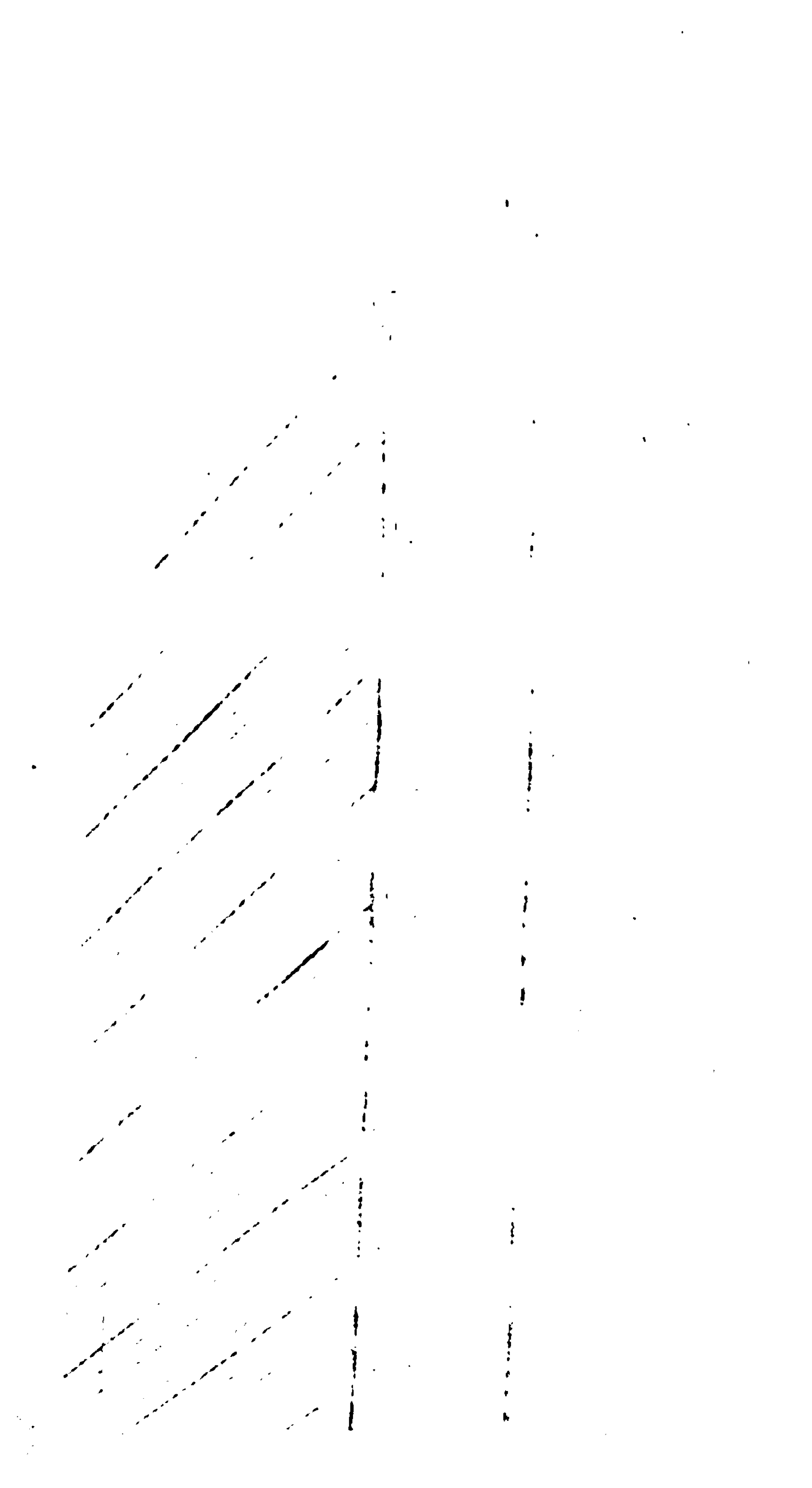
1171 El Eclipse de Luna es la obscuridad que causa en su disco la sombra de la Tierra. El *eclipse es total* quando toda la Luna queda obscurecida; y *el eclipse es parcial* quando parte del disco lunar se mantiene iluminado. El *eclipse central* es el que sucede quando la oposicion de la Luna se verifica en el punto mismo del nudo; entonces atraviesa por el centro mismo el cono umbroso, y este es el motivo de llamarse central esta especie de eclipse.

Si la Luna en el momento de su oposicion verdadera está tan distante de sus nudos, que su latitud pase de 30′, el eclipse lunar no podrá ser total, y si la latitud pasare de 64′, no podrá haber eclipse, porque la sombra de la Tierra jamás coge en la órbita de la Luna mas de 47′, y el semidiámetro 17′; por consiguiente para que el limbo de la Luna pueda tocar la sombra de la Tierra, es pre-


3h
Plana 732 I
N 2h 45'
P
M
H
C
A
K
R
S



Plana. 732. 2a.
H7h14
13 51
50 15
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Segundos y decimales de la paralaxe de Venus en el Sol
52
50
48
46
44
42
40
30
20
10



preciso que la distancia de sus centros, ó la látitud de la Luna no pase de $64'$. Fig.

1172 El movimiento de la Luna le medimos con los arcos celestes que parece que traza, es por lo mismo indispensable medír del mismo modo la sombra que atraviesa en lós eclipses, esto es lo ancho de aquel cono umbroso que la Tierra arroja tras sí, interceptando la luz del Sol, como hacen todos los cuerpos opacos.

Sea *S* el centro dél Sol; *T*, el centro de la Tierra; 181.
L, el de la Luna en oposicion; *SA*, el semidiámetro del Sol; *TB*, el semidiámetro de la Tierra; *LC*, el semidiámetro de la sombra de la Tierra en el parage donde la Luna la debe atravesar, esto es, el radio de un círculo que es la seccion (perpendicular al ege) del cono umbroso en la region de la Luna.

Al ángulo *CTL* formado en el centro de la Tierra y cuya base es el lado *CL*, le llamamos el semidiámetro de la sombra; es el ángulo del movimiento de la Luna, ó el arco de su órbita que parecerá andar en la semiduracion del eclipse central, esto es, al atravesar la sombra desde *C* á *L*.

1173 El triángulo rectilíneo *CAT* cuyo lado *AT* es prolongado hasta *D*, tiene su ángulo externo *CTD* igual á los dos ángulos internos opuestos *BAT* y *BCT* de los quales el uno es la paralaxe del Sol, el otro la de la Luna (290); luego el ángulo *CTD* es igual á la suma de las paralaxes. Si de esta suma restamos el ángulo *LTD* que-

Fig. quedará el ángulo *CTL* del semidiámetro de la sombra;
181. pero el ángulo *LTD* es igual al ángulo *ATS* que mide el semidiámetro aparente del Sol; luego *si de la suma de las paralaxes se resta el semidiámetro aparente del Sol, la resta será el semidiámetro de la sombra.*

Por egemplo, la paralaxe de la Luna en el instante de la oposicion del dia 17 de Marzo de 1764 era de 60′ 56″, la del Sol es constantemente de 9″ (598); es, pues, 61′ 5″ la suma de las paralaxes; si de ella restamos el semidiámetro del Sol 16′ 5″, será el semidiámetro de la sombra 45′ 0″, al qual se deberian añadir unos 45″ por razon de la atmósfera de la Tierra.

1174 El semidiámetro de la sombra hallado por la regla precedente puede variar desde 37′ 48″ hasta 45′ 54″, es el mayor posible quando la Luna es perigea, y el Sol apogeo.

1175 El diámetro de la Tierra, y la paralaxe de la Luna son tan conocidas que podemos estar seguros de que es exacta la determinacion del diámetro de la sombra sacada por la regla precedente. Sin embargo, quando se observan los eclipses se halla constantemente que la sombra es algo mayor de lo que la dá la regla; y no hay duda en que esto proviene de la densidad de la atmósfera.

La densidad del ayre es considerable, y reflecte tantos rayos que forma crepúsculos, causa las refracciones astronómicas, y debilita la luz del Sol en el orizonte. No es, pues, de estrañar que lo sea bastante para interceptar par-

parte de los rayos que iluminan la Luna, y formar una Fig.
especie de orillo al rededor de la sombra de la Tierra. Esta es una de las causas porque la sombra es mal terminada, y se hallan con frecuencia $2'$ de diferencia entre los tiempos del principio de un mismo eclipse de Luna observado por diferentes Astrónomos.

No concuerdan unos con otros los Astrónomos en quanto á la cantidad que la densidad de la atmósfera aumenta el semidiámetro de la sombra. Pero seguiremos la regla de Mayer que cree que la correccion de la atmósfera siempre es $\frac{1}{60}$ del semidiámetro de la sombra, quiero decir, que se le han de añadir tantos segundos quantos minutos hay. En el egemplo propuesto (1173) hemos hallado $45'\ 0''$, añadiendo $45''$, sacaremos el semidiámetro aparente de la sombra de la Tierra, comprendiendo su atmosfera, $45'\ 45''$.

Cómo se hallan las Fases de un eclipse de Luna.

1176 En conociendo la hora del plenilunio ó de la oposicion verdadera (936), la latitud de la Luna para aquel tiempo, la inclinacion de su órbita que pende del movimiento horario de la Luna así en longitud como en latitud, y el movimiento horario del Sol; se debe averiguar el tiempo del medio del eclipse.

Sea *L* el lugar de la Luna en el momento de la opo- 182.
sicion; *O*, el centro de la sombra de la Tierra á la distancia de la Luna; *OL*, la latitud de la Luna, ó su distan-

cia

Fig. 182. cia á la eclíptica *KG*; *OM*, la perpendicular bajada á la órbita aparente de la Luna *EMS*. En el momento que el eclipse empieza, el borde de la Luna toca en *P* el borde de la sombra; así *E* es el lugar de la Luna al principio del eclipse, *S* el lugar de la Luna al fin del eclipse, ó á la salida de la sombra. Los triángulos *MOE*, *MOS* son iguales, pues tienen comun el lado *OM*, los lados OE, *OS* iguales, y son ambos rectángulos en *M*; será, pues, el lado *EM* igual al lado *MS*; luego el punto *M* señala el medio del eclipse.

1177 En el triángulo *LOM* que forman el círculo de latitud *OL* y la perpendicular *OM*, el ángulo *LOM* es igual á la inclinacion de la órbita aparente de la Luna (942); es conocido tambien el lado *LO*, latitud en oposicion; se hallará *LM* con hacer esta proporcion: *El radio es al seno de la inclinacion*, *como la latitud* OL *es al intervalo* LM. Se le convertirá en tiempo á razon del movimiento horario de la Luna, diciendo: *El movimiento horario relativo (945) es á* 1^h *ó* $3600''$, *como el espacio* LM *es al tiempo que habrá entre la conjuncion y el medio del eclipse.* Se le restará del tiempo de la conjuncion, si la latitud de la Luna fuere creciente; se le añadirá al tiempo de la conjuncion, si la latitud fuere decreciente, ó se fuere la Luna arrimando al nudo, y estará determinado el medio del eclipse.

1178 Por egemplo, en el eclipse de Luna del dia 17 de Marzo de 1764, el movimiento horario de la Luna era

era de 37′ 23″ en longitud, 3′ 26″ en latitud, el movimiento horario del Sol 2′ 29″; la diferencia de los movimientos horarios 34′ 54″ es al movimiento en latitud 3′ 26″, como el radio es á la tangente de la inclinacion aparente 5° 37′ (941). El coseno de esta inclinacion 5° 37′ es al radio, como la diferencia de los movimientos horarios en longitud, 34′ 54″, es al movimiento relativo de la Luna en su órbita aparente 35′ 4.″ La latitud de la Luna en oposicion era de 38′ 42″; el radio es al seno de la inclinacion 5° 37′, como la latitud 38′ 42″ es al intervalo *LM*, que sale de 3′ 47″ en partes de grados. El movimiento horario 35′ 4″ es á 60′ 0″, como 3′ 47″ son á 6′ 28″ de tiempo. Se añadirá este intervalo, porque la latitud de la Luna era decreciente, ó no habia llegado todavía á su nudo; y como el tiempo de la oposicion era 12^h 6′ 12″ fue el medio del eclipse á 12^h 12′ 40″, esto es, el dia 18 de Marzo 0^h 12′ 40″ de la mañana. Fig. 182.

1179 Las mismas cantidades de que nos hemos valido para hallar la diferencia *LM* entre la conjuncion y el medio del eclipse, servirán para hallar la distancia mas corta *OM* de la órbita lunar al centro de la sombra. Porque en el triángulo *LOM* rectángulo en *M*, conocemos *LO* que es la latitud al tiempo de la conjuncion, y el ángulo *LOM* igual á la inclinacion de la órbita aparente de la Luna; hallaremos el lado *OM* haciendo esta proporcion: *El radio es á la latitud* LO, *como el seno del ángulo* L, *ó el co-*

Fig. 182. *seno de la inclinacion aparente, es á la distancia mas corta* OM.

En el eclipse del dia 17 de Marzo de 1764, la latitud de la Luna *LO* era de 38′ 42″, y la inclinacion de la órbita aparente 5° 37′; pero el radio es á 38′ 42″, como el coseno de *MOL* 5° 37′ es á 2310″ ó 38′ 30;″ es, pues, esta la perpendicular que se busca. Dentro de poco nos servirá para hallar el principio, el fin y la cantidad del eclipse (1182).

1180 Una vez determinado el medio del eclipse (1177), la mas corta distancia de los centros de la sombra y de la Luna (1179), el semidiámetro aparente de la sombra (1175), y el semidiámetro de la Luna; no hay mas que resolver un triángulo para hallar el principio y el fin del eclipse.

Sea *OM* la mas corta distancia ó la perpendicular bajada desde el centro *O* de la sombra, á la órbita relativa *EMS* de la Luna; *GPAK*, la circunferencia de la sombra; *E*, el centro de la Luna en el momento que su borde empieza á tocar la sombra en *P*, esto es, en el momento que el eclipse empieza; *S*, el centro de la Luna á su salida de la sombra, quando el eclipse acaba ó quando el último borde de la Luna toca en *R* el borde de la sombra. La distancia *OE* de los centros de la Luna y de la sombra se compone de las cantidades *OP*, *PE*; la una de ellas *OP* es el semidiámetro de la sombra (1173), y la otra el semidiámetro de la Luna (831): la distancia *OS*, al

al fin del eclipse, se compone de las cantidades *OR*, *OS*, quiero decir, que tambien es igual á la suma del semidiámetro de la sombra y del de la Luna. Luego *OS* es igual á *OE*, á no ser que se quiera llevar en cuenta la corta variacion que puede padecer la paralaxe de la Luna en el discurso de algunas horas, y la diferencia que proviene de la atmósfera (1175), que comunmente se desprecia. Fig. 182.

1181 En el triángulo rectilineo *OEM*, rectángulo en *M*, conocemos la perpendicular *OM* (1179), y la suma *OE* de los semidiámetros de la Luna y de la sombra; buscaremos el tercer lado *ME*, y le convertiremos en tiempo egecutando la siguiente proporcion: El movimiento horario de la Luna en su órbita aparente es á 1 hora ó 3600″, como el lado hallado *ME* es á la semiduracion del eclipse en segundos de tiempo. Restando esta semiduracion del tiempo del medio del eclipse (1177), sacaremos el principio; y si añadimos la semiduracion con el medio, sacaremos el fin.

1182 Así, en el eclipse de Luna del dia 17 de Marzo de 1764, la perpendicular *MO* fue de 38′ 30″, el semidiámetro *OP* de la sombra 45′ 0″, el de la Luna 16′ 39″, la suma de los semidiámetros añadiéndola 1′ 40″ por razon de la atmósfera (1175) fue 1° 3′ 19.″ Luego en el triángulo *EMO* conocemos *OE* y *OM*, hallaremos *ME*, egecutando la operacion siguiente, en la qual practicaremos el método mas acomodado para resolver dicho triángulo.

Fig. Suma de los lados *OE* y *OM*, 1° 41′ 49″ Log. 3,785970

182. Difer. de los lados *OE* y *OM*, 24′ 49″ Log. 3,172895

Suma de los dos logaritmos........................ 6,958865

Mitad de la suma ó log. de *EM*.................. 3,479432

Al qual corresponde 50′ 16.″

El movimiento horario de la Luna en su órbita relativa era de 35′ 4″; diremos, pues, 35′ 4″ es á 1^h, como *EM* 50′ 16″ es á la semiduracion del eclipse 1^h 26′ 0.″

Esta semiduracion del eclipse es el tiempo que la Luna gastó en ir desde *E* á *M*; pero el medio del eclipse en *M* se halló 12^h 12′ 39″; si de esta cantidad restamos 1^h 26′ 0,″ tendremos para el principio del eclipse 10^h 46′ 39″, y si se la añadimos, sacaremos el *fin del eclipse* 13^h 38′ 39.″

1183. En los eclipses totales de Luna, hay dos fases mas que buscar, es á saber, la *Inmersion* y la *Emer-*

183. *sion*, esto es, el momento en que la Luna entra totalmente en la sombra, y el momento en que empieza á salir. Sea *D* el lugar de la Luna en el instante que está bastante dentro de la sombra para que su último borde *N* toque el borde interior de la sombra. Tendremos un nuevo triángulo *OMD*, cuya hypotenusa *OD* es igual á la diferencia entre el semidiámetro de la sombra *ON*, y el semidiámetro *DN* de la Luna; pero la operacion es la misma que antes (1182). La semiduracion del eclipse total se resta del medio del eclipse, para sacar la inmersion que sucede en *D*, y se aña-

añade para sacar la emersion que sucede en *V*. Fig.

1184 Quando se conoce la mas corta distancia de 182.
los centros *OM*, el semidiámetro de la sombra *OA*, y el semidiámetro de la Luna *MB*, es facil de determinar la parte eclipsada de la Luna, esto es, la cantidad *AC*. Porque $AM = OA - OM$. Si la añadimos *MC*, sacaremos *AC*; luego $AC = OA + MC - OM$, quiero decir, que *la parte eclipsada es igual á la suma de los semidiámetros de la Luna y de la sombra, menos la mas corta distancia.*

1185 Así, en el eclipse del dia 17 de Marzo de 1764, la suma de los semidiámetros era de 63′ 19″, la mas corta distancia de 38′ 30″, la diferencia 24′ 49″ fue la parte eclipsada. Se suele contar en dígitos ó en duodécimas partes del diámetro de la Luna; se hará, pues, esta proporcion: 33′ 18″ son á 12 dígitos o minutos, como 24′ 49″ son á un quarto término, que saldrá de 8^{d} $56'\frac{1}{2}$; fue, pues, la cantidad del eclipse de 8 dígitos y $56'\frac{1}{2}$ de dígito.

1186 La regla que acabamos de proponer para ha- 183.
llar la cantidad de los eclipses de Luna, se verifica sea que 184.
el centro de la Luna y su órbita aparente esten fuera de la sombra, sea que al contrario la Luna esté toda entera en la sombra. Porque en la figura 184 tenemos $OA + CM = AC + OM$, ú $OA + CM - OM = AC$, y en la otra figura que corresponde á los eclipses totales, tenemos $AC = OA - OM + CM$. En este último caso se dice que la cantidad del eclipse pasa de 12 dígitos, porque se in-

Fig. cluye en él la parte *AB* de la sombra, que pasa el borde de la Luna. Por parte eclipsada entendemos toda la cantidad *AC* que sería eclipsada con efecto, si tuviera la Luna bastante diámetro para llegar hasta *A*.

1187 Se pueden determinar sin cálculo con la regla y el compás, todas las circunstancias de un *eclipse de Luna*, con tal que se haya calculado por las tablas el tiempo de la conjuncion, la paralaxe y el movimiento horario. Este método es muy bastante quando no se lleva mas mira que la de pronosticar los eclipses que ha de haber. Porque en la operacion gráfica no se puede cometer un error de un minuto quando la figura tiene un pie de diámetro por lo menos; y no hay que esperar mayor precision en el pronosticar un eclipse de Luna; apenas podemos asegurar que no haya un minuto de error en la observacion. Por estos motivos creo que basta la operacion gráfica para todos los eclipses de Luna.

182. Por egemplo, despues de hallado de $46'$ (1173) el semidiámetro de la sombra de la Luna; divido el radio *OG* en 46 partes, tomo *OL* igual á la latitud de la Luna $33' \frac{2}{3}$; y en el punto *L* tiro la órbita de la Luna, *ELS* inclinada $5^\circ\ 37'$ al paralelo de la eclíptica. Siendo de $35'$ el movimiento horario relativo, tomo $35'$ en las divisiones de *OG*, llévolas á la órbita desde *L* á *X*; y señalando en *L* el tiempo de la conjuncion $12^h\ 6'$, señalo $11^h\ 6'$ en el punto *X* donde cae el movimiento horario; divido *XL* en $60'$ de tiempo, y prosiguiendo la division de la órbita

ELMS

ELMS en tiempo, hallo que en estas divisiones el punto *S* Fig. corresponde á $13^h\ 39'$ lo mismo que salió por el cálculo (1182).

1188 La *Penombra* es una obscuridad menor que la 181. del cono umbroso; es una luz debil, arrojada por una parte del disco solar, que alumbra la Luna, aun quando su centro no la envia luz ninguna. El punto *E*, que está en el lado *OEP* del cono umbroso, está en una obscuridad total, porque ningun rayo de Sol le alumbra. El punto *F*, que está sobre la linea *AGF*, tirada por el limbo superior *A* del Sol, y por el borde inferior *G* de la Tierra, goza una luz perfecta, porque vé el disco entero *AO* del Sol; pero todos los puntos situados entre *E* y *F* no vén mas que una parte del disco solar, no reciben mas que una parte de la luz del Sol, y forman la penombra. Este es el motivo de ser tan dudoso el principio de un eclipse lunar, que suelen padecerse en su determinacion equivocaciones de muchos minutos.

1189 Se reparan diferencias notables en el color de los eclipses de Luna; quando la Luna es apogea, atraviesa el cono umbroso mas cerca de su vértice; entonces parece mas colorada, mas luminosa que quando suceden los eclipses en el perigeo. Porque en este último caso los rayos refringidos por la atmósfera, que se dispersan en el cono umbroso, y disminuyen su obscuridad, no llegan hasta el centro de la sombra ó al ege del cono, por razon de su ancho y de su proximidad á la Tierra. Y en algunos eclip-

Fig. ses como el del mes de Diciembre de 1601, no se vía la Luna aunque se la mirase con anteojos.

Eclipses de los Satélites de Júpiter.

1190 Antes de declarar lo que pertenece á este asunto, hemos de determinar el ancho de la sombra que los Satélites atraviesan en sus eclipses. Esta sombra que Júpiter arroja detras de su disco, no es un cilindro perfecto, porque el Sol que es el cuerpo luminoso es mayor que Júpiter; los rayos que salen de los dos bordes del Sol y tocan los bordes de Júpiter, son pues, convergentes, y como se sabe la razon entre los diámetros de Júpiter y del Sol, se averiguaría facilmente el punto donde los dos rayos concurririan para formar la punta del cono umbroso, y de aquí se inferiría el diámetro de la seccion, en la region de cada Satélite.

Pero este método no se puede usar en los eclipses que observamos 1.° porque la penombra que es mayor ó menor, segun á qué distancia se considera de los bordes del cono umbroso (1188), es causa de que no empieza la obscuridad exactamente en el punto que el cálculo determinaría. 2.° Porque los Satélites tienen un diámetro sensible, y no entran en la sombra sino poco á poco; de donde se sigue que quando perdemos el Satélite de vista con un anteojo de 15 pies, no sabemos á punto fijo si su centro está en los bordes del cono umbroso; y el cálculo del ver-

verdadero ancho de la sombra no nos manifestaría el instante de la inmersion. Fig.

1191 Hemos, pues, de acudir á la esperiencia para determinar el diámetro de la sombra, quiero decir, á la duracion de los eclipses observados quando suceden cerca de los nudos, y los Satélites atraviesan la sombra por el centro (1195).

Pero como respecto del primero y segundo Satélite, la inmersion y emersion jamás se vén cerca de los nudos, nos es preciso comparar las inmersiones que suceden algunos dias antes de la conjuncion, con las emersiones que suceden algunos dias despues; deduciendo el número de las revoluciones enteras que ha habido entre la inmersion y la emersion. Por este método se han determinado los semidiámetros de la sombra en tiempo respecto de cada Satélite, quales están en la tabla de los elementos; el del primer Satélite es de $1^h\ 7'\ 55''$, quiero decir, que está $2^h\ 15'\ 50''$ en la sombra quando la atraviesa por el centro, y está en ella lo mas que puede.

Tambien es preciso averiguar las semiduraciones del segundo Satélite, por medio de las inmersiones que ha habido antes de la oposicion, y las emersiones que se observan despues de la oposicion, aunque haya entre ellas un intervalo de uno ó dos meses. En estos casos se debe poner cuidado en escoger quanto sea posible, observaciones hechas por unas mismas personas, y con unos mismos anteojos, á las mismas distancias de la oposicion, y tales que la exactitud de cada una es-

Fig. esté confirmada con otras anteriores ó posteriores, y cuya distancia á la oposicion sea entre 10 y 30 dias.

1192 La revolucion sinódica es á 360°, como el semidiámetro de la sombra en tiempo, es al semidiámetro en grados; su valor estará tambien en la tabla de los elementos. Así, como la duracion máxima de los eclipses del segundo Satélite es de $1^h\ 25'\ 40''$, tenemos $6°\ 1'\ 33''$ para el semidiámetro de la sombra en grados de su órbita. Tambien se espresará en semidiámetros de Júpiter, diciendo: 1 : 9,494 :: sen $6°\ 1'\ 33''$: 0,9967; quiero decir, que *el radio de Júpiter es al radio de la seccion de la sombra á la distancia del segundo Satélite, como* 1000 *es á* 9967.

1193 El diámetro de la sombra en tiempo ó la duracion de los eclipses centrales que suponemos siempre una misma, debe variar si las órbitas de los Satélites son excéntricas. Pongo por caso, para el segundo Satélite, el semidiámetro de la sombra se halla algunas veces $1^h\ 25'$, otras $1^h\ 27'$; esto prueba una excentricidad. En el quarto Satélite, cuya órbita es seguramente elíptica, segun consta de repetidas observaciones de Bradley, la diferencia debería ser reparable en algunos casos; pero el Satélite está mas lejos de Júpiter en su ápside superior, y atraviesa una seccion de sombra algo menor que en el ápside inferior.

1194 Luego que se hubieron observado muchas veces de seguida los eclipses de los Satélites de Júpiter, se reparó que las duraciones de sus eclipses no siempre eran iguales; hay ocasiones en que el tercer Satélite no está

eclip-

eclipsado mas que 40', y en otras está eclipsado 3^h 34.' Fig.
Se reparó tambien que el quarto Satélite en algunos tiempos padecia eclipse en cada revolucion, y algunos años despues pasaba mas arriba de Júpiter sin padecer eclipse. De aquí infirieron los Astrónomos que las órbitas de los Satélites no estaban en el mismo plano que la órbita de Júpiter; porque si esto fuera, todos los Satélites hubieran padecido eclipse en cada revolucion, y siempre durára el mismo tiempo; estas diferencias en la duracion de los eclipses son el único método por el qual se determinan las inclinaciones de las órbitas.

1195 Es indispensable declarar aquí cómo la inclinacion de las órbitas causa la desigualdad en las duraciones de los eclipses, y segun que ley varía esta duracion. Esplicaremos, pues, por qué no siempre atraviesan los Satélites el cono umbroso por su centro, y en qué razon varían las cuerdas que en él andan.

Quando un Satélite atraviesa el cono umbroso por su centro, está puntualmente en la linea recta que vá desde el centro de Júpiter al centro del Sol; está, pues, en la seccion comun de su órbita con la de Júpiter, porque está á un mismo tiempo en el plano de su órbita (pues nunca sale de ella), y en el plano de la órbita de Júpiter, pues la linea tirada desde el Sol á Júpiter está en el plano de dicha órbita. Estando entonces el Satélite en la seccion comun de su órbita y de la de Júpiter, es evidente que tambien está en ella Júpiter; se puede decir que Júpiter está entonces en el nudo

de

Fig. de su Satélite. Por consiguiente quando Júpiter está en el grado de longitud, al qual corresponde uno de los nudos de la órbita de un Satélite (visto desde el centro de Júpiter), el Satélite atraviesa la sombra por el centro, y la duracion de su eclipse es la máxima.

185. Sea *SO* la linea de los nudos, ó la línea en que se hallaba Júpiter, quando el plano de la órbita del Satélite se dirigía ácia el Sol, y los Satélites atravesaban la sombra por el centro. Supongamos que Júpiter haya caminado desde *O* á *I*, teniendo á su al rededor la órbita del Satélite, esta órbita se mantendrá siempre paralela á sí misma, conforme hemos probado respecto de la Tierra (233), y la linea de los nudos estará en una direccion *AC* paralela á *SO*. Por consiguiente, quando Júpiter se aparta del nudo, la linea de la sombra yá no se halla en la seccion comun de las órbitas de Júpiter y del Satélite; luego llegando el Satélite á estar en oposicion en el punto *M* no estará en el plano de la órbita de Júpiter, y no estará en la linea de los centros, sino mas abajo ó mas arriba.

1196 Quando Júpiter está en el nudo de uno de sus Satélites, un observador supuesto en el Sol se halla en el plano de la órbita del Satélite, y la vé en forma de linea recta. Para verla siempre recta, sería preciso que pasara siempre por su ojo, que la seccion comun ó la linea de los nudos pasara siempre por el Sol; para esto sería menester que diera la vuelta al cielo igualmente que Júpiter en el discurso de doce años, cuya circunstancia no se verifica. La linea

nea de los nudos viene á estar fija en el cielo, quiero decir paralela á sí misma, y dirigida sensiblemente al mismo punto del cielo; despues que pasa por ella Júpiter, se pasan seis años antes que vuelva á pasar otra vez. Fig.

1197 Sean, pues, *NCIA* la linea de los nudos; *ABCD*, la órbita del Satélite que atraviesa en *A* y *C* el plano de la órbita de Júpiter; es menester figurarse que la órbita del Satélite está levantada en *B* sobre el plano de la estampa, y está algun tanto al norte; al contrario en *D*, está un poco al mediodia, ó debajo del plano de la figura. Desde *A* hasta *B* el Satélite se vá siempre levantando mas arriba del plano de la órbita de Júpiter; desde *B* hasta *C* vuelve al mismo plano; y desde *C* hasta *D*, baja debajo del plano, y vuelve al plano desde *D* hasta *A*. Por ser *B* el límite, el punto de la latitud máxima, ó de la elevacion máxima del Satélite respecto del plano de la órbita de Júpiter, llegado que sea el mismo Satélite á *M* en su conjuncion superior donde padece eclipse, no estará todavía en su latitud máxima, y estará tanto menos distante del plano de la figura ó de la órbita de Júpiter, quanto menor fuere el ángulo *AIM* ó su igual *SIN*. Pero el ángulo *SIN* que es la distancia del Satélite á su nudo, es igual al ángulo *ISO*, ó á la distancia que hay entre el lugar *I* de Júpiter, y la linea *SO* suponiéndola fija, á la qual la linea de los nudos *IN* se mantiene siempre paralela, sea el que fuere el lugar de Júpiter. Luego la latitud del Satélite en *M* penderá del arco *AM*, ó del ángulo *IOS*, dis- 185.

tan-

Fig. tancia de Júpiter á la linea de los nudos *SO*, que siempre corresponde á mediados del onceno signo de longitud.

185. 1198 La cantidad que el punto *M* se levanta sobre el plano de la órbita de Júpiter, es á la cantidad que el punto *B* se aparta, como el seno de *AM* es al seno del arco *AB*, esto es, al radio. Porque si dos círculos se cortan en *A* y *C*, su distancia en diferentes puntos como *M*, perpendicularmente al círculo inclinado, ó á la órbita del Satélite, es como el seno de la distancia al punto *A*, esto es, á la interseccion, midiendo esta distancia sobre el otro círculo, que es la órbita de Júpiter. Por consiguiente la latitud del Satélite en *M*, es como el seno de la distancia de Júpiter al nudo del Satélite, medida sobre la órbita de Júpiter.

1199 Quando en virtud del movimiento de Júpiter en su órbita el radio *SI* ha llegado á ser perpendicular á la linea de los nudos *SO* ó *IN*, el punto *M* de la conjuncion superior concurre con el punto *B*, que es el límite de la latitud máxima. Entonces el ángulo de la órbita con el rayo visual *SIM*, es igual á la inclinacion del Satélite, por egemplo, 3°, y la órbita vista desde el Sol parece en forma de elipse, cuyo ege mayor es al menor, como el radio es al seno de 3° (61), no llevando en cuenta el movimiento de Júpiter mientras dura la revolucion del Satélite, ó

186. considerando el Satélite solo respecto de Júpiter. Sea *S* el Sol; *I*, el centro de Júpiter; *IH*, el radio de la órbita de un Satélite que está en un plano perpendicular á la órbita de Júpiter, é inclinado al rayo solar la cantidad del ángu-

gulo *SIH*; tendremos *IH* : *KH* :: *R* : sen *KIH*, luego Fig.
KH = *IH*. sen *KIH*, esta es la cantidad que el Satélite 186.
parecerá que se levanta encima del plano del ojo en el tiempo que la elipse tuviere su abertura máxima. En las demás posiciones de Júpiter respecto del nudo, esta cantidad menguará como el seno de la distancia de Júpiter al nudo (1198). Así, si llamamos *I* la latitud máxima, ó la inclinacion del Satélite; *D*, la distancia de Júpiter al nudo del Satélite; y *R*, la distancia del Satélite á su planeta ó el radio de su órbita, será *R*. sen *I*. sen *D* la cantidad que el Satélite parecerá elevado sobre el plano de la órbita de Júpiter, perpendicularmente á la órbita del Satélite, en el momento de su conjuncion superior. Esto basta para calcular la duracion de los eclipses.

1200 Esta elevacion del Satélite mas arriba de Júpiter es igual á su depresion en el punto opuesto; luego la elipse que traza al parecer es mas ó menos abierta, conforme Júpiter se aparta de la linea de los nudos. Quando el 187.
ege menor de esta elipse es mas ancho que el cono umbroso, el Satélite pasa mas arriba de la sombra; esto le sucede siempre al quarto Satélite de Júpiter unos dos años despues que pasó Júpiter por los nudos de los Satélites. Quando Jú- 188.
piter dista 30° de la linea de los nudos, la elipse tiene la mitad de la abertura que tenia en el caso antecedente, por ser el seno de 30° la mitad del seno total; entonces el Satélite atraviesa la sombra á pesar de la oblicuidad de su órbita.

1201 La seccion de la sombra de Júpiter en la region

Fig. gion del Satélite está figurada en el círculo *EDBF*, que
189. suponemos perpendicular á la linea de los centros del *Sol* y de Júpiter. A este círculo le atraviesa un diámetro *QB*, que es una porcion de la órbita de Júpiter; *ED*, es una porcion de la órbita del Satélite; *CA*, es la perpendicular á la misma órbita; es un arco, el qual visto desde el centro de *Júpiter* no es otra cosa que la latitud del Satélite; su seno sería igual á sen *I*. sen *D* (III. 698); pero el arco *CA* visto desde Júpiter es sensiblemente *R*. sen *I*. sen *D* (1199).

Como es mas acomodado para el cálculo de los eclipses referir todas las partes de esta figura al semidiámetro de *la sombra* (1191), esto es, á la semiduracion de los eclipses, que es la mayor de todas, y está representada en *CB*, convertiremos *CB*, *CA* y *AD* en segundos de *tiempo*; *tambien expresaremos* la distancia de Júpiter al *Satélite*, ó *el radio* de su órbita en partes de la misma naturaleza ó segundos de tiempo, substituyendo en lugar de *R* el tiempo que gasta el Satélite en andar un arco de igual longitud que el radio de su órbita, esto es, un arco de 57° (III. 487); porque poco importa que la distancia que se toma por unidad, sea en tiempo, en grados, ó semidiámetros de Júpiter. Para averiguar quánto tiempo gasta el Satélite en andar *un* arco de 57°, basta hacer esta proporcion: 360° ó 1296000'' son á la revolucion sinódica, como 57 ó 206265'' son al tiempo que se busca, que llamaremos *t*; se hallará su valor respecto de cada Satélite en la tabla de los elementos, multiplicando sen *I*. sen *D* por este número de segundos de tiem-

tiempo, sacaremos CA en segundos de tiempo $= t$. sen I. sen D. Tenemos tambien el radio CD ó CB en segundos de tiempo, y esta es la semiduracion del eclipse mayor, la que sucede quando está Júpiter en el nudo del Satélite; finalmente, es el semidiámetro de la sombra en tiempo (1191) que llamaremos r. Fig. 189.

En el triángulo CAD rectángulo en A, tenemos $CA = \sqrt{(CD^2 - AD^2)}$, y llamando d la semiduracion que corresponde á AD, $CA = \sqrt{(rr - dd)} = R$. sen I. sen D (1199); luego si tomamos el tiempo que corresponde á 57°, esto es t, por radio, á fin de que todo esté espresado en tiempo, tendremos sen $I = \frac{\sqrt{(rr-dd)}}{t\,.\,\text{sen}\,D}$. Esta fórmula puede dar á conocer la inclinacion, en conociendo el semidiámetro de la sombra, y una semiduracion observada. Pero como es dificultoso valuar con precision estos quadrados, nos es forzoso apelar á los senos (1203); tambien se puede hacer uso de $\sqrt{[(r+d)(r-d)]}$, cuyo valor se determina con tomar la semisuma de los logaritmos de $r + d$ y $r - d$.

1202 Para sacar la espresion de la semiduracion y de la inclinacion, se considera el triángulo CAD, en el qual $CD : CA :: R :$ sen ADC, cuyo complemento es ACD; luego cos $ACD = CA$, pero $CA = t$. sen I. sen D. Por consiguiente en conociendo la inclinacion de una órbita y la distancia de Júpiter al nudo del Satélite, se conocerá CA y el ángulo ACD, cuyo seno AD mide la semiduracion del eclipse. Para determinar esta semiduracion en tiempo, se

Fig. 189. hará esta proporcion: El radio *CB* es á la máxima duracion en tiempo, ó al semidiámetro de la sombra, como el seno *AD* es á la semiduracion que se busca; quiero decir, que *se multiplicará el tiempo de la máxima semiduracion por el seno del ángulo* ACD, *y se sacará la semiduracion actual.*

Supongamos, para dar un egemplo, que se nos ofrezca determinar la semiduracion de un eclipse del quarto Satélite para el dia 19 de Noviembre de 1761, á 6 horas, suponiendo la inclinacion de $2^{\circ}\ 36'$, el lugar del nudo $10^{s}\ 17^{\circ}\ 40'$, y la semiduracion máxima $2^{h}\ 23'$. El lugar de Júpiter en su órbita aquel dia era $0^{s}\ 4^{\circ}\ 23'$, luego su distancia al nudo es $1^{s}\ 16^{\circ}\ 43'$, ó $46^{\circ}\ 43'$. Luego

Log. sen *D*............................ 986212

Log. sen inclin. $2^{\circ}\ 36'$...... 865670

Log. sen *I*. sen *D*................. 851882

Se le debe añadir el log. del tiempo para 57° (1201) para sacar el log. de *AC* en segundos de tiempo, y restar el log. del radio *CD* en segundos, ó de $2^{h}\ 23'\ 0''$ para sacar el de $\frac{AC}{CD} = \cos ACD$. Luego el log. constante 1,42895 que es el log. de *t*, ó del tiempo para 57°, menos el del semidiámetro de la sombra, añadido al de sen *I*. sen *D*, dá el del coseno del ángulo *ACD*.

Log. sen *I*. sen *D*............................ 8,51882

Log. de *u*.. 1,42895

Log. cos del áng. *ACD*, $27^{\circ}\ 32'$.. 9,94777

Log.

Log. del seno del mismo arco........... 9,66489 Fig.

Añádase el log. de r ó $2^h\ 23'$........ 3,93349 189.

Log. de la semiduracion $1^h\ 6'\ 6''$.. 3,59838

Sacaríamos $1^h\ 6'\ 8''$ si hiciéramos uso de los segundos del ángulo *ACD*.

1203 Tenemos, pues, esta fórmula $\frac{t \,.\, \text{sen}\, I \,.\, \text{sen}\, D}{r} =$ cos *ACD*; y el seno de *ACD* multiplicado por el semidiámetro de la sombra en tiempo (que llamamos r) dá la semiduracion que se busca. El tiempo para 57° se halla respecto de cada Satélite en la tabla de los elementos, igualmente que el valor de $\frac{t}{r}$ de tiempo para 57° dividido por el semidiámetro de la sombra, igual á la cotangente del arco andado por el Satélite, quando atraviesa la sombra por el centro. A este valor le llamamos u, y d la semiduracion que se busca, á fin de que tengamos u . sen I. sen D = cos *ACD*, y r . sen *ACD* = d, esta es la semiduracion del eclipse, suponiendo circular la sombra.

1204 La misma fórmula servirá para hallar la inclinacion, ó para hallar la distancia al nudo, por medio de la semiduracion observada. Porque si dividimos esta semiduracion por r, sacaremos el seno del ángulo *ACD*, y el coseno de este ángulo dividido por u dá el valor de sen I. sen D. Por consiguiente si dividimos esta última cantidad por sen I, suponiendo conocida la inclinacion, sacaremos sen D; pero si dividimos por sen D, dado el lugar del nudo, sacaremos sen I.

Fig. 1205 En las reglas precedentes hemos supuesto que
189. *AD* era una linea recta y no un arco de círculo, este supuesto no puede causar ninguna diferencia sensible, á no ser respecto del primer Satélite. Para averiguar á quánto puede llegar, sea *N* el nudo del primer Satélite; $CB = CD = 9^{\circ}\ 35'\ 37''$, este es el semidiámetro de la sombra; *AD*, el arco trazado en la sombra, quando *AD* es paralela á *CB*, estando el Satélite á 90° de los nudos, este arco es de $9^{\circ}\ 0'\ 18.''$ En el triángulo rectángulo que forman los senos de los arcos *AC*, *CD*, tenemos $\frac{AD}{CD} =$ sen *ACD*; luego el seno del arco *AD* dividido por el seno de *BC* ó *CD* dará el coseno del arco *BD*. El seno *DG* de este arco se debe convertir en partes de la distancia del Satélite, haciendo esta proporcion: R : sen BD :: sen $9^{\circ}\ 35'\ 37''$: DG, y este valor de *DG* dividido por el coseno de *AD* ó el seno de *DN* dará el seno *AC* de la inclinacion *N*, que con esto se saca de $3^{\circ}\ 18'\ 40''$, en lugar de $3^{\circ}\ 18'\ 37''$ que se sacan suponiendo rectilineo el arco *DA*; esta diferencia se puede despreciar.

1206 Por medio de la fórmula precedente (1203) se puede hallar el tiempo en que han de finalizar los eclipses del quarto Satélite, esto es, la distancia á que es menester que esté Júpiter respecto del nudo del Satélite para que la latitud sea igual al semidiámetro de la sombra. Se deberá hacer $CA = CH$ ó CB; porque entonces pasando la órbita *AD* por el vértice *H* de la seccion de la sombra, el Satélite no entrará en ella, y no padecerá eclipse. Tendremos, pues,

u.

u. sen I. sen $D = 1$, ó sen $D = \frac{1}{u.\text{sen } I}$; consta por las observaciones que D es de unos $55^\circ\ 11'$. Si la cantidad D fuere dada por observacion, sacaremos la inclinacion, y tendremos sen $I = \frac{1}{u.\text{sen } D}$. Fig.

1207. La semiduracion de un eclipse calculada por las reglas precedentes, es una semiduracion media que varía, particularmente respecto del segundo Satélite, por causa de la atraccion del primero. Si llamamos e la longitud del primer Satélite menos la del segundo, tendremos que multiplicar la semiduracion media por la unidad mas $\frac{1}{100}$ del coseno del ángulo e, para sacar la semiduracion verdadera, segun los cálculos de Mr. Bailly; la diferencia puede llegar hasta $51''$; pero el quebrado $\frac{1}{100}$ pende de una hypótesi acerca de las masas que todavía se conocen poco.

Efectos que causa el aplanamiento de Júpiter en la duracion de los Eclipses.

1208 Observó Casini en el siglo pasado que el diámetro de Júpiter midiéndole de norte á sur, ó del uno de sus polos al otro era una décima parte menor que el diámetro de su equador. Desde entonces se han perficionado los instrumentos astronómicos, y se ha averiguado con mas exactitud esta desigualdad de modo que hoy dia se tiene por cierto que el ege de Júpiter es al diámetro de su equador, como 13 es á 14 (760). Por consiguiente, todos los cálculos que se han hecho hasta ahora de la duracion de los eclipses, suponiendo circular la seccion de la sombra, requieren

Fig. una correccion por causa del aplanamiento de *Júpiter.*

Sea FL el diámetro de la sombra de occidente á oriente,
190. qual le dá la observacion (1191); $FMLK$, la seccion circular de la sombra, que hemos considerado hasta aquí; $FDLE$, una elipse cuyo ege *menor* ED *sea* $\frac{13}{14}$ del ege mayor. Esta es la figura que corresponde á la *seccion* de la sombra de Júpiter, porque estando cortado el cono umbroso muy cerca de Júpiter, su seccion no discrepa sensiblemente de la figura de Júpiter; esta figura no varía, porque el equador de Júpiter apenas discrepa del plano de su órbita (761).

1209 Supongamos que la linea ABG paralela á CF, es el rastro de un Satélite en la sombra, quando está en sus límites, y son las duraciones de los eclipses *mas cortas*; la ordenada AB que la semiduracion del eclipse determina, es dada por observacion. Quando se supone circular la sombra, sirve una linea HI paralela é igual á AB; $CH = \sqrt{(rr - dd)}$ (1201); pero $AC : CH :: CD : CM$ (64) $:: 13 : 14$; luego $AC = \frac{13}{14}\sqrt{(rr - dd)}$. Quando la semiduracion AB es la mayor de todas, tenemos $CA = t$. sen I, sea la que fuere la figura de la sombra, y en los demás casos $CA = t$. sen D. sen I (1201), siendo el ángulo I la verdadera inclinacion; luego sen I $= \frac{\frac{13}{14}\sqrt{(rr - dd)}}{t \,.\, \text{sen}\, D}$. Por consiguiente sale menor la inclinacion quando se hace uso de la seccion elíptica; quando se suponia circular la sombra, salia mayor de lo que correspon-

ponde (1201); los senos de estas dos inclinaciones halladas en las dos hypótesis son entre sí, como 13 es á 14. Fig. 190.

1210 Por consiguiente despues de observar una semiduracion distante del nudo, se puede determinar la inclinacion de la órbita, suponiendo conocido el lugar del nudo. Porque conociendo por observacion el valor de $AC = \frac{13}{14}\sqrt{(rr - dd)}$ ó $\frac{13}{14}r\sqrt{\left(1 - \frac{dd}{rr}\right)}$, se le dividirá por u. sen D si se quiere determinar sen I, ó por u. sen I, si se quiere determinar sen D (1204).

Por egemplo, habiendo observado de 42′ la semiduracion del tercer Satélite á 90° del nudo, se pide la inclinacion que de aquí resulta en la elipse.

Log. de la semiduracion 42′ 0″ $= d$	3,401401
Log. del semidiám. de la sombra 1^h 47′ 0″ $= r$,	3,807535
Diferencia que se debe duplicar	9,593866
Log. de $\frac{d^2}{r^2} = 0,15407$	9,187732
Luego $1 - \frac{d^2}{r^2} = 0,84593$, log.	9,927334
La mitad de este log. será el de $\sqrt{\left(1 - \frac{d^2}{r^2}\right)}$	9,963667
Añadiendo el de $\frac{13}{14}$	9,967815
Sale el log. de AC ó $\frac{13}{14}\sqrt{\left(1 - \frac{d^2}{r^2}\right)}$	9,931482
Réstese el log. de u ó $\frac{t}{r}$ (1203)	1,186099
Sale el de sen I. sen D	8,745383

Tambien se debiera haber restado el seno de D, pero

 en

Fig. 190. en el caso propuesto es igual á cero, porque $D = 90°$; suponiendo la semiduracion 42′ la menor de todas. *Buscando*, pues, este logaritmo entre los de los senos, saldrán 3° 11′ 22″ para la inclinacion en dicho caso, haciendo uso de la seccion elíptica. *Si del mismo logaritmo* se restára el logaritmo seno de la inclinacion *suponiéndola* conocida, saldría el logaritmo sen de *D* ó de la distancia de Júpiter al nudo; y conociendo por otra parte el lugar de Júpiter sería facil de determinar el lugar del nudo.

1211 Para sacar la inclinacion del 4.° *Satélite*, supongamos que finalicen sus eclipses quando Júpiter está á 55° 11′ 10″ de los nudos, conforme se saca suponiendo de 2° 36′ la inclinacion en el *círculo, será menester* que *CA* ó *t*. sen *I*. sen *D* sea igual á $CD = \frac{13}{14}$. Pero si sumamos el logaritmo de *t*, esto es, 1,428954 con el del seno de $55° 11' 10'' = D$, y los restamos de el de $\frac{13}{14}$, sacaremos sen *I*, ó el seno de 2° 24′ 51″, esta es la verdadera inclinacion de esta órbita en lugar de 2° 36′ que se sacarían en la hypótesi circular (1206).

1212 Las inclinaciones que se infieren de *estas dos* hypótesis, están con corta diferencia en la *razon* de 13 á 14; es, pues, facil inferir la una de *la* otra. En la tabla de los elementos se podrá reparar que la diferencia llega á 16′ 18″ respecto del segundo Satélite, y esto es importante en los cálculos de reduccion, ó del movimiento de los nudos. No se origina de aquí diferencia alguna en

la

la tabla de las semiduraciones de los elipses, y por este motivo hemos dejado en las tablas las inclinaciones calculadas en el círculo, bien que no es mas prolijo el cálculo haciendo uso de la hypótesi de la elipse, conforme sigue. Fig. 190.

1213 Quando es dada la inclinacion igualmente que la distancia al nudo, se puede determinar con facilidad la semiduracion de un eclipse, una vez que por la propiedad de la elipse (62) CD es á CF ó 13 á 14, como $\sqrt{(AD\,.\,AE)}$ es á la semiduracion AB. Se busca primero AC que es igual al tiempo para 57° multiplicado por sen I. sen D (1202), sígase la hypótesi que se quiera. Tambien es conocida $CD = \frac{13}{14}r$, se toma su suma y su diferencia, y salen AD y AE en tiempo. Añadiendo á la mitad de la suma de los logaritmos de AD y AE, el logaritmo de $\frac{14}{13}$ que es 0,032185, se saca la semiduracion AB en la seccion elíptica. Porque como sen $I = \dfrac{\frac{13}{14}\sqrt{(rr - dd)}}{t\,.\,\text{sen}\,D}$ (1209), tenemos

$$d = \sqrt{\left(r^2 - (\tfrac{14}{13}\,t\ \text{sen}\,D\,.\ \text{sen}\,I)^2\right)} = \sqrt{\left(r^2 - (\tfrac{14}{13}\,CA)^2\right)}$$
$$= \tfrac{14}{13}\sqrt{\left[(\tfrac{13}{14}r - AC)(\tfrac{13}{14}r + AC)\right]}.$$

Sea, por egemplo, la inclinacion del tercer Satélite $= 3°\,11'\,22''$ calculada en la elipse (1210), la distancia al nudo 90°, el semiege menor $CD = 5961''$ de tiempo $= \frac{13}{14}r$.

Log. del tiempo para 57°	4,993634
Log. sen I en la elipse	8,745383

Log.

Fig. 190. Log. sen dist. al nudo 0,000000

Log. *AC*... 5483 3,7390017

CD.... 5961,4

AC.... 5483,0

Suma .... 11444,4 log 4058593

Diferencia 478,4 2679791

Suma de los log 6738384

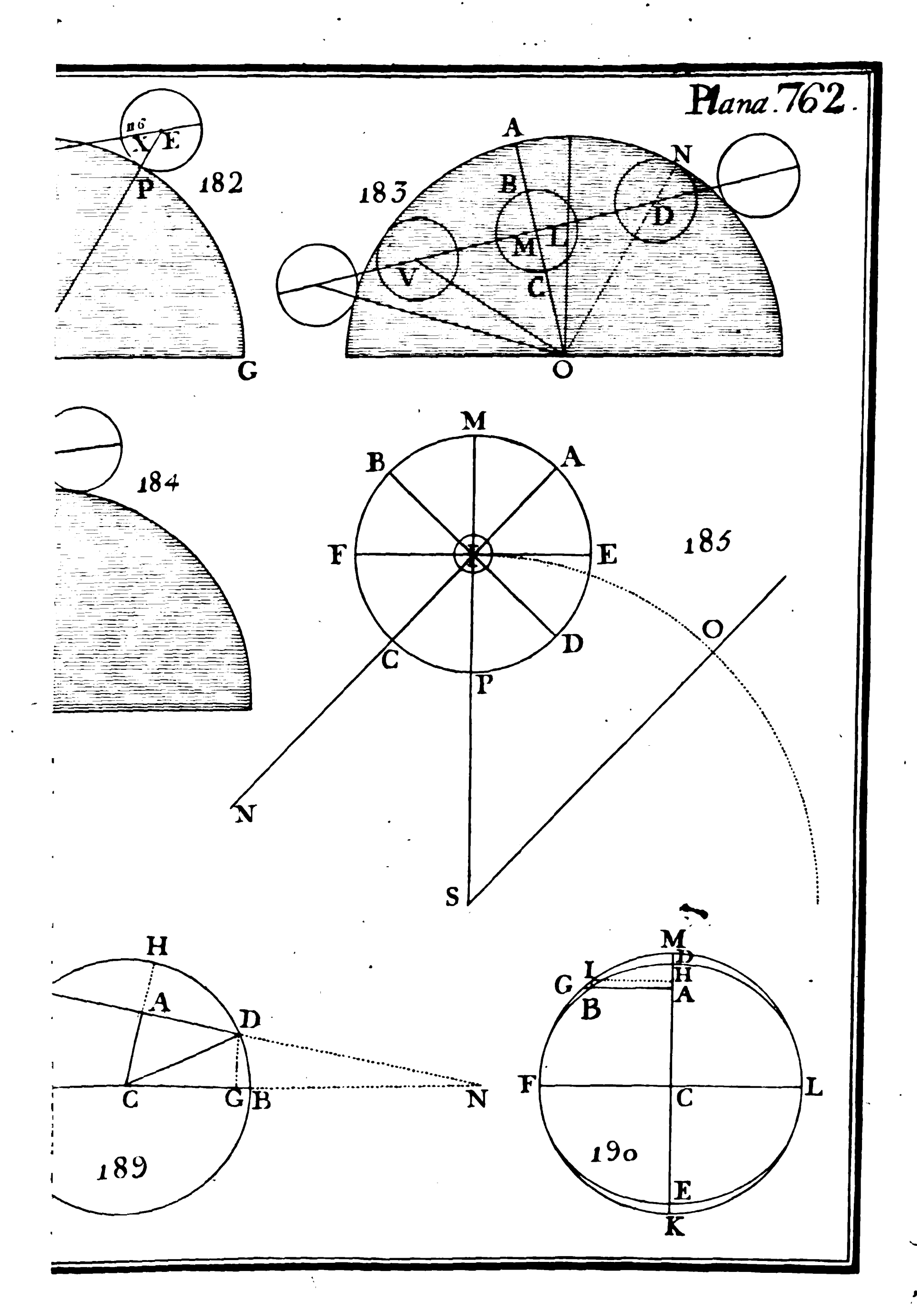
Su mitad 3369192

Log. de $\frac{14}{13}$ 0032185

Semiduracion 42′ 0″ 3401377

Esta semiduracion en la elipse es con efecto la que nos sirvió para hallar arriba la inclinacion de 3° 11′ 22.″

DE



n6
X
E
P
182
G
183
A
N
B
D
M
L
V
C
O
184
M
B
A
F
E
185
C
D
P
O
N
S
H
A
D
C
G
B
N
189
M
D
L
H
G
A
B
F
L
C
190
E
K

DE LOS COMETAS.

Fig.

1214 LOS *Cometas* son unos cuerpos celestes que parecen de tiempo en tiempo con diferentes movimientos, y que por lo comun van acompañados de una luz esparramada. Su movimiento aparente es muy diverso del movimiento de los demas planetas; pero quando se le refiere al Sol, se halla que sigue unas mismas leyes. Porque probaremos que los cometas dan la vuelta al rededor del Sol en elipses muy excéntricas, conformándose con las leyes esplicadas (*662* &c.).

El movimiento de los cometas los distingue de las estrellas nuevas; porque en estas no se ha notado ningun movimiento propio; á mas de esto, la luz de los cometas siempre es debil y apacible, es una luz del Sol que reflecten ácia nosotros, del mismo modo que los planetas. Esto lo prueba particularmente la fase observada en el cometa de 1744 de cuya parte iluminada no se via mas que la mitad. Si no se observan siempre estas fases es porque la atmósfera espesa en que están sumergidos los cometas disperge la luz, de suerte que siempre se nos manifiestan en una forma casi redonda. Los cometas se distinguen particularmente por medio de aquellos regueros de luz, que suelen rodearlos y seguirlos, que unas veces se llaman la *Cabellera*, otras la *Cola* ó *Barba* del cometa. Sin embargo ha habido cometas sin cola ni cabellera; el cometa de 1585 que Ticho observó por espacio de un mes,

Fig. mes, era redondo, no tenia ninguna seña de cola, solo su circunferencia era menos luminosa que el alma, del mismo modo que si no hubiera tenido en su circunferencia mas que algunas fibras luminosas. Por consiguiente la cola de los cometas no se debe mirar como una circunstancia que las caracterice.

Del movimiento de los Cometas en una órbita parabólica.

1215 Se han discurrido varias hypótesis para calcular el movimiento de los cometas; seguiremos el cálculo parabólico, esto es, el supuesto de que se mueven los cometas en parábolas, por ser mucho mas faciles los cálculos, y por la cortísima diferencia que hay entre una parábola y una elipse muy prolongada. La ventaja que sacamos de este supuesto consiste en que siendo todas las parábolas unas curvas semejantes, hay una misma proporcion entre sus radios vectores que están en situacion semejante, y basta conocer las distancias perihelias de diferentes cometas para calcularlos todos por una sola y misma tabla. En el tomo X daremos esta tabla general donde la anomalía verdadera está señalada para cada dia, la qual sirve para todos los cometas, siendo así que cada elipse requiere una tabla particular.

191. 1216 La tabla general supone un cometa cuya órbita sea la parábola *PCOD*, en cuyo focus *S* está el Sol; *P* es el perihelio del cometa ó el vértice de la parábola; *SP* es la distancia perihelia, que se supone igual á la distan-

tancía media de la Tierra al Sol, que siempre sirve de escala para todas las distancias celestes. Fig. 191.

Este cometa cuya distancia perihelía *SP* es igual á la distancia media del Sol á la Tierra, gasta 109 dias en ir desde *P* á *O*, ó desde el perihelio hasta el estremo de la ordenada *SO* perpendicular á *SP* (1223). Le llamaremos, para abreviar, cometa de 109 dias, y manifestaremos como á este se pueden referir todos los demas cometas, solo con mudar los tiempos.

1217 Lo primero que nos toca hacer para calcular el movimiento de los cometas consiste en determinar la velocidad que debe verificarse en las parábolas de diferentes magnitudes; porque un cometa cuya parábola es mayor gasta mas tiempo en andar un ángulo de 90°, qual es el ángulo *PSO*, esto es, en ir desde *P* á *O*, así como Saturno gasta 30 veces mas tiempo para andar un grado de su órbita que no la Tierra en andar un grado de la suya. Las dos proposiciones siguientes son muy fundamentales en esta materia.

1218 *En la parábola el radio vector* SD *es igual á* $\frac{SP}{(\cos \frac{1}{2} PSD)^2}$.

Porque si desde el focus *S* tiramos á la tangente *TD* una perpendicular *SX*, el ángulo *TSD* estará dividido en dos partes iguales, pues el triángulo *TSD* es isósceles (III. 66); y por ser *SX* paralela á *DR*, el ángulo *DRQ* será igual al ángulo *XST*, esto es, á la mitad de *PSD* que es la anomalía verdadera; en el triángulo *RDT*, rec-

Fig. rectángulo en D, sacaremos por razon de la perpendicu-
191. lar DQ esta proporcion, $RQ : RD :: RD : RT$, ó $2PS : RD :: RD : 2SD$, luego $2PS : 2SD :: RQ^2 : RD^2$. Pero $RQ : RD ::$ cos $QRD : 1$; luego $PS : SD ::$ cos $QRD^2 : 1 ::$ cos $\frac{1}{2} PSD^2 : 1$: luego $SD = \frac{SP}{(\cos \frac{1}{2} PSD)^2}$.

1219 *La razon entre las velocidades en la parábola y el círculo es la de $\sqrt{2}$ á 1.*

Supongamos un cometa en P, que trace la parábola PO á la distancia PS del Sol, y la Tierra en T, andando un círculo TLM, cuyo radio FT sea igual á SP. La fuerza central ó la accion del Sol para detener el cometa y la Tierra, cada una en su órbita, es igual, pues es una misma la distancia y el Sol no puede tener mas fuerza en el cometa que en la Tierra á la misma distancia. Supongo un arco pequeño PC de la parábola, y un arco pequeño TL de la órbita de la Tierra, tales que la abscisa PB de la parábola, y la abscisa TI del círculo sean iguales; ó que el desvío de la tangente respecto de la curva sea el mismo en la parábola que en el círculo, estas abscisas ó los desvíos de las tangentes espresan la fuerza central del Sol; porque espresan la cantidad que la accion del Sol desvía de la linea recta al planeta (IV. 268); *son*, pues, iguales en unos mismos tiempos, quando es una misma la fuerza; luego si las abscisas son iguales, los arcos PC y TL son andados en tiempos iguales, y representan las velocidades del cometa y de la Tierra. En virtud de este supuesto de ser iguales las dos inflexiones, buscarémos los arcos mismos.

Los

1220 Los arcos no pueden ser iguales, porque dos arcos iguales tomados en curvas muy diferentes no pueden tener inflexiones iguales, y quando las inflexiones son iguales, los arcos no son iguales; inferiremos de aquí la razon entre los arcos, esta será la de las velocidades, pues el tiempo es uno mismo de cada parte. La propiedad del círculo dá (40) $TI = \frac{IL^2}{2FT^2}$; pero por la propiedad de la parábola (III.45) tenemos $(BC)^2$ igual al producto de PB por el parámetro, que es quadruplo (III. 37) de SP; luego $PB = \frac{BC^2}{4SP} = \frac{BC^2}{4FT}$; pero $PB = TI$ (1219), luego $= \frac{IL^2}{2FT} = \frac{BC^2}{4FT}$, ó $2IL^2 = BC^2$; luego $IL \sqrt{2} = BC$, de donde se saca esta proporcion: $BC : IL :: \sqrt{2} : 1$. Pero IL es igual al arco TL, ó por lo menos no discrepa de él sino un infinitamente pequeño de tercera orden (49); luego IL es la velocidad de la Tierra, y BC es la velocidad del cometa; luego la velocidad del cometa es á la velocidad de la Tierra, á la misma distancia del Sol, como $\sqrt{2}$ es á 1. Fig. 191.

1221 Síguese de aquí que la velocidad del cometa en el punto P de la parábola PO, será los $\frac{7}{5}$ de la velocidad de la Tierra; porque $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ con corta diferencia. Luego la area que anda en un segundo de tiempo el cometa, será $\frac{7}{5}$ de la area que anda la Tierra. Y como las areas son siempre iguales en tiempos iguales (685), á qualquiera distancia que llegue el cometa respecto del Sol en su parábola PO, la area trazada en un segundo de tiempo siempre será $\frac{7}{5}$ de la area que trazare la Tierra, y esta

area

Fig. area será igual á la area del cometa dividida por $\frac{7}{5}$ ó $\sqrt{2}$.

191\. Fundados en esta proposicion vamos á probar que el cometa debe gastar 109 dias para ir desde *P* á *O*, ó en andar 90° de anomalía.

1222 Sea la distancia perihelia *SP* ó *FT* $= 1$; la circunferencia del círculo *TM* ó el número 6,283 (III. 590) $= c$, la area de estos círculos será $\frac{c}{2}$; la area parabólica *PSO*, que es los dos tercios del producto de *SP* por *SO* (III. 570), será $\frac{4}{3}$; esta area del cometa dividida por $\sqrt{2}$, dará $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ para la area que la Tierra anda, en el mismo tiempo que el cometa vá de *P* á *O*. Pero si llamamos *A* la longitud ó la duracion del año, tendremos esta proporcion: la area total $\frac{c}{2}$ de la órbita terrestre es al tiempo *A*, como la area $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ es al tiempo que la corresponde, cuyo tiempo será $\frac{8A}{3c\sqrt{2}}$; este es el valor del tiempo que el cometa gasta en andar el arco parábolico PO, ó los 90° de anomalía verdadera.

1223 La duracion del año sideral es $365^d\ 6^h\ 9'\ 10''$ ú $11''$ (556), esto es $365^d, 256379$, cuyo logaritmo es 2,5625977. Si de este se resta el logaritmo de $\sqrt{2}$, y el logaritmo de tres veces la circunferencia, y se le añade el logaritmo de 8, saldrá el logaritmo de $109^d\ 6154$, ó $109^d\ 14^h\ 46'\ 20''$ para el tiempo que corresponde á *PO*. Su logaritmo es 2,0398716.

No basta determinar el tiempo que gasta en andar estos 90° de anomalía; es indispensable, para calcular el lugar de un cometa en todos tiempos, conocer el número

ro de dias que corresponde á cada porcion de la parábola, Fig.
como *PD*, ó á cada ángulo de anomalía verdadera contado 191.
desde el perihelio, suponiendo siempre las areas proporcionales á los tiempos; este es el asunto de la siguiente

1224 *Cuestion. Conociendo la anomalía verdadera en una parábola, hallar el tiempo corrido desde el perihelio.*

Suponemos dada la parábola *PCOD*, esto es, que conocemos su distancia perihelia *SP*, y el tiempo gastado en andar el arco *PO*; se pide el tiempo que gasta en andar otro arco *PD*, ú otro ángulo *PSD* de anomalía verdadera. Se tirará la linea *DP*, y tomando *ST* y *SR* iguales al radio vector *DS*, se tirarán *DR* y *DT* de las quales la una será (III. 65) la normal y la otra la tangente (III. 37 y 44).

1225 Si tomamos la subnormal *RQ* por unidad, tendremos el parámetro igual á 2 (III. 65), y $PQ = \frac{DQ^2}{2}$. El segmento parabólico *DOPQ* que es los dos tercios del producto de las coordenadas (III. 570) ó $\frac{2}{3} DQ \times PQ$, será $\frac{1}{3} DQ^3$; el triángulo *DPQ* es igual á $\frac{1}{2} DQ \,.\, PQ = \frac{1}{4} DQ^3$, luego si le restamos del segmento *DOPQ*, quedará el segmento $DOPD = \frac{1}{12} DQ^3$; se le añadirá la superficie del triángulo $PDS = \frac{PS \times DQ}{2} = \frac{DQ}{4}$, y saldrá $\frac{1}{12} DQ^3 + \frac{1}{4} DQ$ que será la area *PSDOP*.

1226 Tomando por unidad la linea *RQ*, será *DQ* la tangente del ángulo $DRQ = \frac{1}{2} DST$, esto es, la tangente de la mitad de la anomalía verdadera. Si llamamos esta tangente t, tendremos la area parabólica *PSDOP* igual

Fig. á $\frac{t^3}{12}+\frac{t}{4}$; la area de 90° *PSO* será entonces $=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$
191. $=\frac{1}{3}$. Pero se debe tomar por unidad la area *PSO*, y entonces la area *PSDOP* es $\frac{t^3}{4}+\frac{3t}{4}$, porque $\frac{t^3}{12}+\frac{t}{4}$ es á $\frac{1}{3}$, como $\frac{t^3}{4}+\frac{3t}{4}$ es á 1. Por consiguiente siendo conocida la area de 90°, y siendo t la tangente de una semianomalía verdadera, se multiplicará la area de 90° por $\frac{t^3}{4}+\frac{3t}{4}$, y se sacará la area trazada por el cometa desde su paso por el perihelio. Y como las areas son proporcionales á los tiempos, *sacaremos tambien el tiempo que corresponde á* PD *con multiplicar los 109 dias, ó en general el tiempo de 90° por la quarta parte de* t^3+3t.

1227 Por egemplo, si el cometa que gasta 109 días en andar 90° de anomalía, tuviere 47° de anomalía verdadera ¿quantos dias habran pasado desde el perihelio? La tangente t de 23° $\frac{1}{2}$ es 0,4348124, luego $t^3=$ 0,0829, y la quarta parte de $t^3+3t=$ 0,3467. Luego hemos de multiplicar por 0,3467 los 109 dias, ó el tiempo correspondiente á 90° (1223), sacaremos 38 dias; y por consiguiente el cometa de 109 dias estará á 47° de su perihelio al cabo de 38 dias, conforme se vé en la tabla general de que vamos á hablar.

1228 A este tenor se hallarian para cada grado de anomalía verdadera los dias correspondientes. Por lo comun salen algunas fracciones decimales mas, porque muy pocas veces sale para un grado determinado de anomalía un número completo de dias. Pero con el socorro de las partes proporcionales se hallan facilmente las anomalías verda-

daderas que corresponden á cada dia completo. Por este método se ha calculado la tabla general; señala la anomalía verdadera que corresponde á cada dia de distancia al perihelio para el cometa de 109 dias. Fig. 191.

1229 La espresada tabla se aplica facilmente á todos los cometas. Porque si consideramos diferentes cometas en otras parábolas en un mismo grado de anomalía verdadera, los tiempos corridos desde el paso por el perihelio serán entre sí como los tiempos gastados en ir desde el perihelio hasta 90°. Por egemplo, quando $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t$ fuere igual á $\frac{1}{2}$, el tiempo será la mitad del tiempo correspondiente á 90°, en todas las parábolas posibles. Síguese de aquí que si respecto de un cometa qualquiera conocemos el tiempo de los 90°, sacaremos, por una regla de tres, el tiempo correspondiente á otro ángulo qualquiera de anomalía verdadera acudiendo á la tabla calculada para el cometa de 109 dias. Solo falta, pues, buscar el tiempo de los 90° respecto de parábolas mayores ó menores, ó el número de dias que correspondiere al arco *PO*, quando la distancia perihelia *SP* no fuere ya igual á la distancia media de la Tierra al Sol. Lo egecutaremos despues de sentada la siguiente proporcion.

1230 *Los quadrados de los tiempos que corresponden á una misma anomalía verdadera en diferentes parábolas, son como los cubos de las distancias perihelias.*

Esta ley análoga á la que guarda el movimiento de los planetas (684), es tambien una consecuencia necesaria

Fig. de las fuerzas centrales, conforme se verá en la *Astronomía* Física. Porque hemos probado que sobre el radio de la órbita terrestre andado en 365 dias, teníamos un quarto de parábola de 109 dias; luego el tiempo de la parábola viene á ser $\frac{3}{10}$ del tiempo del círculo. Pero si se consideran diferentes círculos ó diferentes parábolas, á otras distancias del *Sol*, saldrán diferentes revoluciones cuyos quadrados de los tiempos serán como los cubos de las distancias (684 y sig.); luego los tiempos de las parábolas que siempre son sus $\frac{3}{10}$ estarán tambien en la misma proporcion. Luego los tiempos que corresponden á *PO*, son como las raices quadradas de los cubos de las distancias perihelias *SP*.

1231 Servirá, pues, una misma tabla para hallar la anomalía verdadera en todas las parábolas *con tal que* se aumenten *los* tiempos en razon *de la* raiz quadrada del cubo de la distancia perihelia. Con efecto, para un mismo grado de anomalía verdadera, los quadrados de los tiempos de diferentes parábolas deben crecer como los cubos de las distancias perihelias, ó los tiempos como las raices quadradas de los cubos de las distancias perihelias; y así á 90° de anomalía verdadera corresponden 109 dias quando la distancia perihelia es 10 (1223), y 126 quando la distancia perihelia es 11, porque la raiz quadrada del cubo de 11 es mayor en la misma razon. Luego se deben aumentar á proporcion los demas números de dias, quando se buscaren en la tabla general las anomalías para el cometa de 126 dias.

En

En lá tabla que aquí se vé hemos puesto, al lado de cada distancia perihelia, el número por el qual se deben multiplicar los dias de la tabla general, para sacar los dias que en estos cometas corresponden á una misma anomalía. Suponemos la distancia del Sol á la Tierra dividida en diez partes, y se ha calculado el número de dias para el arco *PO* en once parábolas diferentes. Fig.

Dist. perihelia en decimas de la del Sol.	Números por los quales se multiplican los dias de la tabla.	Dias para 90 grados.
1	0, 035	3,5
2	0, 089	9,8
3	0, 164	18,0
4	0, 253	27,7
5	0, 353	38,8
6	0, 465	50,9
7	0, 585	64,2
8	0, 715	78,4
9	0, 854	93,6
10	1, 000	109,6
11	1, 152	126,3

1232 Manifiesta esta tabla que quando lá distanciá perihelia de un cometa, es $\frac{4}{10}$ de la que hay entre la Tierra y el Sol, en lugar de los dias de la tabla general, se deben tomar otros, que no sean mas que 0,25, ó la quarta parte. Esta es la razon porque dicho cometa no gasta mas que 28 dias en andar los 90° de anomalía, y le podemos llamar el cometa de 28 dias, del mismo modo que, para abreviar, hemos llamado cometa de 109 dias, al que gastaría como unos 109 dias para ir desde el perihelio á 90° de anomalía.

Fig. Luego para cada grado de anomalía, al logaritmo de los dias de la tabla se deberá añadir vez y media el logaritmo de la distancia perihelia de un cometa dado, para hallar el número de dias que corresponde á dicho cometa dado, en un mismo grado de anomalía. Al contrario, quando el número de dias corridos desde el perihelio de un cometa qualquiera fuere dado, se deberán restar los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la distancia perihelia, del logaritmo de los dias dados, que corresponden á un cometa determinado, y se sacará el logaritmo de los dias que se deberán buscar en la tabla general.

1233 Por egemplo, consta por observacion que el sonado cometa de 1759, trazaba una parábola cuya distancia perihelia era 0,5849, y que habia pasado por su perihelio el dia 12 de Marzo á $13^h\ 59'\ 24''$ de tiempo medio al meridiano de París. Se pregunta ¿qual era la anomalía verdadera del cometa y su distancia al Sol, el dia 1 de Mayo á $8^h\ 54'\ 40''$, esto es, $49^d\ 18^h\ 55'\ 16''$ despues de su paso por el perihelio? Para mayor facilidad se reducen las horas á decimales de dias, por medio de la tabla siguiente, porque las partes proporcionales son mas faciles de sacar con decimales, y los logaritmos mas faciles de hallar; tendremos, pues, 49^d, 7884. Del logaritmo de este número resto vez y media el de la distancia perihelia, queda la resta 2,0465058, al qual corresponde en las tablas 111^d, 3282. Con este número de dias que corresponde al co-

me-

meta de 109 dias, busco la anomalía en la tabla general, y sale $90° 35' 26''$, esta es la anomalía verdadera que se buscaba para el dia 1 de Mayo. Se dará este cálculo en el tomo decimo.

Tabla para reducir las boras, minutos y segundos á fracciones decimales de dias.

Horas.	Decim. de dia.	Horas.	Decim. de dia.	Minut.	Decim. de dia.	Minut.	Decim. de dia.	Minut.	Decim. de dia.	Minut.	Decim. de dia.	Minut.	Decim. de dia.	Seg.	Decim. de dia.
1	0,04166:	13	0,54166:	1	,000694:	13	,009027:	25	,017361:	37	,025694:	49	,034027:	1	,0000116
2	0,08333:	14	0,58333:	2	,001388:	14	,009722:	26	,018055:	38	,026388:	50	,034722:	2	,0000231
3	0,12500:	15	0,62500:	3	,002083:	15	,010416:	27	,018750:	39	,027083:	51	,035416:	3	,0000347
4	0,16666:	16	0,66666:	4	,002777:	16	,011111:	28	,019444:	40	,027777:	52	,036111:	4	,0000463
5	0,20833:	17	0,70833:	5	,003472:	17	,011805:	29	,020138:	41	,028472:	53	,036805:	5	,0000579
6	0,25000:	18	0,75000:	6	,004166:	18	,012500:	30	,020833:	42	,029166:	54	,037500:	6	,0000694
7	0,29166:	19	0,79166:	7	,004861:	19	,013194:	31	,021527:	43	,029861:	55	,038194:	7	,0000810
8	0,33333:	20	0,83333:	8	,005555:	20	,013888:	32	,022222:	44	,030555:	56	,038888:	10	,0001157
9	0,37500:	21	0,87500:	9	,006250:	21	,014583:	33	,022916:	45	,031250:	57	,039583:	20	,0002315
10	0,41666:	22	0,91666:	10	,006944:	22	,015277:	34	,023611:	46	,031944:	58	,040277:	30	,0003472:
11	0,45833:	23	0,95833:	11	,007638:	23	,015972:	35	,024305:	47	,032638:	59	,040972	40	,0004630
12	0,50000:	24	1,00000:	12	,008333:	24	,016666:	36	,025000:	48	,033333:	60	,041666:	50	,0005787

Los números que llevan alfin dos puntos, se continúan infinitamente repitiendo la última cifra : en los que tienen la coma antes de las decimales ha de haber un cero antes de ella.

1234 El radio vector del cometa ó su distancia al Sol es igual á la distancia perihelia *SP*, dividida por el quadrado del coseno de la mitad de la anomalía verdadera (1218). Era, pues, esta distancia en el caso propuesto $\frac{0,5849}{(\cos \frac{1}{2} \text{anom.})^2}$; tomo, pues, el duplo del logaritmo cos. de $45° 17' 43''$, que es 9,6944705, réstole del logaritmo de la distancia perihelia, resta 0,0726111, logaritmo de 1,18198, esta es la distancia del cometa. El que quisiere escusar las fracciones decimales, y los logaritmos de los quebrados, podrá suponer la distancia del Sol igual,

Fig. no á la unidad, sino á 100000, cómo en nuestras tablas del Sol y de los planetas, con esto no le saldrán en el cálculo sino números ordinarios; la distancia perihelia será 58490, y la distancia hallada 118198 de las mismas partes.

1235 En conociendo dos radios vectores de *una parábola*, y el ángulo que forman, se puede hallar la distancia perihelia, y las dos anomalías que corresponden á los radios vectores. Sean b y c los dos radios vectores de una parábola, de la qual 1 es la distancia perihelia; a, la quarta parte de la suma de las dos anomalías verdaderas; x, la quarta parte de la diferencia de las mismas dos anomalías, tendremos esta proporcion $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} :: \cot a : \tang x$.

Porque el quadrado del coseno de la mitad de una anomalía verdadera es al quadrado del radio, como 1 es al radio vector (1218). Pero la mayor de las dos anomalías es $2a + 2x$, la menor $2a - 2x$; luego $\sqrt{b} : \sqrt{c} :: \cos(a - x) : \cos(a + x)$. Y como $\cos(a - x) = \cos a . \cos x + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} x$, y $\cos(a+x) = \cos a . \cos x - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} x$ (I. 655), síguese que $\sqrt{b} . \cos a . \cos x - \sqrt{c} . \cos a . \cos x = \sqrt{b} . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} x + \sqrt{c} . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} x$; luego $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} :: \cos a . \cos x : \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} x :: \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} : \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} :: \cot a : \tang x$. Esto quiere decir que la suma de las raices de los radios vectores es á su diferencia, como la cotangente de la semisuma de las semianomalías verdaderas es á la tangente de su semidiferencia.

Quan-

Quando con dos cantidades desiguales se hace esta proporcion: la mayor es á la menor como el radio es á la tangente de un ángulo; si se restan 45° del ángulo hallado, siempre se puede decir, el radio es á la tangente de la resta, como la suma de las dos cantidades dadas es á su diferencia (33). Luego en el caso de que vamos hablando tambien se dirá 1.° la raiz del menor de los dos radios vectores es á la raiz del mayor, como el radio es á la tangente de un ángulo, del qual se restarán 45°. 2.° el radio es á la tangente de la resta, como la cotangente de la quarta parte de la suma de las dos anomalías es á la tangente de la quarta parte de la diferencia; ó como la cotangente de la quarta parte de la diferencia es á la tangente de la quarta parte de la suma. Una cosa tiene muy acomodada esta operacion, y es que sirve para hallar la suma igualmente que para hallar la diferencia de las anomalías, por manera que no se necesita saber si los dos radios vectores están del mismo lado del perihelio. Fig.

Cálculo de la órbita de un cometa por tres observaciones.

1236 Hasta aquí hemos declarado como se distribuye el movimiento de un cometa conocido entre los diferentes puntos de la parábola que traza, porque era con efecto preciso saber las leyes de este movimiento, antes de examinar si estas leyes se observan en el cielo. Ahora tenemos todo lo necesario para averiguar qué parábola traza un cometa al rededor del Sol, con tal que tengamos tres ob-

Fig. observaciones de su lugar aparente en el *cielo*; porque una parábola cuyo focus es dado, se puede determinar por tres puntos, del mismo modo que una elipse, pero es mayor dificultad respecto de un cometa, porque las tres longitudes dadas no son longitudes *vistas desde* el Sol. Esta cuestion sería sumamente dificultosa si no acudiéramos á una operacion gráfica, ó á aproximaciones ó métodos indirectos.

192. 1237 Suponemos, pues, para guiarnos en el cálculo, que se hayan trazado en un carton 10 parábolas, sobre las distancias perihelias 1, 2, 3, &c. y que estén divididas en dias. El círculo *ABC* representa la órbita de la Tierra, estando el Sol en *S*; la parábola *ACD* es la del cometa de 109 dias, cuya distancia perihelia *SC* es igual á la de la Tierra al Sol. Esta parábola está dividida en dias, para que sirva de egemplo á los que quisieren valerse de este método, y la division llega á una distancia 5 veces y media mayor que la del Sol á la Tierra; esta distancia es mucho mayor que la distancia á que suelen desaparecer los cometas de nuestra vista. Se echa de ver que en el punto *D* el cometa se hallaría á 440 dias de distancia de su perihelio, la abscisa *SE* medida sobre el ege de la parábola sería entonces 3 veces y media la distancia del Sol á la Tierra, y la ordenada $ED = 4\frac{1}{4}$. Supongo que se hayan calculado igualmente las ordenadas, las distancias al Sol, las anomalías y los dias correspondientes para diferentes abscisas, como *SE*, ó en diferentes dias, en once parábolas (1231).

Se

Se podran trazar facilmente parábolas de carton por una escala tripla de la de la figura; se dividirán en dias; despues de recortadas estas curvas, servirán conforme vamos á declarar para hallar la que corresponde á tres observaciones de un cometa desconocido. Pero los que tuvieren práctica del cálculo, se pasarán sin estos preliminares, y empezarán por el cálculo de una hypótesi, conforme declararemos mas adelante. Fig.

1238 Nos servirá de egemplo el cometa que Mr. de la Lande observó en el mes de Mayo de 1763. Sea *S* el 193.
Sol; *ABC*, la órbita de la Tierra que estaba en *A* el dia 17 de Mayo de 1763, en *B* el dia 30 de Mayo, y en *C* el dia 24 de Junio. La diferencia entre la longitud del cometa observada, y la longitud del Sol calculada por las tablas, esto es, el ángulo de elongacion del cometa reducido al plano de la eclíptica el dia 17 de Mayo se observó de $11^\circ \frac{1}{3}$, cuya cantidad de grados el cometa estaba al oriente en la primera observacion. Haremos, pues, el ángulo *SAD* de $11^\circ \frac{1}{3}$; haremos tambien los ángulos *SBE* de $25^\circ\ 50'$, y *SCF* de $35^\circ\ 20'$; estas son las elongaciones observadas en 30 de Mayo, y 24 de Junio; por este medio tendremos las tres lineas *AD*, *BE*, *CF* encima de las quales correspondia perpendicularmente el cometa en las tres observaciones. Encima de estas tres lineas se pondrán despues tirantes tres hilos que formen con ellas en los puntos *A*, *B*, *C* ángulos de $44^\circ\ 10'$, $38^\circ\ 15'$, y $18^\circ\ 56'$; estas serán las latitudes del cometa vistas desde la Tierra en las

tres

Fig. 193. tres observaciones; dichos hilos representarán los rayos visuales dirigidos desde la Tierra al cometa en las tres observaciones. Supongo que el semicírculo *ABCL* esté recortado por un lado, á fin de que el centro *S* esté libre, y se le puedan presentar las parábolas de la *fig. 192*.

1239 Se tomará la parábola de 18 dias, *esto es*, aquella cuya distancia perihelia es $\frac{1}{10}$ de la del Sol (1231), y colocando el focus de esta parábola en *S*, se presentará su circunferencia junto á los hilos tendidos desde los puntos *A*, *B*, *C* sobre las líneas *AD*, *BE*, *CF*; entonces se echará de ver que esta parábola es muy pequeña para que se ajuste con los hilos en su parte inferior cerca de los puntos *A*, *B*, *C*, y que es muy oblicua, quiero decir, muy larga y muy angosta para ajustarse con ellos en *partes mas distantes*, del lado de los puntos *D*, *E*, *F*.

Se tomarán, pues, parábolas mas anchas; muy presto se hallará que la de 109 dias es la mas á propósito, la que mas se ajusta á los hilos; se colocará esta parábola en diferentes direcciones, para procurar qne los números de dias que fueren interceptados entre los hilos sean iguales á los intervalos de las observaciones, que en el egemplo propuesto son de 13 y 25 dias. Se echará de ver que con plantar el perihelio ó el vértice de esta parábola sobre el hilo del medio que corresponde encima de *BE*, el hilo de la derecha toca la parábola en *G*, 13 dias antes del perihelio, y el hilo de la izquierda la toca en *K*, 25 dias mas lejos que el perihelio. Esto manifiesta que el cometa pa-

pasaba por el perihelio quando pasó por *H*, en las inmediaciones del dia 30 de Mayo, y que su distancia al Sol era 10, esto es, igual á la del Sol. Se verán tambien con corta diferencia las distancias reducidas á la eclíptica en las tres observaciones, esto es, las lineas *SG*, *SH*, *SK*, y se podrá formar una hypótesi muy aproximada á las observaciones, por medio de la qual se empezarán los cálculos. Fig. 192.

1240 Entre todas estas parábolas que supongo divididas en dias, y que se coloquen succesivamente debajo de los hilos, no hay mas que una que pueda cumplir con estas tres condiciones, de que esté su focus en el centro del Sol, toque las tres lineas tiradas desde la Tierra al cometa en las tres observaciones, y haya entre los tres puntos de contacto intervalos de tiempo iguales á los que se hubieren observado.

1241 Es, pues, seguro que por medio de la operacion práctica que acabamos de proponer, se puede hallar la parábola única, que cumpla con las tres longitudes y las tres latitudes vistas desde la Tierra. No solo se halla la magnitud de esta parábola, esto es, su distancia perihelia, sino que se halla tambien su situacion, es á saber, el lugar de su perihelio y el de su nudo; porque se puede ver á qué punto del círculo *ABCL* corresponde la seccion de los dos planos, ó el diámetro que forma la linea comun al círculo y á la parábola, y este será el lugar del nudo.

1242 La situacion de la órbita quedará tanto mejor determinada quantos mas largos fueren los intervalos de tiem-

Fig. tiempo, las longitudes y latitudes observadas mas *distantes*
192. unas de otras, el movimiento mas desigual y las anoma*lías* del cometa mas diferentes. Pero el método que declararemos dentro de poco es general, y no supone ninguna condicion en las observaciones de que *se vale* el *calculador*.

1243 En conociendo al poco mas ó menos por *una* operacion gráfica los elementos de un cometa, se debe acudir al cálculo para determinarlos con exactitud. Para esto no hay camino ni mas acomodado ni mas seguro que el de los métodos indirectos, del mismo modo que *lo* practican algunos para determinar con tres observaciones las órbitas de los planetas. Supondremos, pues, conocido lo que se busca, y con algunas reglas de falsa posicion, conseguiremos muy presto lo que buscamos.

Primero se escogen dos longitudes y latitudes observadas; se buscan las parábolas que cumplan con estas dos observaciones corregidas; en teniendo dos ó tres parábolas, esto es, dos ó tres hypótesis que concuerden igualmente bien con las dos observaciones, en cada una de estas hypótesis se calcula el lugar del cometa al tiempo de la tercera observacion; la hypótesi que mejor concuerda con esta tercera observacion es la mejor, y basta *algunas* veces una regla de tres para hallar otra *hypótesi* que cumpla exactamente con todas tres.

1244 La primera parte de la cuestion de los cometas consiste en hallar muchas parábolas que cumplan con dos observaciones (1243), esto es, con las quales se sa-

saquen las mismas longitudes y latitudes que dá la observacion, y el intervalo de tiempo observado entre dichas posiciones del cometa. Pero por ser indeterminada esta cuestion, se suponen las distancias del cometa al Sol, como *SG* y *SH*, dadas para el tiempo de las dos observaciones, y con estas distancias se hallan las dimensiones de una parábola que cumple con las dos observaciones hechas quando la Tierra estaba en *A* y *B*. Fig. 193. 194.

1245 Quando se les dán otros valores á las distancias *SG* y *SH* del cometa al Sol, se hallan las dimensiones de otra parábola que tambien cumple con las dos primeras observaciones; y entre muchas de estas parábolas se escoge la que debe cumplir con la tercera observacion hecha al tiempo que la Tierra estaba en *C*; con esto hay seguridad de que se ha hallado la parábola que cumple con las tres observaciones, y representa el curso del cometa, ó se le acerca mucho por lo menos. Se hallan con frecuencia 2 ó 3′ de equivocacion en el cálculo de las demás observaciones que se comparan con una parábola determinada por este método, sea porque el camino verdadero de un cometa no es una parábola perfecta (1215), sea porque las observaciones de los cometas no son exactas las mas veces sino con diferencia de 2′.

1246 Pondremos aquí todas las reglas que se han de practicar, y todas las analogías que se deben hacer para calcular una órbita, despues daremos separadamente un egemplo.

Pri-

Fig. 193. 194. *Primera Hypótesi.* Supongo una cantidad qualquiera (1239) para la distancia *GS* del cometa al Sol reducida á la eclíptica, de modo que el punto *G* sea la proyeccion del cometa sobre la eclíptica al tiempo de la primera observacion. Se conoce por observacion el ángulo de elongacion *SAG* (1238), y por las tablas la distancia *AS* del Sol á la Tierra, se buscará el ángulo en el cometa ó el ángulo *G* de la paralaxe anua, por la analogía siguiente.

La distancia supuesta GS *del cometa al Sol en la primera observacion,*
Es al seno de la elongacion observada GAS,
Como la distancia AS *del Sol á la Tierra,*
Es al seno del ángulo AGS *en el centro del cometa.*

Este ángulo se puede tomar qual se hallase en las tablas de los senos, ó si no se hará uso del suplemento de la cantidad hallada, si se quisiere suponer obtuso el ángulo *SgA.* Se sumará el ángulo *AGS* con el ángulo de elongacion *GAS*, y el suplemento de la suma será el ángulo de comutacion *GSA*, el qual restado del lugar de la Tierra *A* (que siempre es seis signos mayor que el del Sol), ó añadido si la linea *GS* fuese mas oriental que la linea *SA*, dará la longitud heliocéntrica del cometa, sobre la linea SG.

1247 Despues se hallará la latitud heliocéntrica (631).

El seno del ángulo de elongacion observado GAS
Es al seno del ángulo de comutacion GSA,

Co-

Como la tangente de la latitud geocéntrica del cometa, observada Fig.

Es á la tangente de la latitud heliocéntrica del cometa.

1248 Despues de hechas las mismas operaciones para la segunda observacion, con *SH* supüesta á arbitrio de una cantidad determinada, y el ángulo *SBH*, que es la segunda elongacion observada; quedará determinada la longitud y latitud heliocéntrica del punto *H*, ó del cometa en la segunda observacion. Conociendo por este medio dos longitudes del cometa, vistas desde el Sol, se sabrá su diferencia que es el movimiento heliocéntrico reducido á la eclíptica en el intervalo de las dos observaciones; de ellas se deberá inferir el movimiento en la órbita.

Sea *MNO* la eclíptica; *NQR*, la órbita; *P*, el polo de la eclíptica; *Q* y *R*, las dos posiciones del cometa vistas desde el Sol; *OQ* y *MR*, las dos latitudes determinadas por los cálculos antecedentes; *OM*, el movimiento del cometa en la eclíptica visto desde el Sol, ó la diferencia de las longitudes heliocéntricas halladas; hemos de averiguar el movimiento *RQ* en la órbita del cometa. Se harán con esta mira las dos analogías siguientes (III. 724 *C*), y será preciso hacer el cálculo con mucha proligidad, si los ángulos fueren muy pequeños. 195.

El seno total

Es al coseno del ángulo P, *movimiento en la eclíptica,*

Como la cotangente de la latitud mayor OQ

Es á la tangente del primer segmento PX.

Fig. 195. Se restará este segmento del complemento *PR* de la latitud heliocéntrica menor calculada, y saldrá el otro segmento *RX*. Si el ángulo *P* fuese obtuso, se debería añadir PX á *PR* para sacar *RX*.

El coseno del primer segmento PX
Es al coseno del segundo segmento RX,
Como el seno de la mayor de las dos latitudes QO
Es al coseno del movimiento QR *del cometa en su órbita.*

Se tomará la quarta parte de este movimiento. Si la una de las dos latitudes fuese boreal y la otra austral, se pondría el punto *R* debajo de *M*, el nudo *N* estaría entre uno y otro, *PR* sería la suma de 90° y de la latitud austral.

Se reparará si la longitud heliocéntrica en la segunda observacion es mayor que en la primera; porque entonces el cometa es *directo*; si la segunda fuere menor, el cometa será retrogrado.

193. 194. 1249 Dividiendo cada una de las distancias *SG*, *SH* del cometa al Sol que están en el plano de la eclíptica, por el coseno de la latitud heliocéntrica correspondiente (1247), se sacan los radios vectores ó las distancias del cometa al Sol en linea recta en el plano de *su órbita* (632); se conocen, pues, dos radios vectores de la parábola, y el ángulo que forman, y se halla el lugar del perihelio por la regla siguiente (1235). Se resta el logaritmo del radio vector menor del logaritmo del mayor; se toma la mitad de la resta, y será el logaritmo de la tangente de un ángulo, del

del qual se han de restar 45°; el logaritmo de la tangente Fig.
de la resta, menos el logaritmo de la tangente de la quarta parte del movimiento (1248), dará el logaritmo de la tangente de un ángulo, al qual se añade la quarta parte del movimiento para sacar la mitad de la mayor anomalía verdadera (1235). Tambien se toma su diferencia, y sale la menor de las dos anomalías verdaderas; y con duplicar estas cantidades, se sacan las dos anomalías verdaderas.

1250 Añadiendo dos veces el logaritmo del coseno de la mayor de las dos mitades de anomalía verdadera al logaritmo del mayor de los dos radios vectores, saldrá el logaritmo de la distancia perihelia (1234); al qual se añadirá su mitad, para sacar los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la distancia perihelia.

Las dos anomalías verdaderas que hallamos antes, están del mismo lado del perihelio, quando su diferencia es igual al movimiento heliocéntrico total del cometa en su órbita (1248; estan la una antes y la otra despues del perihelio, quando su suma compone el movimiento total del cometa. En el primer caso, si el cometa fuese directo, y fuere la segunda anomalía menor que la primera, será prueba de que el cometa no habrá llegado todavía á su perihelio; pero si la anomalía que corresponde á la primera observacion fuese la menor de las dos, sería señal de que el perihelio fue antes de las dos observaciones. La misma regla rige quando el cometa es retrogrado. En el segundo caso, esto es, quando ha sido menester añadir las

Fig. 193. 194. dos anomalías para componer el valor del movimiento total *QR* del cometa en su órbita, es prueba de que el perihelio sucedió en el intervalo que hay entre las dos observaciones. Si el cometa fuese directo, será señal de que el perihelio está mas adelantado que la primera de las dos longitudes heliocéntricas halladas, y de que no habia pasado todavía por su perihelio al tiempo de la primera observacion.

1251 Con las dos anomalías verdaderas halladas, se buscarán los dias y milésimas de dias correspondientes en la tabla general; se tomará su diferencia ó su suma, conforme las dos anomalías estuvieren de un mismo lado ó en lados opuestos respecto del perihelio. Para determinar el verdadero intervalo de tiempo que corresponde á la órbita hallada, al logaritmo del intervalo que la tabla dá se deben añadir los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la distancia perihelia (1232), y sale el logaritmo del tiempo que dá la parábola hallada, para el intervalo entre las dos observaciones. Si este intervalo de tiempo fuere el que se hubiese observado, será prueba de que las dos distancias *SG* y *SH* que se supusieron en el cálculo dan una parábola que cumple con dichas dos observaciones, y está acabada la primera hypótesi.

1252 Pero sucede casi siempre que dicho número de dias no concuerda con el que se observó; entonces se supone otra distancia *SH* en la segunda observacion; se guarda la primera distancia *SG* con la longitud y la latitud que de ella

se

se han inferido (1246 y 1247), y volviendo á hacer todos los cálculos especificados (1248 .. 1251), se saca otro valor para el intervalo de tiempo entre las dos observaciones. Si este intervalo se acerca mas al que se observó, es señal de deberse preferir el segundo supuesto, y se hace, si fuere menester, mudando algo mas la segunda distancia, un tercer supuesto, del qual se indaga el error. Así, por medio del progreso de los errores ó de su diminucion, se echará de ver muy presto qué distancia *SH* se deberá preferir en la segunda observacion para hallar una parábola que cumpla con los dos supuestos. A esta primera parábola que cumple con las dos observaciones, la llamaremos *Primera hypótesi*. Fig. 194.

Para formar esta hypótesi, he supuesto conocidas las distancias acortadas del planeta al Sol, y he hecho variar una hasta que hayan formado una parábola conforme con las dos observaciones. Pero quando uno de los ángulos en el cometa se acerca mucho á un ángulo recto, la distancia acortada de la Tierra al Sol que es opuesta á este ángulo, no puede servir para calcularle con precision, porque ácia los 90° los senos varían muy poco; tampoco se sabe si se debe suponer el ángulo agudo ú obtuso (1262). Para remediar este inconveniente, se podría suponer conocido el lugar heliocéntrico del cometa, en vez de calcularle por la distancia (1246).

Quando el movimiento heliocéntrico hallado (1248) dá un intervalo de dias muy grande, se puede tambien for-

Fig. formar juicio que se debe disminuir este movimiento he-
193. liocéntrico, y por consiguiente la segunda longitud (*si el*
194. cometa fuere directo) para acercarse mas al intervalo dado, y formar el segundo supuesto.

Finalmente, podrá suceder alguna vez que yá se aumente, yá se disminuya la segunda distancia *SH*, *no sé* podrá hallar un intervalo de tiempo que se arrime á la observacion, esto será señal de ser mayor ó menor de lo que corresponde la primera distancia *SG*, ó que hay alguna contradiccion en los supuestos.

1253 En teniendo completa una primera *hypótesi*, ó una parábola que cumpla con dos observaciones, tendríamos determinada la verdadera órbita que se busca, si cumpliera igualmente con la tercera observacion; pero *jamás* se halla tanta conformidad en *una primera hypótesi*, y es preciso hacer otras muchas (1260). Sin embargo se indaga primero si la primera hypótesi quadra con la tercera observacion, conforme vamos á proponer, antes de apelar á una segunda hypótesi; porque la direccion en que está el error le dá á conocer á un astrónomo egercitado si debe aumentar ó disminuir la distancia *SG* para formar la segunda hypótesi.

1254 Calculando la tercera observacion en *esta hypótesi* ó en la parábola hallada, averiguaremos *si* se acerca á la verdad. Para calcular esta tercera observacion, es preciso determinar primero el paso por el perihelio, la inclinacion respecto de la eclíptica, el lugar del nudo, y el del perihelio en la órbita.

Por

Por medio del uno de los dos números de dias hallados por las dos anomalías verdaderas (1251), pongo por caso, el que conviene á la primera observacion, se buscará en la tabla general el número de los dias correspondientes; el logarítmo de este número de dias añadido á los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la distancia perihelia dará el logaritmo del verdadero intervalo de tiempo (1232) corrido entre la primera observacion y el paso por el perihelio; se añadirá este número de dias al tiempo de la observacion, si se hubiese hecho antes del perihelio (1250), y se sacará el tiempo del paso por el perihelio en cada parábola. Bueno será hacer el cálculo con los dos números de dias, para ver si con cada uno se halla la misma hora y minuto para el paso por el perihelio. Fig.

1255 El lugar del nudo *N*, y el ángulo de inclinacion *RNM* se determinarán por medio del triángulo *PQR*, que yá nos sirvió (1248), y del triángulo *RMN*, haciendo las siguientes analogías: 195.

I. *El seno del segmento* RX
Es al seno del segmento PX,
Como la tang. del áng. P, *ó del movimiento en la eclíptica*
Es á la tangente del ángulo R (III.714 3.°).

II. *El radio*
Es al seno de la menor latitud RM,
Como la tang. del ángulo R
Es á la tang. de la distancia al nudo, NM *en la eclíptica* (III.702).

Fig. III. *El radio*
195. *Es al seno del ángulo* R,
Como el coseno de la menor latitud RM
Es al cos de la inclinacion, ó del ángulo N (III.701).
IV. *El seno de la inclinacion* N
Es al seno de la menor latitud RM,
Como el radio
Es al seno de la distancia al nudo NR *en la órbita* (III.698).

1256 La distancia al nudo contada en la eclíptica, ó el arco *MN* se añade á la longitud heliocéntrica del punto *M* en la eclíptica, quando el cometa es directo, y menguante su latitud heliocéntrica; y se resta, quando es retrogrado y creciente su latitud, y sale la longitud del nudo *N*. Será el nudo ascendiente si *RM* fuere una latitud boreal creciente, ó austral decreciente; será el nudo descendiente, si la latitud fuere boreal decreciente, ó austral creciente.

Si el movimiento del cometa pasare de seis signos ó 180°, conforme ha sucedido varias veces, y particularmente en 1769, se tomaría por el ángulo *P* lo que faltase para 12 signos, y para hacer la figura de modo que no se padeciese equivocacion en el cálculo, en vez de suponer que el cometa ha ido desde *Q* á *R* por el orden de los signos, estando siempre el occidente á la derecha, se supondrá que el cometa estuvo primero en *R*, y que dando despues la vuelta por debajo de la figura, volvió á *Q* para la se-

segunda observacion. Lo contrario se practicaría si fuese retrogrado. Fig. 195.

Tambien será del caso buscar el lugar del nudo *N* por medio de la longitud del punto *O*, á fin de ver si saldrá la misma longitud del nudo. Para este fin se añadirá *MO* á *MN* (á no ser que el punto *N* esté en medio) para sacar *ON*, cuya cantidad se juntará con la longitud heliocéntrica del punto *O*, ó se restará segun los casos que hemos especificado.

1257 Para determinar la longitud del perihelio, se añadirá la longitud del nudo *N* á *NR*, si el nudo estuviere menos adelantado que la longitud heliocéntrica del punto *M*, y quedará averiguada la longitud del punto *R* en la órbita del cometa. Se la añadirá la anomalía del cometa para la observacion *R*, si siendo directo el cometa no hubiese pasado todavía su perihelio quando estaba en *R*, ó si siendo retrogrado yá le hubiere pasado (1250); en los demás casos se rebajará la anomalía de la longitud del punto *R*, y se sacará el lugar del perihelio, que siempre se cuenta en la órbita del cometa, del mismo modo que la longitud de los demás planetas (622) se cuenta en su órbita.

Tambien conducirá buscar igualmente el lugar del perihelio por la observacion hecha en *Q*; si con las dos observaciones se saca cabalmente un mismo resultado, será señal cierta de que no se habrá padecido equivocacion ninguna en los signos de todas las operaciones antecedentes.

Fig. tes. Se juntará, pues, la longitud del nudo *N* con *NQ* para
195. sacar la longitud del punto *Q*, y se la añadirá la *anomalía* del cometa al tiempo de la observacion hecha en *Q*, ó se restará segun fueren los casos, y quedará averiguado el lugar del perihelio.

1258 Conocemos, pues, todos los elementos *de la* parábola que cumple con dos observaciones, y podemos calcular en la misma hypótesi el lugar del cometa visto desde la Tierra para el tiempo de la tercera observacion, quando la Tierra estaba en *C*, y el cometa en *K*; esto se consigue por las reglas siguientes.

El logaritmo de la diferencia entre el *tiempo* de la tercera observacion y el tiempo del paso por el perihelio (1254), menos los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la *distancia* perihelia dará el logaritmo de *los dias de la tabla* general, enfrente de los quales se hallará la anomalía verdadera del cometa al tiempo de la tercera observacion; la suma ó la diferencia entre el lugar del perihelio y la anomalía verdadera del cometa, dará la longitud verdadera del cometa en la tercera observacion contándola en su órbita; se tomará la suma, si siendo directo el cometa hubiere pasado el perihelio al tiempo de la tercera observacion; los demás casos son fáciles de resolver. La *diferencia* entre esta longitud y la del nudo (1256) dará el argumento de latitud. Dado el argumento de latitud, y la inclinacion de la órbita (1255), se sacará la longitud heliocéntrica reducida á la eclíptica (620), cuya espre-

sion

sion será la linea *SK*, y la latitud heliocéntrica (619). Fig.
Será boreal si fuere directo el cometa, y tuviere una longitud mayor que la de su nudo ascendiente, ó menor que la de su nudo descendiente.

1259 Se añadirá el log. cos. de la latitud heliocéntrica al log. de la distancia perihelia (1250), y se restará el duplo del coseno de la mitad de la anomalía verdadera (1234), y el resultado será el log. de la distancia acortada *SK*, al tiempo de la tercera observacion. Si esta distancia fuere menor que la del Sol aquel mismo dia, se considerará el cometa como un planeta inferior, y se practicarán las mismas reglas que especificamos (630). Por medio de la longitud heliocéntrica y de la distancia al Sol, se determinarán la longitud y latitud vistas desde la Tierra (630); habrán de concordar con las que se hubieren observado, si fuere exacta la hypótesi, y fuere la parábola hallada la que traza realmente el cometa.

1260 Nunca sucede que la tercera observacion concuerde bastante con el cálculo de la primera hypótesi; es pues, preciso acudir á otra. Se supone en lugar de la distancia *SG*, en la primera observacion otra cantidad mayor ó menor que la que se supuso en la primera hypótesi (1246), y con hacer respecto de la distancia *SH* varios supuestos, se encuentra con el que es menester para determinar otra parábola que represente tambien las dos observaciones, y esta es la *segunda hypótesi*. Se calculan todos los elementos del cometa en esta segunda parábola (1254); tambien

Fig. bien se determina el lugar del cometa visto desde *la* Tierra para el tiempo de la tercera observacion en la segunda *hy*pótesi, ó en la segunda parábola hallada, y se sabe qual es el error de esta segunda hypótesi, ó quanto se aparta de la tercera observacion. Si el error de las dos hypótesis no fuere mas que de algunos minutos, se podrá hallar *practi*cando una regla de tres quales eran las distancias reducidas *SG* y *SH* que se debian suponer; se formará *una tercera hypótesi*, en la qual se calcularán todos los elementos del cometa (1254 y sig.), y cumplirá igualmente con la tercera observacion.

Si fueren muchas las observaciones, tambien se podrán calcular con estos mismos elementos; es indispensable verificar, como hemos dicho, una parábola despues de calculada, por recelo de que en alguna de las tres observaciones que han servido, se haya cometido algun error, que ocasionaría una diferencia muy grande en los elementos hallados. Fuera de esto, se consigue á veces representar un mes entero de observaciones con diferencia de uno ó dos minutos; y una observacion mas distante discrepará diez ó doce minutos del cálculo; es, pues, preciso calcular mayor número de observaciones para comprobar la teórica que se hubiere hallado.

1261 El que se empeña en calcular el regreso de un cometa, ó en averiguar sus elementos con mucha precision, debe tener presentes dos consideraciones en la reduccion de las observaciones, es á saber, la paralaxe y la aberracion.

Pa-

Para averiguar la paralaxe de un cometa, es menester conocer su distancia á la Tierra (632), y dividiendo 9″ por la distancia del cometa (tomando por unidad la del Sol), se saca la paralaxe orizontal, y por consiguiente la paralaxe en longitud y latitud para la hora de la observacion (862 y 863). Se tomará el nonagésimo en una tabla, y bastará tomar el primer término (864) para la paralaxe de latitud, con tal que no sea muy grande. Fig. 195.

Se aplicarán estas paralaxes á la longitud observada, en una direccion contraria á la que dejamos indicada (874) quando buscábamos la longitud aparente, porque aquí queremos valernos de la longitud verdadera. Los cometas que se acercan mucho á la Tierra, tienen una paralaxe muy grande, en tal estremo que en algunos casos podría servir para determinar con puntualidad la del Sol; el cometa de 1770 pasó 50 veces mas cerca de nosotros que el Sol.

Por lo que toca á la aberracion de los cometas, hemos dicho tiempos ha (772) lo que es menester, pero pide que conozcamos la distancia y el movimiento diurno geocéntrico por medio de dos longitudes observadas ó calculadas. Así, todas las observaciones que han de servir para calcular rigurosamente una órbita, se han de desembarazar de los efectos que no penden únicamente de la órbita parabólica ó elíptica cuyo cálculo se intenta, y varían en el discurso de una sola aparicion.

1262 Con la mira de hacer mas perceptible toda esta doctrina la aplicaremos al cometa de 1757. Vamos

á

Fig. á especificar las tres observaciones de que hizo uso Mr. de la Lande para determinar su órbita; bien que no llevó, ni tampoco llevaremos en cuenta la aberracion y la paralaxe (1261), por ser de muy poco momento en este caso, particularmente para el primer bosquejo de una órbita incógnita.

Escogió el citado Astrónomo una observacion hecha en las inmediaciones del nudo, y redujo la longitud al tiempo que hubiera sido nula la latitud; esto simplifica los cálculos, y tiene cuenta practicarlo siempre que se puede.

Tiempo medio en Paris.			Long. observada del cometa.			Latitud observada.		Lugar del Sol calculado.			Distancia del Sol á la Tierra.
Septiemb. 15	15^h	$47'$	3^s	10°	$22'$	10°	$20'$ Bor.	5^s	23°	$23'$	1,0042
Septiemb. 30	6	8	5	1	42	0	0	6	7	42	1,0000
Octub. 12	16	42	5	26	19	3	$3\frac{1}{2}$ Aus.	6	20	1	0,9965

El intervalo entre las dos primeras observaciones es de $14^d\ 14^h\ 21'$; despues de convertir las $14^h\ 21'$ en decimales por la tabla (1233) vamos á buscar una parábola que cumpla con las dos primeras longitudes observadas, y con el intervalo de tiempo de $14^d\ 60$.

194. Despues de colocado el Sol en *S*, la Tierra en *A*, y formado el ángulo *SAD* igual con la elongacion observada del cometa, se trata de determinar en qué punto G de esta linea ha de estar el lugar del cometa reducido al plano de la eclíptica. Pero no conocemos, ni aun al poco mas ó menos, las dimensiones de la órbita que buscamos; supongamos, pues, que el dia 15 de Septiembre el come-

ta

ta estuviese tan distante del Sol como la Tierra en sus distancias medias, ó que la distancia acortada *SG* del cometa al Sol fuese 1,0000; en virtud de este supuesto vamos á determinar todo lo demás, é indagar primero con diferentes pruebas qual debe ser la distancia *SH* en la segunda observacion para que el intervalo de 14^{d} 60 se pueda verificar. Supongamos, por egemplo, *SH* = 0,6000 ó seis décimas de la distancia media del Sol. En el triángulo *ASG* conocemos *AS* distancia de la Tierra al Sol = 1,0042; *SG* distancia reducida del cometa al Sol, *SAG* que es la elongacion observada = $2^{s}\ 13^{\circ}\ 1'$, ó la diferencia entre el lugar del Sol y el lugar del cometa; diremos, pues (1246), 1,0000 : sen $73^{\circ}\ 1'$ :: 1,0042 : sen $73^{\circ}\ 49'\ 23''$, este es el ángulo *G*, el ángulo en el cometa, ó la paralaxe anua; con añadirla al ángulo en la Tierra $73^{\circ}\ 1'$, y tomar el suplemento de lo demás, se saca el ángulo en el Sol ó el ángulo de comutacion *ASG* de $33^{\circ}\ 9'\ 37''$; cuyo ángulo añadido á la longitud de la Tierra $11^{s}\ 23^{\circ}\ 23'$ siempre opuesta á la del Sol, dá la longitud heliocéntrica del cometa $0^{s}\ 26^{\circ}\ 32'\ 37''$. Si el cometa fuera mas occidental ó su longitud menor que la de la Tierra *A*, se debería restar la comutacion de la longitud de la Tierra para sacar la del cometa. Fig. 194.

El ángulo *G* ó el ángulo en el cometa puede ser agudo ú obtuso; porque en lugar del punto *G* se podría tomar el punto *g* tal que *Sg* fuese igual con *SG*: acerca de esto nada determinan las dos condiciones de la distancia al Sol, y de

Fig. de la elongacion observada ó del angulo A, y siempre que
1194. en un triángulo rectilineo ASG, se conocen dos lados desiguales, y el ángulo opuesto al uno de ellos, el lado opuesto á este ángulo siempre puede tener dos valores iguales, SG, Sg, que darán para el tercer ángulo S valores tanto mas diferentes quanto mas agudo fuere el ángulo dado. *De aquí* no resultará incertidumbre alguna en los cálculos, con tal que siempre se tome el ángulo G de una misma especie en los diferentes supuestos de una misma hypótesi; pero la eleccion que se hace de uno antes que de otro influye mucho en el resultado; y por no apartarse demasiado de las observaciones, siempre tiene cuenta hacer figuras exactas, que guien al calculador, y enseñen al poco mas ó menos como se han de elegir las hypótesis por no caminar tanto á tientas. En muchas ocasiones es preciso hacer *obtuso este ángulo* para sacar un movimiento bastante grande y que pueda cumplir con el intervalo de los dias dados.

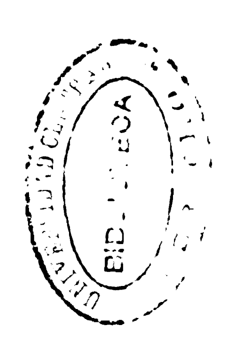
1263 En la segunda observacion hecha en H, se dirá 0,6000 : sen $36^\circ\ 0'$ :: 1,0000 : sen $78^\circ\ 25'\ 9''$ (1246), este es el ángulo en el cometa, en la segunda observacion, esto es, BHS; pero supondremos obtuso este ángulo por no sacar un movimiento sobrado grande; donde no, el punto b en el qual $Sb = SH$, supondria el cometa demasiado lejos. Añadiendo, pues, $101^\circ\ 34'\ 51''$ á la elongacion observada $36^\circ\ 0'\ 0''$, el suplemento de la resta, ó $42^\circ\ 25'\ 9''$, es el ángulo de conmutacion, el qual añadido á la longitud de la Tierra 7°

$42'$

42′ 0″, dá la longitud heliocéntrica del cometa en *H*, Fig.
1ˢ 20° 7′ 9″, esto es 23° 34′ 32″ mayor que la primera. 194.

Para hallar la latitud heliocéntrica del cometa en la primera observacion, se hará esta proporcion (631): el seno del ángulo en la Tierra 73° 1′, es al seno del ángulo en el Sol 33° 9′ 37″, como la tangente de la latitud geocéntrica observada 10° 20′, es á la tangente de la latitud heliocéntrica 5° 57′ 11″.

Para averiguar la distancia del cometa al Sol en su órbita, esto es, el radio vector, del logaritmo de la distancia acortada, que hemos supuesto 1,0000, se restará el logaritmo del coseno de la latitud hallada, y saldrá el logaritmo del radio vector 0,00235 para la primera observacion. Se harian tambien estas dos operaciones para la segunda, si no se la hubiese podido escoger en el mismo nudo, donde no hay ni latitud ni reduccion para la distancia; así, el mismo radio vector *SH* es la distancia misma que hemos supuesto 0,6000 (1262).



1264 Para determinar el movimiento del cometa en su órbita en el caso que consideramos, se formará un triángulo *NRM*, en el qual *NM* será el movimiento del cometa, visto desde el Sol y reducido á la eclíptica, 23° 34′ 32″, y *MR* la latitud heliocéntrica en la primera observacion, siendo *N* el lugar de la segunda observacion; diremos *R* : cos *NM* :: cos *MR* : cos *NR*, y sacaremos el movimiento en la órbita 24° 16′ 26″; esta es tambien 195.

Fig. 195. la diferencia de las dos anomalías verdaderas del cometa en las dos observaciones, de la qual hemos de tomar la quarta parte $6^{\circ}\ 4'\ 6''\frac{1}{2}$.

Si en la segunda observacion el cometa hubiese tenído una latitud como *QO*, acudiríamos al triángulo *PQR*, en el qual conociendo el ángulo *P* cuya medída es *MO*, igual al movimiento del cometa en la ecliptica, y las distancias al polo *PR* y *PQ*, buscaríamos el lado *QR*, esto es, el movimiento en la órbita (1248).

Tambien hay casos en que el movimiento visto desde el Sol es muy pequeño, y se correría riesgo de padecer graves equivocaciones si se hiciera uso de los cosenos. Se considera, pues, el triángulo *QRX*, como un triángulo rectilineo en el qual *RX* es igual á la diferencia de las latitudes observadas, y $QX = P$. sen *PQ* (54), y se determina la hypotenusa QR (I. 669).

1265 Para hallar las dos anomalías verdaderas, se tomará la mitad de la diferencia de los logaritmos de los dos radios vectores (1235), que es 0,11210, y en las tangentes corresponde á $52^{\circ}\ 18'\ 49''$; de aquí se restarán 45°, y el log. tang. del residuo menos el log. tang. del quarto del movimiento ó de $6^{\circ}\ 4'\ 6''\frac{1}{2}$, dará el de la tangente de $50^{\circ}\ 21'\ 50''$; se restará y añadirá separadamente el quarto del movimiento, se duplicará cada resultado, y se sacarán las dos anomalías verdaderas $88^{\circ}\ 35'\ 27''$, y $112^{\circ}\ 51'\ 53''$; la menor corresponde á la distancia menor, esto es, á la segunda obser-

servacion. Es facil reparar que estas dos anomalías están á un mismo lado del perihelio, pues su diferencia 24° 16′ 26″ es el movimiento del cometa; si lo fuere su suma, sería señal de estar el perihelio entre los puntos *G* y *H* (1250). Fig. 195.

Se tomarán, pues, en la tabla general los dias que corresponden á estas dos anomalías, y saldrán 105^{d}, 670 y 217^{d}, 674, cuya diferencia es 112^{d}, 004; se deberán convertir en un número de dias que convenga al cometa de que se trata.

Añadiendo dos veces el logaritmo del coseno de la mitad de una de las anomalías verdaderas halladas, pongo por caso, el de 56° 25′ 56″ $\frac{1}{2}$, al logaritmo de la distancia ó del radio vector correspondiente 0,002348, sale el logaritmo de la distancia perihelia; sus $\frac{3}{2}$ son 9,231512: añadiendo este logaritmo al de 112^{d} 004 se saca el de 19^{d} 087; este es el número que debería ser igual con 14^{d} 598 intervalo observado, si la distancia 0,6000 se hubiese tomado qual correspondía á la primera distancia 1,0000 para que representase el intervalo entre las dos observaciones. Por consiguiente, si supusiéramos las distancias de este cometa al Sol 1,0000 y 0,6000 con las longitudes y latitudes quales se han observado (1262); sería preciso hubiese un intervalo de 19 dias y no de 14 para que el cometa hubiese andado en realidad una parábola, en virtud de las leyes arriba declaradas. No debiamos, pues, suponer 0,6000 la distancia en la segun-

Fig. da observacion; se debe tomar una distancia que discrepe
195. menos de la primera para que sea menor el movimiento heliocéntrico, y menor el intervalo de tiempo que se hallará.

Si con disminuir la segunda distancia para acercarnos al intervalo dado, llegámos al punto donde ya no se puede hacer la proporcion que debe dar el ángulo en el cometa en la segunda observacion, será prueba de que no sirve la hypótesi hecha, y será preciso disminuir la primera distancia supuesta, esto es, formar otra hypótesi: en algunas ocasiones basta hacer obtuso el ángulo en el cometa.

1266 En nuestro egemplo será preciso hacer otro supuesto para la distancia; si suponemos 0,6400, hallaremos 15^{d} 25 cuyo intervalo es tambien sobrado grande.

Terçer supuesto: si la distancia fuere 0,6600, saldrán 13^{d} 96, cuyo intervalo es al contrario muy corto.

Quarto supuesto que es un medio entre los dos antecedentes: si tomamos 0,6525, salen 14^{d} 42, y este intervalo es todavía corto.

Pero si suponemos finalmente 0,6496, sacamos 14^{d} 60 que es el intervalo observado. En este último supuesto, hallamos el ángulo en el cometa 64° 48′ (nos contentamos con señalar los minutos), el ángulo en el Sol 28° 48′, la longitud heliocéntrica en esta segunda observacion 36° 30′; si restamos de ella la primera longitud 26° 32′$\frac{1}{2}$, sacamos para el movimiento *MN* en la eclip-

eclíptica $9^{\circ}\ 57'\frac{1}{2}$; el movimiento *NR* en la órbita sale Fig.
de $11^{\circ}\ 35'$; las anomalías $124^{\circ}\ 19'$, y $135^{\circ}\ 54'$, el 195.
logaritmo de la distancia perihelia 9,15141; los dias correspondientes á las anomalías en la tabla 341, 54, y 615, 28, el intervalo 273^{d}, 74; juntando su logaritmo con los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la distancia perihelia ó 8,72712 sale el de 14^{d} 60. Como este intervalo es el mismo que el de la observacion, tenemos una primera hypótesi exacta, que cumple con las dos primeras observaciones; solo nos falta ver quanto se apartará de la tercera observacion.

Es de advertir 1.° que este cometa es directo, porque la segunda longitud heliocéntrica es mayor que la primera. 2.° que no habia pasado todavia el perihelio al tiempo de estas dos observaciones, pues los radios vectores van menguando, y ambos están á un mismo lado del perihelio (1265).

1267 Para calcular la tercera observacion en esta primera hypótesi, hemos de determinar el nudo, la inclinacion y el perihelio; el nudo hallado está en este caso particular, pues la latitud es nula en la segunda observacion; su longitud es la del cometa en esta observacion, esto es, $36^{\circ}\ 30'$.

La inclinacion se determinará en este caso particular con decir: El seno del movimiento *NM* en la eclíptica $9^{\circ}\ 57'\frac{1}{2}$ es al radio, como la tangente de la latitud *MR* en la primera observacion, $5^{\circ}\ 57'$, es á la tangente de la in-

Fig. inclinacion $N = 31^\circ\ 5'$; porque en el triángulo *NMR*,
195. si *NM* es la ecliptica; *R*, el lugar del cometa en la primera observacion; *N*, el lugar del cometa en su nudo al tiempo de la segunda observacion; todo está en resolver el triángulo *NMR*, en el qual sen *MN* : *R* :: *T*. *MR*: *T*. *N*. Pero si el cometa tuviera alguna latitud al tiempo de cada una de estas observaciones, tendríamos que resolver un triángulo *PQR* (1248), y despues el triángulo *NMR*, para determinar *NM* y el lugar del nudo.

Para determinar el lugar del perihelio, añadiremos la longitud del cometa en su órbita $36^\circ\ 30'$ á la anomalía que corresponde á esta observacion $124^\circ\ 19'$, y sacaremos $5^s\ 10^\circ\ 49$ para el lugar del perihelio en esta hypótesi. Si la observacion se hubiese hecho despues del perihelio, y fuese tambien directo el cometa, deberíamos restar la anomalía de la longitud, para sacar el perihelio. Si la una de las longitudes no estuviese en la misma órbita del cometa, tendríamos que reducirla tomando primero la distancia al nudo contada en la ecliptica qual es *NM*, y diciendo cos *N* : *R* :: tang *NM* : tang *NR* (1255).

Tambien es menester conocer el tiempo que un cometa con estos elementos hubiera pasado por el perihelio en esta misma hypótesi. Para esto, se escoge uno de los números de dias hallados antes, pongo por caso, 615^d, 28, se le convierte en dias de este cometa (1232), y salen 32^d, 823 ó $32^d\ 19^h\ 45'$, se añade este tiempo al de la observacion 15 de 7^{bre} $15^h\ 47'$, porque pre-

ce-

cedió al perihelio, y se saca el 18 de 8^{bre} 11^h $32'$ paso Fig.
del cometa por su perihelio.

1268 La tercera observacion que hemos de calcular, se hizo el dia 12 de Octubre á 16^h $42'$, la distancia al perihelio es de 5^d 18^h $50'$ ó de 5^d, 785. Se convertirán en dias de la tabla, con restar de su logaritmo los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la distancia perihelia, y se sacarán 108^d 440 con los quales se hallarán en la tabla general 89° $35'$ de anomalía, para el tiempo de la tercera observacion.

Esta anomalía 2^s 29° $35'$ se debe restar del lugar del perihelio, 5^s 10° $48'\frac{1}{2}$, pues el cometa no estaba todavía en su perihelio bien que fuese directo su movimiento; resta la longitud heliocéntrica del cometa en su órbita al tiempo de la tercera observacion 2^s 11° $13'$. Para reducirla á la ecliptica se toma su distancia al nudo mas inmediato que estaba á 36° $30'$, esta distancia 34° $43'$ es el argumento de latitud, y se hacen estas dos proporciones, R : cos 31° $5'$ :: tang 34° $43'$: tang 30° $41'$ argumento de latitud reducido á la ecliptica; R : sen 31° $5'$ :: sen 34° $43'$: sen 17° $6'$ latitud heliocéntrica al tiempo de la tercera observacion. Ya que la distancia al nudo es 30° $41'$, y el nudo está á 36° $30'$ de longitud, síguese que la longitud reducida á la eclíptica es 2^s 7° $11'$, la del Sol es 6^s 20° $1'$, que se restará de la del cometa; porque está en el caso de los planetas inferiores, siendo su distancia reducida menor que la de la

Fig. Tierra al Sol, y saldrá la comutacion $7^s 17^\circ 10'$.

Añadiendo el logaritmo de la distancia perihelía al del coseno de la latitud $17^\circ 6'$ menos dos veces el de la semianomalía $44^\circ 47' \frac{1}{2}$, sale el logaritmo de la distancia reducida del cometa al Sol 9,43967; este logaritmo se resta del logaritmo de la distancia del Sol á la *Tierra* ó de 0,9965, esto es, del logaritmo 9,99848, y sale el de la tangente de $74^\circ 53' \frac{3}{4}$; se restan de aquí 45°, y el logaritmo de la tangente de la resta añadido al logaritmo de la semicomutacion ó de su suplemento $66^\circ 25'$, dá el de $52^\circ 47'$, restando esta cantidad de $66^\circ 25'$, la resta es la elongacion del cometa $13^\circ 38'$; restando esta elongacion de la longitud del Sol $6^s 20^\circ 1'$, salen para la longitud del cometa calculada en esta primera hypótesi $6^s 6^\circ 23'$, que es $10^\circ 4'$ mayor *que la longitud observada* $5^s 26^\circ 19'$.

1269 Así, esta primera hypótesi en la qual supusimos 1,0000 para la distancia del cometa al Sol el dia 15 de Septiembre, y en la qual hemos hallado que se debia suponer 0,6496 para el dia 30 de Septiembre, para cumplir con las dos primeras observaciones, concuerda poco con la tercera; es, pues, preciso formar otra hypótesi en la qual las distancias sean menores y den al cometa un movimiento menor; por egemplo, en lugar de 1,0000 supondremos 0,9700 no mas, para el dia 15 de Septiembre.

Segunda hypótesi. Suponiendo de 0,9700 la distancia del cometa al Sol reducida á la ecliptica en la primera ob-

observacion, se han de hacer como en la primera hypótesi Fig.
diferentes supuestos (1266) para la distancia que conviene á la segunda observacion de 15 de Septiembre; y por cálculos como los de antes hallaremos que hemos de suponer 0,6587 el dia 15 de Septiembre, para que estas dos distancias den una parábola donde el intervalo de las dos longitudes observadas sea de $14^d\ 60^o$; en esta segunda hypótesi se halla el nudo á $34^o\ 52'$, la inclinacion $16^o\ 34'$, el perihelio $4^s\ 11^o\ 24'$, el paso por el perihelio para el dia 20 de Octubre $20^h\ 56'$, el logaritmo de la distancia 194.
perihelia 9,46517, la longitud para el dia 12 de Octubre $5^s\ 28^o\ 40'$, esto es, $2^o\ 21'$ mayor de lo que corresponde.

1270 Estos errores en longitud de $10^o\ 4'$ y $2^o\ 21'$ son tan grandes, que no hemos de esperar podamos hallar, por partes proporcionales, dos distancias exactas, esto es, á propósito para formar una tercera hypótesi que cumpla con las tres observaciones. Si hacemos esta proporcion $7^o\ 43'$ diferencia de los dos errores es á 300, diferencia de las dos distancias, como el error menor $2^o\ 21'$ es á 91, y restamos esta parte proporcional de 0,9700, sacaremos 0,9609 para la distancia que deberíamos suponer; pero formando otra hypótesi acerca de esta distancia, hallamos todavia un error notable en el cálculo de la tercera observacion. Halló por fin Mr. de la Lande que se habia de tomar 0,9643 para el valor de *SG*; y por medio de dife- 194.
rentes supuestos halló que la segunda distancia $SH =$ 0,6675 era la que convenia á esta tercera hypótesi, para

ra

Fig. ra cumplir con las dos primeras observaciones.

194. 1271 *Tercera hypótesi.* Con las dos distancias *SG*, *SH*, 0,9643 y 0,6675 se sacan, egecutando los mismos cálculos que antes (1262 y sig.) las longitudes heliocéntricas $15^\circ\ 31'$ y $33^\circ\ 24'\frac{2}{3}$, las anomalías $107^\circ\ 12'\frac{2}{3}$ y $88^\circ\ 52'$, el logaritmo de la distancia *perihelia* 9,53192, y el intervalo que corresponde á la diferencia de las anomalías $14^d,600$ conforme á la observacion. Los números de dias que en la tabla general corresponden á estas anomalías reducidos á dias del cometa, con la adicion de los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la distancia perihelia, dan $35^d,733$ y $21^d,132$; añadiendo estos intervalos de tiempo á los tiempos de las dos observaciones respectivamente, se saca de cada uno separadamente el paso por el perihelio para el dia 21 de Octubre $9^h\ 20'$. Contando en la órbita del cometa la segunda longitud $33^\circ\ 24'\frac{2}{3}$ que tambien es el lugar del nudo descendiente, y añadiéndola á la anomalía correspondiente $88^\circ\ 52'$, se saca el lugar del perihelio que siempre se cuenta en la órbita $4^s\ 2^\circ\ 16'\frac{3}{4}$. Tambien se puede hallar por la primera observacion, porque con restar el movimiento en la órbita que es de $18^\circ\ 20'\frac{2}{3}$, de la segunda longitud en la órbita, se saca la primera longitud contada en la órbita del cometa $15^\circ\ 4'$, y con añadirla la primera anomalía, se sacan $122^\circ\ 16'\frac{3}{4}$ para el lugar del perihelio.

La inclinacion se halla con decir, el seno del arco $NR = 17^\circ\ 53'\frac{2}{3}$, andado en la órbita desde la primera ob-

observacion hasta la segunda que se hizo en el nudo, es Fig. á la tangente de la latitud $MR = 4^{\circ}\ 6'\frac{1}{2}$, en la prime- 194. ra observacion, como el radio es á la tangente de $13^{\circ}\ 9'\frac{1}{3}$, esta es la inclinacion de la órbita.

1272 La tercera observacion dista del perihelio $8^{d}\ 693$, los quales convertidos en dias de la tabla, componen $43^{d}\ 781$, y corresponden á $52^{\circ}\ 27'\ 25''$ de anomalía; por consiguiente la longitud en la órbita al tiempo de la 3.ª observacion es $2^{s}\ 9^{\circ}\ 49'\frac{1}{3}$, y siendo el nudo $1^{s}\ 3^{\circ}\ 24'\frac{2}{3}$, el argumento de latitud será $36^{\circ}\ 24'\frac{2}{3}$, se le reducirá á la eclíptica como antes (1268), y se sacarán $35^{\circ}\ 41'$, los quales añadidos al lugar del nudo, darán la longitud reducida $2^{s}\ 9^{\circ}\ 6'$, y la comutacion $7^{s}\ 19^{\circ}\ 5'$.

El radio es al seno de la inclinacion, como el seno del argumento de latitud $36^{\circ}\ 24'\ 40''$ es al seno de la latitud heliocéntrica $7^{\circ}\ 46'$; añadiendo el logaritmo de su coseno al de la distancia perihelia, se restará el duplo del logaritmo cos de $26^{\circ}\ 13'\frac{2}{3}$, que es la semianomalía, y tendremos para el logaritmo de la distancia al Sol reducida á la eclíptica 9,62230; finalmente se sacará la elongacion del cometa $23^{\circ}\ 41'$, y su longitud geocéntrica $5^{s}\ 26^{\circ}\ 20'$; solo discrepa un minuto de la longitud observada.

Del Regreso de los Cometas.

1273 Despues que reconoció Newton que el co-

me-

meta de 1680 habia trazado sensiblemente una parábola en el discurso de su aparicion, y areas proporcionales á los tiempos, se persuadió á que este cometa era un verdadero planeta, y que la órbita que parecia una parábola era en realidad la parte inferior de una elipse muy grande y prolongada. Sabía que estas elipses *muy excéntricas* discrepan poco de parábolas (III. 95), y discrepan tanto menos quanto menor es la distancia perihelia respecto del ege mayor de la elipse.

1274 Halley verificó en 1705, calculando las antiguas observaciones, lo que Newton se presumia fundándose en las leyes de su Física; Halley demostró que el cometa de 1607 y el de 1682 eran uno mismo, y pronosticó su regreso para el año de 1759, cuyo pronóstico se ha verificado.

1275 Despues que Halley hubo calculado por observaciones las parábolas de 24 cometas, halló tres que se parecian mucho, el de 1531, de 1607 y de 1682; las tres parábolas estaban en una misma situacion, las distancias perihelias eran iguales, y los intervalos de tiempo eran de 75 á 76 años. Sospechó desde entonces que estos tres cometas podian ser uno mismo; pero la diferencia de las inclinaciones y de los periodos le parecia muy grande, y no se atrevia á afirmarlo. Pero quando despues de las investigaciones en que se empeñó acerca de los antiguos cometas hubo hallado otros tres de que hablan los Historiadores en los años de 1305, 1380, 1456 en in-

intervalos de tiempo iguales con poca diferencia, no le quedó duda alguna acerca del regreso de los cometas, y atribuyó las diferencias que hallaba entre los diferentes periodos de este cometa á las atracciones mutuas de los cuerpos celestes.

1276 Newton infirió que los cometas podian trazar elipses muy excéntricas, y dejarse ver á cada revolucion. Halley verificó este pensamiento calculando muchos cometas, entre los quales halló tres que habian trazado exactamente la misma órbita; esto arguía tres apariciones, y se ha confirmado quando el cometa volvió á parecer en 1759.

1277 Una vez que los cometas son periódicos del mismo modo que los planetas, tambien se puede resolver acerca de ellos la cuestion de Kepler (689). Dado el tiempo de la revolucion de un cometa, es conocido el ege mayor de su elipse, y por consiguiente su excentricidad, y el tiempo en que pasó por su perihelio; se trata entonces de hallar para un instante dado su anomalía verdadera.

1278 En todos los cuerpos que giran al rededor del Sol, los quadrados de los tiempos son como los cubos de las distancias (684); por consiguiente en conociendo los dias que dura la revolucion sideral de un planeta, se duplicará su logaritmo, de este duplo se restará el duplo del logaritmo de la revolucion sideral de la Tierra ó de 365^d, 25638 (642), esto es, el logaritmo

5,

5,1251955, el tercio de la resta será el *logaritmo* de la distancia del cometa. Supongo que el periodo sea de 28070 dias para el cometa de 1759, sacaremos 18,07575 para la distancia media ó el semiege de la elipse que ha de andar en 28070 dias. Si restamos la distancia perihelia 0,58350, sacaremos la excentricidad del cometa 17,49225; el logaritmo del semiege menor se sacará tambien con tomar la semisuma de los logaritmos de la distancia afelia y de la distancia perihelia (698); este logaritmo es 0,6585501, y los dos logaritmos constantes son (695) 0,8925092 y 5,3001714.

1279 En conociendo lo que dura la revolucion, se determina á poca costa la anomalía media para un número de dias, diciendo: 28070^{d} son á 360° ó $1296000''$, como el número de dias contado desde el perihelio, es á la cantidad de la anomalía media en segundos y decimales (porque aquí no son de despreciar las centésimas de segundo); así para $16^{d}\ 4^{h}\ 44'$ ó $16^{d},19722$ saldrian $12'\ 27''\ 83$ de anomalía verdadera.

1280 ***Dada la anomalía media en una elipse muy excéntrica, hallar la anomalía verdadera.***

El número de dias corridos desde el perihelio dará desde luego á conocer (1233) la anomalía verdadera en la parábola; se hará uso de esta anomalía verdadera que es exacta con corta diferencia, y se la convertirá en anomalía media (696); si esta anomalía media no fuese cabalmente la que dá el intervalo de tiempo corrido

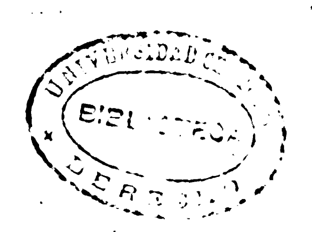
do desde el perihelio (1279), se aumentará ó disminuirá la anomalía verdadera supuesta; se la convertirá otra vez en anomalía media, y con esto se averiguará qual es la que dá cabalmente la anomalía media dada.

1281 Por egemplo, el dia 30 de Agosto de 1682, estando el cometa á $16^d\ 4^h\ 44'$ ó 16^d, 19722 de su perihelio, y siendo su anomalía media $12'\ 27''\ 83$, hemos de determinar su anomalía verdadera. Supongo su distancia perihelia 0,5835; si del logaritmo del número de dias 16,19722 restamos los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la distancia perihelia, ó 9,6490613, sacaremos el logaritmo de un número de dias, por medio del qual buscaremos y hallaremos en la tabla general la anomalía verdadera en la parábola $45°\ 20'$ con corta diferencia. Esta anomalía verdadera no puede discrepar mucho de la que buscamos en la elipse; supongámosla, pues, de $45°$ cabales, contando desde el perihelio, ó $135°$, contando desde el afelio; seguiremos la misma regla que para los planetas (696), y sacaremos para la anomalía media que corresponde á $45°$ en la elipse $12'\ 25''\ 60$, que es $2''\ 23$ menor de lo que corresponde. Para saber á que cantidad de anomalía verdadera corresponden estos $2''$ de anomalía media, tambien podremos acudir á la tabla general; primero se convertirán en fracciones de dias, añadiendo el logaritmo de la revolucion 28070^d menos el de $360°$, y restando los $\frac{3}{2}$ del logaritmo de la distancia perihelia, sacaremos el logaritmo de 0^d, 1084 que en la tabla general, á

pro-

proporcion de las diferencias que hay ácia 45°, darán 6′ 33″; esto es señal de que nos hemos de valer de la anomalía verdadera 45° 6′ 33″ para hallar la anomalía media 12′ 27″ 83 que era dada. Y de hecho, si convertimos la anomalía verdadera 45° 6′ 33″ de la elipse en anomalía media, sacaremos la anomalía media 12′27″83 ó un centésimo de segundo menos, que casi es inevitable en estos cálculos. El radio vector en la elipse se determina por la regla dada (698), y en nuestro egemplo es de 0,68222.

FIN
DEL TOMO SEPTIMO.



E
192
280
260
240
220
200
260
240
220
200
180
240
220
200
170
160
240
220
200
180
160
140
220
200
180
160
140
120
200
180
160
140
170
100


UNIVERSIDAD CENTRAL
BIBLIOTECA
DERECHO





